

Θέματα ΓΔ

9.Γ.1

$$\alpha. k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} \Rightarrow k = 2,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow f_o = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

β. $N=s/d$ όπου N = αριθμός διεγέρσεων
 d =απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σαμαριών
 s =διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο.

$$N = \frac{v \cdot t}{d} \xrightarrow{t=1s} f_\delta = \frac{v}{d} \Rightarrow v = f_\delta \cdot d = \frac{5}{\pi} \cdot 10 \text{ m/s} \Rightarrow v = \frac{50}{\pi} \text{ m/s}$$

γ. Πρέπει να αποφευχθεί ο συντονισμός ο οποίος θα συμβεί όταν $f_\delta = 5/\pi$ Hz, άρα πρέπει να αποφευχθεί ταχύτητα κοντά στην $50/\pi$ m/s.

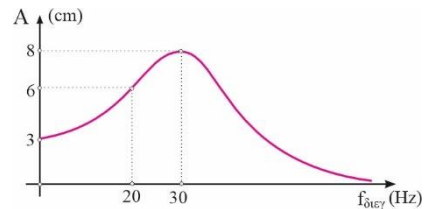
9.Γ.2

$$\alpha. \omega_o = 2\pi f_o \Rightarrow f_o = 30 \text{ Hz}$$

$$\beta. f = 20 \text{ Hz}$$

γ. Το διάγραμμα δείχνεται στο σχήμα.

δ. Για συχνότητες $20 \text{ Hz} \leq f \leq 30 \text{ Hz}$ καθώς αυξάνεται η συχνότητα αυξάνεται και το πλάτος A . Για συχνότητες $f > 30 \text{ Hz}$ καθώς αυξάνεται η συχνότητα μειώνεται το πλάτος.



9.Γ.3

$$A. \alpha. f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{200}{0,5}} \text{ Hz} \Rightarrow f_o = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

$$\beta. \Delta E = E_o - E'_o = \frac{1}{2} k A_o^2 - \frac{1}{2} k (0,9 A_o)^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} k A_o^2 (1 - 0,81) \Rightarrow \Delta E = 0,19 \text{ J}$$

B. α. Το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό. Ο δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα $f=10/\pi$ Hz επομένως η περίοδος είναι

$$T = \frac{\pi}{10} \text{ s} = 0,314 \text{ s}$$

β. Τα 31,4 s είναι $\frac{31,4}{0,314} = 100$ περίοδοι.

Σε κάθε περίοδο χάνεται μηχανική ενέργεια ίση με

$$\Delta E = \frac{1}{2} k A_0^2 \cdot \frac{19}{100} = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^2 \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 0,19 \text{ J} \Rightarrow \Delta E = 0,76 \text{ J}$$

Ο δίσκος μεταφέρει σε κάθε περίοδο στο σύστημα ενέργεια 0,76J, επομένως σε χρόνο 31,4s μεταφέρει ενέργεια

$$100 \cdot 0,76 = 76 \text{ J}$$

9.Γ.4

1. α. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$.

Η συχνότητα του διεγέρτη αρχικά ισούται με $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{20}{\pi} \text{ Hz}$

και για να προκύψει συντονισμός πρέπει να μεταβληθεί και να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, δηλαδή σε ποσοστό

$$\pi\% = \frac{\Delta f}{f_1} 100\% = \frac{f_2 - f_1}{f_1} 100\% = \frac{f_0 - f_1}{f_1} 100\% = \frac{\frac{10}{\pi} - \frac{20}{\pi}}{\frac{20}{\pi}} 100\% \Rightarrow \pi\% = -50\%$$

β. Από τη συνάρτηση της διεγείρουσας δύναμης F προκύπτει ότι $\omega = 20 \text{ rad/s}$ και ότι

$$F_{εξ} = -F' = b v \Rightarrow 0,5 \sin(20t + \pi/2) = b v \Rightarrow v = \frac{0,5}{b} \sin(20t + \pi/2) \Rightarrow v_{\max} = \frac{0,5}{b} \quad (1)$$

Από τη μέγιστη επιτάχυνση προκύπτει το πλάτος και η μέγιστη ταχύτητα

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{\alpha_{\max}}{\omega^2} = 0,25 \text{ m/s}^2$$

και $v_{\max} = \omega A = 5 \text{ m/s}$, οπότε η σχέση (1) δίνει

$$b = \frac{0,5}{v_{\max}} = 0,1 \text{ kg/s}$$

γ. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3\pi/40 \text{ s}$ είναι

$$v = v_{\max} \sin(20t + \pi/2) = 5 \sin\left(20 \frac{3\pi}{40} + \pi/2\right) = 5 \sin(2\pi) \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

και ο ρυθμός έκλυσης θερμότητας

$$\frac{dQ}{dt} = P_{F'} = |F'| v = b v^2 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 2,5 \text{ J/s}$$

δ. Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t=3\pi/40$ s είναι

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} + F_{\varepsilon\xi} + F' = F_{\varepsilon\pi} = -kx = -kA\eta\mu\left(20t + \pi/2\right) = -kA\eta\mu\left(20\frac{3\pi}{40} + \pi/2\right) \Rightarrow \Sigma F = 0\text{ N}$$

ε. Η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,1\pi$ s.

Η ισχύς της διεγείρουσας δύναμης ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της όταν

$$P_F = \frac{P_{\max}}{2} \Rightarrow Fv = \frac{F_{\max} v_{\max}}{2} \Rightarrow bv^2 = \frac{bv_{\max}^2}{2} \Rightarrow v = \pm \frac{v_{\max}\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\pm \frac{v_{\max}\sqrt{2}}{2} = v_{\max} \sin(20t + \pi/2) \Rightarrow$$

$$\sin(20t + \pi/2) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\kappa + 1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$20t + \pi/2 = (2\kappa + 1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\kappa\pi}{40} - \frac{\pi}{80}$$

και για $\kappa=1, 2, 3, 4$ προκύπτουν 4 χρονικές στιγμές μέσα στην 1^η περίοδο:

$$t_1 = \frac{\pi}{80} \text{ s}, t_2 = \frac{3\pi}{80} \text{ s}, t_3 = \frac{5\pi}{80} \text{ s}, t_4 = \frac{7\pi}{80} \text{ s}$$

9.Γ.5

α. Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + F' = ma \Rightarrow -kx + F' = ma \Rightarrow$$

$$-k \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} + 2 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot (-2 \text{ m/s}^2) \Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$$

β. Από τη δύναμης απόσβεσης, $F' = -0,2v$, προκύπτει $b=0,2 \text{ kg/s}$.

Από τη συνάρτηση της διεγείρουσας δύναμης F προκύπτει ότι $\omega=10 \text{ rad/s}$.

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ ισούται με $F_{\varepsilon\xi} = -F' = bv$ και από τη μέγιστη τιμή της προκύπτει

$$F_{\varepsilon\xi, \max} = bv_{\max} = b\omega A \Rightarrow 0,1 = 0,2 \cdot 10 \cdot A \Rightarrow A = 5 \text{ cm}$$

γ. Η διεγείρουσα δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ ισούται με $F_{\varepsilon\xi} = -F' = bv$.

Η δύναμη επαναφοράς είναι $F = -kx$.

Ο λόγος των μέτρων της διεγείρουσας δύναμης προς τη δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση

$$\left| \frac{F_{εξ}}{F} \right| = \frac{b|v|}{k|x|} \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι τριπλάσια από την κινητική ενέργεια του σώματος, στις θέσεις που προκύπτουν από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow E = U + U/3 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow |x| = \frac{A\sqrt{3}}{2}$$

Η ταχύτητα σ' αυτές τις θέσεις έχει μέτρο

$$E = U + K \Rightarrow E = 3K + K \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 4 \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow |v| = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{\omega A}{2}$$

και η σχέση (1) δίνει

$$\left| \frac{F_{εξ}}{F} \right| = \frac{b\omega \frac{A}{2}}{kA \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b\omega}{k\sqrt{3}} = \frac{0,2\text{kg/s} \cdot 10\text{rad/s}}{\sqrt{3} \cdot 100\text{N/m}} \Rightarrow \left| \frac{F_{εξ}}{F} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{300}$$

δ. Από τη συνάρτηση της διεγείρουσας δύναμης F προκύπτει ότι

$$F = -F' = bv \Rightarrow 0,1\text{συν}10t = 0,2v \Rightarrow v = 0,5\text{συν}10t \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα είναι στη θέση ισορροπίας, αφού η αρχική φάση είναι μηδέν.

Η δύναμη των αντιστάσεων $F' = -0,2v$, μηδενίζεται όταν μηδενίζεται και η ταχύτητα, δηλαδή στις ακραίες θέσεις. Άρα για 2η φορά μηδενίζεται στην ακραία αρνητική θέση που το σώμα φτάνει τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{20}\text{s}$$

ε. Η ισχύς της διεγείρουσας δύναμης δίνεται από τη σχέση

$$P_{F_{εξ}} = F_{εξ}v = bv^2 = 0,2(0,5\text{συν}10t)^2 \Rightarrow$$

$$P_{F_{εξ}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{συν}^2 10t \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα της ισχύος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται στο διπλανό σχήμα και όπως παρατηρούμε η ισχύς μεγιστοποιείται 4 φορές σε χρονικό διάστημα 2 περιόδων.

