

Θέματα Β

10.B.1

	A	B	Γ	Δ	E	Z
γ	+	+	0	-	0	+
υ	-	0	+	0	-	+
α	-	-	0	+	0	-

10.B.2 γ.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ορέων είναι λ . Άρα η απόσταση μεταξύ 1^{ου} όρους είναι 10^{ου} όρους είναι $\Delta x = 9\lambda$. Η 10^η κοιλάδα είναι μετά το 10^ο όρος, άρα η απόσταση μεταξύ 1^{ου} όρους και 10^{ης} κοιλάδας είναι

$$\Delta x = 9\lambda + \lambda/2 = 19\lambda/2$$

10.B.3 γ.

$$A_1 = 2A_2, \lambda_1 = 2\lambda_2, f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2\lambda_2} \Rightarrow f_1 = \frac{f_2}{2}$$

$$v_{1\max} = 2\pi f_1 A_1 = 2\pi \frac{f_2}{2} \cdot 2A_2 \Rightarrow v_{1\max} = v_{2\max}$$

10.B.4 α.

Όταν το κύμα διαδίδεται από το ένα μέσο στο άλλο η συχνότητά του παραμένει σταθερή επομένως

$$v_1 = \lambda_1 f, v_2 = \lambda_2 f$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{v_2 \lambda_1}{v_1}$$

10.B.5 α.

Το χρονικό διάστημα $\Delta t = 8\text{s}$ αντιστοιχεί σε 15T.

$$\text{Άρα } T = 8/15 \text{ s και } f = 15/8 \text{ Hz}$$

10.B.6 γ.

Από τις εξισώσεις προκύπτει:

$$f_1=2\text{Hz}, \lambda_1=0,25\text{m και } u_1=\lambda_1 f_1=0,5\text{m/s}$$

$$f_2=1/8\text{Hz}, \lambda_2=1\text{m και } u_2=\lambda_2 f_2=1/8\text{m/s}$$

$$\text{Άρα } u_1=0,5\text{m/s}=4\cdot(1/8 \text{ m/s}) \text{ ή } u_1=4u_2.$$

10.B.7 γ.

Από το διάγραμμα $y=f(x)$ έχουμε $\lambda=1\text{m}$ και
από το διάγραμμα $y=f(t)$ έχουμε $T=0,1\text{s}$.

$$v = \frac{\lambda}{T} = 10\text{m/s}.$$

10.B.8 β.

$$\varphi_A - \varphi_B = \Delta\varphi = 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} = \frac{2\pi(x_B - x_A)}{\frac{v}{f}} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi(x_B - x_A)}{v} f$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων είναι ανάλογη της συχνότητας, f , του κύματος. Άρα, ο διπλασιασμός της συχνότητας της πηγής θα προκαλέσει διπλασιασμό της διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο σημείων.

10.B.9 α.

Το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, άρα $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ και

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} \Rightarrow 14\pi - 4\pi = 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} \Rightarrow x_B - x_A = 5\lambda$$

10.B.10 i.γ. ii.α.

i. Από το διάγραμμα προκύπτει $T=0,8\text{s}$, $v=\lambda/T=12,5\text{cm/s}$.

ii. Με αντικατάσταση $x=0\text{m}$, $t=0,4\text{s}$ στον τύπο της φάσης

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ προκύπτει } \varphi=\pi \text{ rad.}$$

10.B.11 i. β ii. β. iii. β.

$$\text{i. } \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Με αντικατάσταση $x=0\text{m}$, $\varphi=4\pi\text{rad}$ προκύπτει $t_1=2T$.

Με αντικατάσταση στην ίδια σχέση $x=0,6\text{m}$, $\varphi=0\text{rad}$ και $t_1=2T$ προκύπτει $\lambda=0,3\text{m}$.

ii. Τη στιγμή t_1 η διαταραχή φτάνει στο $x=0,6\text{m}$ και το σημείο αυτό ξεκινά ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του, άρα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του.

iii. Τη στιγμή t_1 το σημείο της θέσης $x=0\text{m}$ έχει φάση $4\pi\text{rad}$, άρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και έχει τη μέγιστη ταχύτητά του.

10.B.12 β.

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Με αντικατάσταση $x=0\text{m}$, $\varphi=4\pi\text{rad}$ προκύπτει $t_1=2T$.

Με αντικατάσταση στην ίδια σχέση, $\varphi=0\text{rad}$, $t_1=2T$ προκύπτει $x=2\lambda$.

Σωστό θα είναι το στιγμιότυπο που το κύμα έχει προχωρήσει κατά $x=2\lambda$ και αυτό συμβαίνει στα (α), (β).

Επειδή την $t=0\text{s}$ το σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το ίδιο πρέπει να κάνει και κάθε σημείο που ξεκινά ταλάντωση, άρα σωστό είναι το (β).

10.B.13 α.

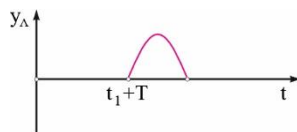
$$x=ut \text{ ή } 4A=uT \quad (1), \quad v_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A \quad (2)$$

Διαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{v}{v_{\max}} = \frac{2}{\pi}$$

10.B.14 γ.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\lambda}{\lambda/T} \Rightarrow \Delta t = T$$



Το σημείο Α θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_2=t_1+T$.

10.B.15 β.

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \lambda_1 \frac{\omega_1}{2\pi} = \lambda_2 \frac{\omega_2}{2\pi} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha_{\max 1}}{\alpha_{\max 2}} = \frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

10.B.16 β.

$$v_o = v_{\max} = 0,4 \text{ m/s} \Rightarrow \omega A = 0,4 \text{ m/s}$$

$$a_B = a_{\max} = 2\pi \text{ m/s}^2 \Rightarrow \omega^2 A = 2\pi \text{ m/s}^2$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\omega A}{\omega^2 A} = \frac{0,4}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{0,2}{\pi} \Rightarrow \omega = 5\pi \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4 \text{ s}$$

Το σημείο Β θα ξαναβρεθεί στην πάνω ακραία θέση μετά από χρόνο μιας περιόδου, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_1 + 0,4 \text{ s}$.

10.B.17 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει $T=2\text{s}$.

Η δυναμική ενέργεια του Μ μεγιστοποιείται για 1^η φορά τη χρονική στιγμή $t=3,5\text{s}$. Τη στιγμή αυτή η φάση της πηγής είναι

$$\varphi_o = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{2} 3,5 \text{ rad} \Rightarrow \varphi_o = \frac{7\pi}{2} \text{ rad}$$

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος που ταλαντώνεται μεγιστοποιείται όταν η φάση του είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$ rad. Άρα η δυναμική ενέργεια του σημείου Ο μεγιστοποιείται στις

$$\text{φάσεις } \varphi_o = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \frac{3\pi}{2} \text{ rad}, \frac{5\pi}{2} \text{ rad}, \frac{7\pi}{2} \text{ rad} \text{ (4^η φορά)}$$

10.B.18 β.

$$\Delta t = T/2 = 1 \text{ s} \text{ ή } T = 2 \text{ s}$$

Το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, άρα

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Όμως $T=2\text{s}$, $\lambda=8\text{cm}$, $x_A=3\text{cm}$, άρα

$$\varphi_A = 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{8} \right) (\text{SI})$$

10.B.19 β.

Από τη σχέση $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει ότι η κλίση της γραφικής παράστασης $\varphi=f(x)$ είναι ίση με $-2\pi\frac{x}{\lambda}$.

Από τις κλίσεις των δύο γραφικών παραστάσεων έχουμε:

$$\text{κλίση } 1 = -2\pi\frac{x}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{0\text{rad} - 4\pi\text{rad}}{6\text{m} - 0\text{m}} = -2\pi\frac{x}{\lambda_1} \Rightarrow -\frac{2\pi}{3} = -2\pi\frac{x}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{\lambda_1}$$

$$\text{κλίση } 2 = -2\pi\frac{x}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{0\text{rad} - 3\pi\text{rad}}{6\text{m} - 0\text{m}} = -2\pi\frac{x}{\lambda_2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = -2\pi\frac{x}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{\lambda_2}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{v}{f_2}}{\frac{v}{f_1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3f_1 = 4f_2$$

10.B.20 γ.

Από τη σχέση $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει ότι για $x=\text{σταθερό}$ ο ρυθμός μεταβολής της φάσης είναι

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

Το Μ έχει το ίδιο ω με το Ο. Βρίσκουμε το ω από την κλίση του $\varphi_0=f(t)$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{3\pi\text{rad/s} - 0\text{rad/s}}{1\text{s} - 0\text{s}} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 3\pi\text{rad/s}$$

10.B.21 i. α. ii. β. iii. α.

i. Τη χρονική στιγμή $t_1=T$ το σημείο Μ έχει φάση π rad ενώ το σημείο Ο έχει φάση 2π rad, άρα τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

$$\text{ii. } \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Με αντικατάσταση $x=0\text{m}$, $\varphi=3\pi$ rad προκύπτει $t_2=3T/2$.

Με αντικατάσταση στην ίδια σχέση, $\varphi_\lambda=0\text{rad}$, $t=3T/2$ προκύπτει $x_\lambda=3\lambda/2$.

iii. Τα σημεία Κ, Λ απέχουν μεταξύ τους $\lambda/2$ και έχουν μεταξύ τους διαφορά φάσης π rad με το Κ να ξεκινά νωρίτερα από το Λ. Όταν η δυναμική ενέργεια του Λ μεγιστοποιείται για πρώτη φορά, αυτό έχει φάση $\pi/2$ rad και το Κ που προηγείται κατά π rad έχει φάση $3\pi/2$ rad. Άρα είναι η 2^η φορά.

10.B.22 α.

$$\varphi = 10\pi t - 2\pi x \Rightarrow \varphi = 2\pi(5t - x)(\text{SI})$$

Από τη σύγκριση με τη γενική εξίσωση της φάσης προκύπτουν:

$$f=5\text{Hz}, \lambda=1\text{m και } v=\lambda f=5\text{m/s}$$

Το σημείο της θέσης $x=15\text{m}$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{x}{v} = 3\text{s}$.

Άρα το σημείο της θέσης $x=15\text{m}$ τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$, έχει $y=0\text{m}$ και $v=v_{\text{max}}$.

10.B.23 β.

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$x = 0\text{m}, \varphi = 10\pi\text{rad} : 10\pi = 2\pi\left(\frac{2}{T} - 0\right) \Rightarrow T = 0,4\text{s}$$

$$x = 5\text{m}, \varphi = 5\pi\text{rad} : 5\pi = 2\pi\left(\frac{2}{0,4} - \frac{5}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.B.24 α.

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$x = 0\text{m}, \varphi = 4\pi\text{rad} : 4\pi = 2\pi\left(\frac{2}{T} - 0\right) \Rightarrow T = 1\text{s}$$

$$x = 8\text{m}, \varphi = 0\text{rad} : 0 = 2\pi\left(\frac{2}{1} - \frac{8}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = 4\text{m}$$

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{4}\right)$$

10.B.25 β.

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 1\text{Hz}, v = \lambda f \Rightarrow \lambda = 1\text{m}, t_B = \frac{x_B}{v} = 1\text{s}$$

Άρα την $t_1=0,5\text{s}$ το κύμα δεν έφτασε μέχρι το Β και $v_B=0\text{m/s}$.

Την $t_2=2\text{s}$ η ταχύτητα του Β είναι

$$v_2 = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,1\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.B.26 γ.

$\phi_K = 4\pi t - \pi = 2\pi(2t - 0,5)$. Επομένως $T=0,5\text{s}$.

Όταν το Κ εκτελέσει 2 ταλαντώσεις,

$\phi_K = 4\pi \text{ rad}$ και $4\pi = 4\pi t - \pi$ ή $t = 1,25\text{s}$.

Η φάση της πηγής είναι

$\phi_0 = (2\pi/T)t = 4\pi t = 5\pi \text{ rad}$.

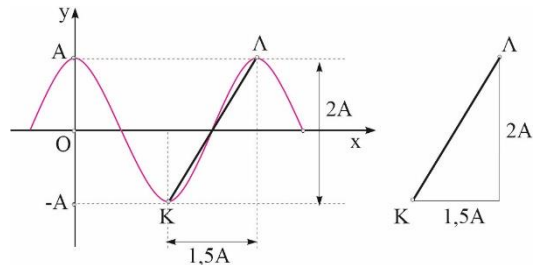
10.B.27 γ.

Τα Κ και Λ έχουν διαφορά φάσης $\pi \text{ rad}$, άρα η οριζόντια απόσταση μεταξύ τους Δx είναι

$$\phi_K - \phi_\Lambda = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \pi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

Επομένως τα Κ, Λ είναι δύο διαδοχικά σημεία που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Μέγιστη απόσταση έχουν τα σημεία αυτά όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους (βλέπε σχήμα). Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$(K\Lambda) = \sqrt{(1,5A)^2 + (2A)^2} = \sqrt{(6,25A)^2} \Rightarrow (K\Lambda) = 2,5A$$



10.B.28 α.

Από το διάγραμμα έχουμε

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,4\text{m}}{0,8\text{s}} \Rightarrow v = 0,5\text{m/s}$$

και $(1,1\text{s} - 0,8\text{s}) = 3T/2$ ή $T = 0,2\text{s}$.

Άρα $\lambda = vT = 0,1\text{m}$.

10.B.29 α.

$$v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{5T}{4} - \frac{\lambda}{4} \right) = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow v_K = \omega A \sin 2\pi \Rightarrow v_K = \omega A$$

$$v_A = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{5T}{4} - \frac{3\lambda}{4} \right) = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) \Rightarrow v_A = \omega A \sin \pi \Rightarrow v_A = -\omega A$$

$$\frac{v_K}{v_A} = \frac{\omega A}{-\omega A} = -1$$

10.B.30 β.

Το κύμα διαδίδεται προς τον αρνητικό ημιάξονα, οπότε η φάση ενός σημείου τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\varphi_B = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_B}{2\lambda} \right) \Rightarrow 7\pi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{2\lambda}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{3T}{2}$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow 0 = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_A}{\lambda} \right) \Rightarrow x_A = -\frac{3\lambda}{2}$$

10.B.31 α.

Από τη σχέση $\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ προκύπτει ότι η κλίση της γραφικής παράστασης $\varphi = f(x)$ είναι ίση

$$\text{με } -2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

$$\text{Επειδή } \lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda_1} < 2\pi \frac{x}{\lambda_2} \Rightarrow -2\pi \frac{x}{\lambda_1} > -2\pi \frac{x}{\lambda_2}$$

άρα η κλίση στο δεύτερο τμήμα πρέπει να είναι μικρότερη από ότι είναι στο πρώτο. Αυτό συμβαίνει στο διάγραμμα (α).

10.B.32 α.

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

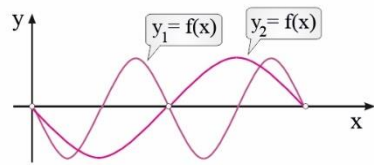
Έχουμε γραφική παράσταση $\phi=f(t)$. Η κλίση της ισούται με το $2\pi/T=\omega$.

$$\omega_1 = \frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = \frac{4\pi - 0}{2 - 1} \text{ rad/s} = 4\pi \text{ rad/s} \quad \text{άρα } T_1 = 0,5\text{s}.$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = \frac{2\pi - 0}{2 - 1} \text{ rad/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{άρα } T_2 = 1\text{s}.$$

Επειδή πρόκειται για το ίδιο μέσο, η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια, οπότε τα μήκη κύματος συνδέονται με τη σχέση

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{\lambda_2}{T_2} \Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_1$$



Επειδή η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια, τα δύο στιγμιότυπα θα έχουν προχωρήσει την ίδια απόσταση, όμως στο κύμα 1 η απόσταση θα αντιστοιχεί σε $2\lambda_1$ ενώ στο κύμα 2 σε $1\lambda_2$.

10.B.33 γ.

Επειδή σε χρόνο t_1 τα κύματα έχουν διαδοθεί μέχρι την ίδια θέση x_1 , θα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα v . Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι

$$\frac{3}{2}\lambda_A = 3\lambda_B \Rightarrow \lambda_A = 2\lambda_B \Rightarrow vT_A = 2vT_B \Rightarrow T_A = 2T_B \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T_B} = 2 \frac{2\pi}{T_A} \Rightarrow \omega_B = 2\omega_A$$

Για τις μέγιστες επιταχύνσεις ισχύει

$$\alpha_{\max A} = \omega_A^2 A = \left(\frac{\omega_B}{2}\right)^2 A = \frac{\alpha_{\max B}}{4} \Rightarrow \alpha_{\max B} = 4\alpha_{\max A}$$

10.B.34 α.

Αν το πλάτος του κύματος είναι A , η απομάκρυνση των δύο σημείων τη στιγμή t_1 , είναι

$$y_A = A \eta\mu\phi_A = A \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow y_A = \frac{A}{2}$$

$$y_B = A \eta\mu\phi_B = A \eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow y_B = \frac{A\sqrt{3}}{2}$$

και ο λόγος των δυναμικών ενεργειών ταλάντωσης των σημείων A, B , είναι

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{\frac{1}{2} D y_A^2}{\frac{1}{2} D y_B^2} = \frac{m \omega^2 y_A^2}{m \omega^2 y_B^2} = \frac{y_A^2}{y_B^2} = \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\left(\frac{A\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{U_A}{U_B} = \frac{1}{3}$$

10.B.35 γ.

$$v = 2v_{\max} \Rightarrow \lambda f = 2\omega A \Rightarrow \lambda f = 2 \cdot 2\pi f A \Rightarrow \lambda = 4\pi A$$

10.B.36 β.

Σε κάθε πλήρη ταλάντωση η πηγή διέρχεται δύο φορές από τη θέση ισορροπίας της. Άρα όταν διέρχεται 60 φορές, εκτελεί 30 πλήρεις ταλαντώσεις. Η συχνότητα του κύματος είναι

$$f = \frac{N}{t} = \frac{30 \text{ ταλ.}}{30\text{s}} \Rightarrow f = 1\text{Hz}$$

Αφού η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι ίση με 0,2m, είναι $2A=0,2\text{m}$ ή $A=0,1\text{m}$.

Από τη χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα στο σημείο Γ προκύπτει η ταχύτητα διάδοσης του κύματος

$$t_1 = 2T \Rightarrow \frac{x_1}{v} = 2 \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{0,4\text{m}}{v} = 2 \frac{1}{1\text{Hz}} \Rightarrow v = 0,2\text{m/s}$$

Το μήκος του κύματος είναι $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0,2\text{m}$.

Ο λόγος της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων προς την ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίσος με

$$\frac{v_{\max}}{v} = \frac{\omega A}{\lambda f} = \frac{2\pi f A}{\lambda f} = \frac{2\pi A}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 0,1\text{m}}{0,2\text{m}} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{v} = \pi$$

10.B.37 α.

Από το διάγραμμα και την εξίσωση της φάσης για $x=0\text{m}$ προκύπτει η περίοδος του κύματος

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{x=0\text{m}, \varphi=4\pi\text{rad}} 4\pi = 2\pi \frac{2\text{s}}{T} \Rightarrow T = 1\text{s}$$

και για $x=4\text{m}$ προκύπτει το μήκος κύματος

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{x=4\text{m}, \varphi=0\text{rad}} 0 = 2\pi \left(\frac{2\text{s}}{1\text{s}} - \frac{4\text{m}}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$$

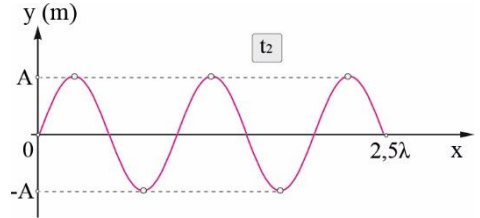
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} = 2 \text{ m/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 2,5 \text{ s}$, το κύμα έχει φτάσει στη θέση

$$x_2 = vt_2 = 5 \text{ m} = 2,5\lambda$$

και το στιγμιότυπο του κύματος δείχνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι τα σημεία της χορδής που βρίσκονται σε ακραία θέση της τροχιάς τους είναι 5.



10.B.38 γ.

Από το διάγραμμα και την εξίσωση της φάσης για $x=0 \text{ m}$ προκύπτει

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{x=0 \text{ m}, \varphi=6\pi \text{ rad}} 6\pi = 2\pi \frac{t_1}{T} \Rightarrow t_1 = 3T$$

Τη στιγμή $t = 3t_1/8$ η πηγή του κύματος είχε φάση

$$\varphi_0 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{x=0 \text{ m}, t=3t_1/8} \varphi_0 = 2\pi \frac{3t_1/8}{T} = 2\pi \frac{3 \cdot 3T/8}{T} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{9\pi}{4} \text{ rad}$$

και απομάκρυνση

$$y = A \sin \frac{9\pi}{4} \Rightarrow y = A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10.B.39 α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το $\lambda = 2 \text{ m}$, ότι το κύμα έχει φτάσει στη θέση $x_1 = 3,5 \text{ m}$ και ότι το

πλάτος είναι $A = 0,2 \text{ m}$. Η ταχύτητα διάδοσης είναι $v = \frac{x_1}{t_1} = 0,5 \text{ m/s}$

και η περίοδος $T = \frac{\lambda}{v} = 4 \text{ s}$.

Άρα εξίσωση του αρμονικού κύματος, είναι

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

10.B.40 γ.

Η συχνότητα του κύματος είναι $f = \frac{N}{t_2}$,

η ταχύτητα διάδοσης είναι $v = \frac{x_1}{t_1} = \frac{L/2}{t_1}$

και η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής δίνει

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{\frac{L/2}{t_1}}{\frac{N}{t_2}} \Rightarrow \lambda = \frac{Lt_2}{2Nt_1}$$

10.B.41 β.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το $T=2s$ και ότι το σημείο ξεκινάει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_M=2s$.

Η ταχύτητα διάδοσης είναι $v = \frac{\lambda}{T} = 1 \text{ m/s}$

άρα, η θέση του σημείου M είναι $x_M = vt_M = 2 \text{ m}$.

10.B.42 β.

Η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής δίνει το μήκος κύματος

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0,5 \text{ m}$$

Η εξίσωση της φάσης τη στιγμή t_1 για x_A δίνει

$$\varphi_A = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \quad (1)$$

και για x_B δίνει $\varphi_B = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \quad (2)$

Αφαιρώντας τη σχέση (1) από τη (2) προκύπτει

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \frac{x_A - x_B}{\lambda} = 2\pi \frac{2,25 \text{ m}}{0,5 \text{ m}} \Rightarrow \varphi_B - \varphi_A = 9\pi \text{ rad}$$

10.B.43 β.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το $\lambda=2\text{m}$, ότι το κύμα έχει φτάσει στη θέση $x_1=4,5\text{m}$ και ότι το πλάτος είναι $A=0,2\text{m}$. Η ταχύτητα διάδοσης είναι $v=\frac{x_1}{t_1}=2\text{m/s}$

και η περίοδος $T=\frac{\lambda}{v}=1\text{s}$.

Η μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας v_m ενός σωματιδίου του ελαστικού μέσου, στη διάρκεια μίας περιόδου είναι

$$v_m = \frac{x_{\text{ολ}}}{T} = \frac{4A}{T} \Rightarrow v_m = 0,8\text{m/s}$$

10.B.44 β.

Από το διάγραμμα και την εξίσωση της φάσης για $x=0\text{m}$ προκύπτει

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \xrightarrow{t=4\text{s}, x=0\text{m}, \varphi=20\pi\text{rad}} 20\pi = 2\pi\frac{4\text{s}}{T} \Rightarrow T = 0,4\text{s}$$

Για $x=10\text{m}$ προκύπτει

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \xrightarrow{t=4\text{s}, x=10\text{m}, \varphi=10\pi\text{rad}} 10\pi = 2\pi\left(\frac{4\text{s}}{0,4\text{s}} - \frac{10\text{m}}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης είναι $v=\frac{\lambda}{T}=5\text{m/s}$

και η θέση που έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή $t_2=10\text{s}$ είναι $x_2=vt_2=50\text{m}$.

10.B.45 γ.

Από την εξίσωση ταλάντωσης της πηγής προκύπτει

$$\omega = \pi \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s} \Rightarrow T = 2\text{s}$$

Η εξίσωση της φάσης για μια στιγμή t_1 , $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, είναι φθίνουσα συνάρτηση της θέσης,

άρα για να έχει το σημείο Α μικρότερη φάση από το Β, θα απέχει περισσότερο από την πηγή του κύματος.

Η εξίσωση της φάσης τη στιγμή t_1 για x_A δίνει

$$\varphi_A = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \quad (1)$$

και για x_B δίνει $\varphi_B = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \quad (2)$

Αφαιρώντας τη σχέση (1) από τη (2) προκύπτει

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \frac{x_A - x_B}{\lambda} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} = 2\pi \frac{x_A - x_B}{\lambda} \Rightarrow x_A - x_B = \frac{\lambda}{4}$$

Για να διανύσει το κύμα την απόσταση των δύο σημείων χρειάζεται χρόνο

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_B}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{x_A - x_B}{v} = \frac{\lambda/4}{v} = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = 0,5s$$

10.B.46 α.

Τα κύματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα, άρα ισχύουν οι σχέσεις

$$L = v_\delta t_\delta \Rightarrow t_\delta = \frac{L}{v_\delta}$$

$$L = v_\epsilon t_\epsilon \Rightarrow t_\epsilon = \frac{L}{v_\epsilon}$$

και η χρονική διαφορά Δt ισούται με

$$\Delta t = t_\epsilon - t_\delta = \frac{L}{v_\epsilon} - \frac{L}{v_\delta} \Rightarrow \Delta t = L \frac{v_\delta - v_\epsilon}{v_\delta \cdot v_\epsilon}$$

10.B.47 α.

Η ταχύτητα των δύο κυμάτων στο ίδιο μέσο είναι ίδια, v , και η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής δίνει

$$v = \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f_2}{f_1} = 10$$

10.B.48 γ.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων στο ίδιο μέσο είναι ίδια, v , και η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής δίνει το καινούριο μήκος κύματος

$$v = \lambda f = \lambda' f' \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda f}{f'} = \frac{\lambda f}{2f} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2}$$

Το νέο κύμα θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$y' = A' \eta \mu 2\pi \left(f' t - \frac{x}{\lambda'} \right) = 2A \eta \mu 2\pi \left(2ft - \frac{x}{\lambda/2} \right) \Rightarrow y' = 2A \eta \mu 4\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right)$$

και η ταχύτητα των διαφόρων σημείων του μέσου σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$v' = 2A\omega \sin 4\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) = 2A2\pi f' \sin 4\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow v' = 8\pi f A \sin 4\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right)$$

10.B.49 β.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων, αφού διαδίδονται στο ίδιο μέσο είναι ίδια, v . Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το $\lambda_2 = 4\lambda_1$ και ότι τα πλάτη είναι ίσα, A .

Η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής δίνει

$$v = \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \lambda_1 f_1 = 4\lambda_1 f_2 \Rightarrow f_1 = 4f_2$$

Για τις μέγιστες ταχύτητες ισχύει

$$v_{\max 1} = \omega_1 A = 2\pi f_1 A = 2\pi 4f_2 A \Rightarrow v_{\max 1} = 4v_{\max 2}$$

10.B.50 α.

Το κύμα, τη στιγμή t_1 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x_1 = -vt_1 = -v \frac{2T}{3} = -\frac{2\lambda}{3}$

και κατά συνέπεια δεν έχει φτάσει στο σημείο Λ , που θα βρίσκεται ακίνητο στη θέση ισορροπίας του, με δυναμική ενέργεια $U_\Lambda = 0$ J.

Από την εξίσωση του αρμονικού κύματος προκύπτει η απομάκρυνση του σημείου M , τη στιγμή t_1

$$y_M = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right) = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = A \eta \mu 2\pi \frac{5}{12} \Rightarrow y_M = \frac{A}{2}$$

και η διαφορά των δυναμικών ενεργειών $U_M - U_\Lambda$ θα είναι ίση με

$$U_M - U_\Lambda = \frac{1}{2} D y_M^2 - 0 = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{A}{2} \right)^2 \Rightarrow U_M - U_\Lambda = \frac{1}{8} m \omega^2 A^2$$

10.B.51 γ.

Η εξίσωση της φάσης για μια δεδομένη στιγμή t_1 , $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, είναι φθίνουσα συνάρτηση της θέσης και αφού το σημείο B απέχει περισσότερο από την πηγή του κύματος από ότι το σημείο A, η φάση του B θα είναι μικρότερη από αυτήν του A. Η εξίσωση της φάσης τη στιγμή t_1 για x_A δίνει

$$\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) \quad (1)$$

$$\text{και για } x_B \text{ δίνει } \varphi_B = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \quad (2)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (2) από την (1) προκύπτει η θέση του σημείου B

$$\varphi_A - \varphi_B = 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2\pi \frac{x_B - \frac{3\lambda}{8}}{\lambda} \Rightarrow x_B = \frac{5\lambda}{8}$$

Από την εξίσωση του αρμονικού κύματος προκύπτει η απομάκρυνση του σημείου B τη στιγμή $2t_1$

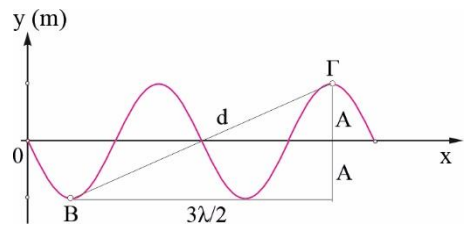
$$y_B = A \eta \mu 2\pi\left(\frac{2t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) = A \eta \mu 2\pi\left(\frac{2 \cdot 5T}{4T} - \frac{5\lambda}{8\lambda}\right) = A \eta \mu 2\pi \frac{15}{8} = A \eta \mu \frac{15\pi}{4} \Rightarrow y_B = -A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10.B.52 γ.

Από τη σχέση της μέγιστης ταχύτητας, $v_{\max}$, των σημείων που ταλαντώνονται και της ταχύτητας διάδοσης του κύματος v , προκύπτει

$$v_{\max} = 2\pi v \Rightarrow \omega A = 2\pi \lambda f \Rightarrow 2\pi f A = 2\pi \lambda f \Rightarrow \lambda = A$$

Αφού το κύμα έχει φτάσει στα δύο σημεία και αυτά είναι στιγμιαία ακίνητα, θα βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους και αφού ανάμεσά τους υπάρχουν 3 σημεία που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, από το διπλανό στιγμιότυπο προκύπτει ότι η κατακόρυφη απόσταση των δύο σημείων είναι $\Delta y = 2A$ και η οριζόντια $\Delta x = 3\lambda/2$, όπου λ το μήκος κύματος. Η απόσταση των δύο σημείων προκύπτει από το πυθαγόρειο θεώρημα



$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 + (2A)^2} = \sqrt{\left(\frac{3A}{2}\right)^2 + (2A)^2} \Rightarrow d = 2,5A$$

10.B.53 α.

Το κύμα φτάνει στο σημείο με θέση x_1 τη στιγμή $t_1 = \frac{x_1}{v}$.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι

$$\Delta t = \frac{5x_1}{2v} - t_1 = 3\frac{T}{2} \Rightarrow \frac{5x_1}{2v} - \frac{x_1}{v} = 3\frac{T}{2} \Rightarrow \frac{3x_1}{2v} = 3\frac{T}{2} \Rightarrow x_1 = vT = \lambda$$

10.B.54 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το κύμα έχει φτάσει στη θέση $x_1 = 5\lambda/2$ και ότι η χρονική στιγμή

$$t_1 \text{ είναι } t_1 = \frac{x_1}{v} = \frac{5\lambda}{2v} \Rightarrow t_1 = \frac{5T}{2}$$

Το κύμα φτάνει στο σημείο M τη στιγμή

$$t_M = \frac{x_M}{v} = \frac{3\lambda}{4v} \Rightarrow t_M = \frac{3T}{4}$$

Άρα, το χρονικό διάστημα που ταλαντώνεται το M είναι

$$\Delta t = t_1 - t_M = \frac{5T}{2} - \frac{3T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{7T}{4}$$

και σ' αυτό το διάστημα το M έχει διαγράψει μήκος διαδρομής ίσο με $s=7\lambda$, καθώς ξεκινάει από τη θέση ισορροπίας του και κάθε $T/4$ διαγράφει διαδρομή ίση με λ .

10.B.55 α.

Τη χρονική στιγμή $t_1=4,75T$, το κύμα έχει φτάσει στη θέση

$$x_1 = v t_1 = v \cdot 4,75T \Rightarrow x_1 = 4,75\lambda = 4\lambda + \frac{3}{4}\lambda$$

Σε κάθε λ υπάρχουν δύο σημεία με ακραία απομάκρυνση. Επίσης, όταν ένα κύμα διαδοθεί κατά $3\lambda/4$ έχουν ήδη δημιουργηθεί δύο σημεία με ακραία απομάκρυνση. Άρα, τα σημεία της χορδής που βρίσκονται σε ακραία θέση της τροχιάς τους και έχουν μέγιστη δυναμική ενέργεια είναι 10.

10.B.56 i. γ. ii. γ.

i. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης όλων των σημείων ισούται με την κλίση της ευθείας στο διάγραμμα φάσης – χρόνου και από τη γωνιακή ταχύτητα προκύπτει η περίοδος της ταλάντωσης του Λ

$$\omega = \kappaλίση \Rightarrow \frac{2\pi}{T_A} = \frac{\frac{3\pi}{4} - 0}{4s - 3s} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T_A = \frac{8}{3}s$$

ii. Η ταχύτητα των δύο σημείων τη στιγμή t_1 , είναι

$$v_K = v_{\max} \sin \phi_K = v_{\max} \sin \frac{3\pi}{4} \Rightarrow v_K = -v_{\max} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_A = v_{\max} \sin \phi_A = v_{\max} \sin 0 \Rightarrow v_A = v_{\max}$$

και ο λόγος K_K/K_A των κινητικών ενεργειών των δύο σημείων είναι ίσος με

$$\frac{K_K}{K_A} = \frac{\frac{1}{2}mv_K^2}{\frac{1}{2}mv_A^2} = \frac{\left(-v_{\max} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{v_{\max}^2} \Rightarrow \frac{K_K}{K_A} = \frac{1}{2}$$

10.B.57 β.

Το κύμα θα φτάσει στο σημείο Λ τη στιγμή $t_\Lambda = \frac{|x_\Lambda|}{v} = \frac{2\lambda}{v} = 2T$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης. Έπειτα, για να μηδενισθεί η ταχύτητά του για 2^η φορά απαιτείται ακόμα χρονικό διάστημα $3T/4$. Άρα η χρονική στιγμή είναι $t_1 = 2T + 3T/4 = 11T/4$.

Το κύμα, τη στιγμή t_1 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση

$$x_1 = -vt_1 = -v \frac{11T}{4} = -\frac{11\lambda}{4} \Rightarrow x_1 = -(2\lambda + \frac{3}{4}\lambda)$$

Σε κάθε λ υπάρχουν δύο σημεία που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους. Επίσης, όταν ένα κύμα έχει διαδοθεί κατά $3\lambda/4$ υπάρχουν ήδη δύο σημεία που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους. Άρα, τα σημεία της χορδής που έχουν ταχύτητα μέγιστου μέτρου, δηλαδή έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια, είναι 6.

10.B.58 γ.

Από το διάγραμμα και την εξίσωση της φάσης για $x=0m$ προκύπτει για τα δύο κύματα:

$$\phi_A = 2\pi \left(\frac{t_1}{T_A} - \frac{x}{\lambda_A} \right) \Rightarrow \phi_A = 2\pi \frac{t_1}{T_A} \quad (1)$$

$$\phi_B = 2\pi \left(\frac{t_1}{T_B} - \frac{x}{\lambda_B} \right) \Rightarrow \phi_B = 2\pi \frac{t_1}{T_B} \quad (2)$$

$$\varphi_B = 2\varphi_A \Rightarrow 2\pi \frac{t_1}{T_B} = 2 \cdot 2\pi \frac{t_1}{T_A} \Rightarrow T_A = 2T_B$$

Για τις μέγιστες ταχύτητες ισχύει

$$v_{\max B} = \omega_B A = \frac{2\pi}{T_B} A = \frac{2\pi}{\frac{T_A}{2}} A \Rightarrow v_{\max B} = 2v_{\max A}$$

10.B.59 α.

Το κύμα φτάνει στο σημείο με θέση x_M τη στιγμή $t_1 = \frac{x_M}{v}$.

Από το διάγραμμα και την εξίσωση της φάσης για $t=3t_1$ προκύπτει

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = 2\pi \left(\frac{3t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{3t_1}{T} - \frac{vt_1}{vT} \Rightarrow t_1 = \frac{5T}{12}$$

Τη στιγμή t_1 η πηγή του κύματος, $x=0m$, έχει απομάκρυνση

$$y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin 2\pi \frac{12}{T} = A \sin \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{A}{2}$$

10.B.60 γ.

Ελέγχουμε μέχρι πού έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή $t_1=5T/3$

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{\varphi=0 \text{ rad}, t=5T/3} x_{\max} = \frac{5}{3}\lambda$$

Άρα, τη στιγμή $t_1=5T/3$ το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από τα σημεία Μ, Λ.

Η ταχύτητα των δύο σημείων τη στιγμή t_1 , είναι

$$v_M = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2} \right) = v_{\max} \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow v_M = \frac{v_{\max}}{2}$$

$$v_\Lambda = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4} \right) = v_{\max} \sin \frac{5\pi}{6} \Rightarrow v_M = -\frac{v_{\max} \sqrt{3}}{2}$$

και ο λόγος K_M/K_Λ των κινητικών ενεργειών των δύο σημείων είναι ίσος με

$$\frac{K_M}{K_\Lambda} = \frac{\frac{1}{2}mv_M^2}{\frac{1}{2}mv_\Lambda^2} = \frac{\left(\frac{v_{\max}}{2}\right)^2}{\left(-\frac{v_{\max}\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{K_M}{K_\Lambda} = \frac{1}{3}$$

10.B.61 γ.

Α' τρόπος

Από την εξίσωση του αρμονικού κύματος προκύπτει η απομάκρυνση του σημείου Λ τη στιγμή t_1

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right) = A\eta\mu \frac{5\pi}{3} \Rightarrow y_1 = -A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Εκείνη τη στιγμή η ταχύτητά του είναι θετική, γιατί

$$v_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = v_{\max} \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right) = v_{\max} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{3} \Rightarrow v_1 = \frac{v_{\max}}{2}$$

Από τη σχέση των δυναμικών ενεργειών προκύπτει

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{1}{2}Dy_1^2}{\frac{1}{2}Dy_2^2} = \frac{y_1^2}{y_2^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\left(-\frac{A\sqrt{3}}{2}\right)^2}{y_2^2} \Rightarrow y_2^2 = A^2 \Rightarrow y_2 = \pm A$$

Δεκτή είναι η θέση $y_2=A$, γιατί η στιγμή t_2 είναι η πρώτη στιγμή μετά την t_1 που ισχύει $U_1/U_2=3/4$ και το σημείο Λ τη στιγμή t_1 είχε θετική ταχύτητα.

Από την εξίσωση του κύματος προκύπτει η στιγμή t_2

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow A = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{5}{3}\right) \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{5}{3}\right) = 1 = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{5}{3}\right) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=1} 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{5}{3}\right) = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{t_2}{T} - \frac{5}{3} = \frac{5}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{35}{12}T$$

Για $\kappa=0$ προκύπτει χρονική στιγμή μικρότερη από την t_1 .

Β' τρόπος

Βρίσκουμε τη φάση του σημείου Λ τη στιγμή t_1

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

Άρα, τη στιγμή t_1 το σημείο Λ βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς, έχει αρνητική απομάκρυνση και θετική ταχύτητα.

Η απομάκρυνσή του είναι

$$y_1 = A \eta \mu \frac{5\pi}{3} = -A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Από τη σχέση των δυναμικών ενεργειών προκύπτει η απομάκρυνση του Λ τη στιγμή t_2 για να ισχύει $U_1/U_2=3/4$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{1}{2} D y_1^2}{\frac{1}{2} D y_2^2} = \frac{y_1^2}{y_2^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\left(-\frac{A\sqrt{3}}{2}\right)^2}{y_2^2} \Rightarrow y_2^2 = A^2 \Rightarrow y_2 = \pm A$$

Επειδή τη στιγμή t_1 το Λ βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, συμπληρώνοντας μία ταλάντωση, η 1^η στιγμή που $y_2 = \pm A$, θα είναι όταν το Λ βρεθεί στην θετική ακραία απομάκρυνση, $y_2 = +A$. Στη θέση αυτή θα έχει αποκτήσει φάση $\phi_2=2\pi+\pi/2$, οπότε από την εξίσωση της φάσης έχουμε

$$\phi_2 = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \Rightarrow 2\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{5}{3} \right) \Rightarrow \frac{5\pi}{2} = 2\pi \frac{t_2}{T} - \frac{10\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{35}{12} T$$

10.B.62 α.

Από τις επιταχύνσεις των δύο σημείων προκύπτει η απομάκρυνσή τους

$$\alpha = \frac{\alpha_{\max}}{2} \Rightarrow -\omega^2 y = \frac{\omega^2 A}{2} \Rightarrow y = -\frac{A}{2}$$

Από τη θέση που έχει διαδοθεί το κύμα, προκύπτει η στιγμή t_1

$$x_1 = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow v t_1 = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{3\lambda}{2v} = \frac{3T}{2}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνει τις θέσεις των δύο σημείων

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow -\frac{A}{2} = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \eta \mu 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

$$2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{\kappa=1} 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{7\lambda}{12}$$

$$(2) \xrightarrow{\kappa=0} 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x_2}{\lambda} \right) = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{11\lambda}{12}$$

και η απόσταση των δύο σημείων είναι

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{11\lambda}{12} - \frac{7\lambda}{12} = \frac{\lambda}{3}$$

10.B.63 β.

Τη στιγμή t_1 που μηδενίζεται η φάση, το κύμα έχει φτάσει στη θέση x_A , άρα

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow 0 = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \Rightarrow t_1 = x_A \frac{T}{\lambda} = \frac{x_A}{v} \quad (1)$$

και τη στιγμή t_2 που μηδενίζεται η φάση, το κύμα έχει φτάσει στη θέση x_B , άρα

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow 0 = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \Rightarrow t_2 = x_B \frac{T}{\lambda} = \frac{x_B}{v} \quad (2)$$

Επειδή $x_B = 1,5x_A$ οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν

$$x_B = 1,5x_A \Rightarrow vt_2 = 1,5vt_1 \Rightarrow t_2 = 1,5t_1$$

Το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_3 - t_2$ ισούται με $T/4$, αφού το σημείο Β ξεκινάει από τη θέση ισορροπίας και φτάνει σε ακραία θέση, όπου μηδενίζεται η ορμή του. Άρα

$$t_3 - t_2 = \frac{T}{4} \Rightarrow 2t_1 - 1,5t_1 = \frac{T}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2} \Rightarrow t_3 = T$$

και τη στιγμή t_3 η φάση της πηγής του κύματος, $x=0m$, ισούται με

$$\varphi_0 = 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \frac{T}{T} \Rightarrow \varphi_0 = 2\pi \text{ rad}$$

10.B.64 i. α. ii. β. iii. β.

i. Τα σημεία Μ και Λ θα έχουν ελάχιστη απόσταση τη χρονική στιγμή t_2 , όταν θα έχουν την ίδια απομάκρυνση $y_M = y_L$. Αυτή η απόσταση θα είναι όση είναι η απόσταση των θέσεων ισορροπίας τους

$$d_{\min} = \Delta x = x_L - x_M = 2\lambda - 3\lambda/4 = 5\lambda/4$$

ii. Από τη θέση στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα, προκύπτει η στιγμή t_1

$$x_1 = 2\lambda \Rightarrow v t_1 = 2\lambda \Rightarrow t_1 = \frac{2\lambda}{v} = 2T$$

Για να συμβεί η ισότητα $y_M = y_\Lambda$, πρέπει το M, κατεβαίνοντας, να έχει αρνητική ταχύτητα και το Λ, ανεβαίνοντας να έχει θετική ταχύτητα. Άρα $v_M = -v_\Lambda$. Είναι

$$y_M = y_\Lambda \Rightarrow A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \xrightarrow{v_M = -v_\Lambda} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) = 2\kappa\pi + \pi - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda} \right) = 2\kappa\pi + \pi - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2\lambda}{\lambda} \right) \Rightarrow 4 \frac{t}{T} = 2\kappa + 6,5 \Rightarrow t = (2\kappa + 6,5) \frac{T}{4}$$

Πρέπει η στιγμή t_2 να είναι αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 2T$, άρα πρέπει $\kappa = 1$ και προκύπτει

$$t_2 = \frac{8,5T}{4} = \frac{17T}{8}$$

iii. Οι απομακρύνσεις των δύο σημείων θα είναι

$$y_M = y_\Lambda = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{17T/8}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda} \right) = A \eta \mu 2\pi \frac{11}{8} = A \eta \mu \frac{11\pi}{4} \Rightarrow$$

$$y_M = y_\Lambda = A \eta \mu \frac{3\pi}{4} = A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10.B.65 α.

Από το σχήμα $0,4m = 2\lambda$ ή $\lambda = 0,2m$ και $t_1 = 2T$ ή $T = 1s$.

Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, άρα πρώτο αρχίζει να ταλαντώνεται το M γιατί είναι πλησιέστερα στο O και το Λ θα αρχίσει να ταλαντώνεται μετά από το M κατά

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\lambda}{\lambda/T} \Rightarrow \Delta t = T = 1s.$$

10.B.66 β.

Η απομάκρυνση των δύο σημείων τη στιγμή t_1 , είναι:

$$y_A = A \eta \mu \phi_A = A \eta \mu \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y_A = \frac{A\sqrt{3}}{2}$$

$$y_B = A \eta \mu \phi_B = A \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_B = A$$

και ο λόγος των επιταχύνσεων των σημείων A, B, τη στιγμή t_1 , είναι

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{-\omega^2 y_A}{-\omega^2 y_B} = \frac{\frac{A\sqrt{3}}{2}}{A} \Rightarrow \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10.B.67 α.

Επειδή την $t=0\text{s}$, $y=+A$, το σημείο Ο έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad, άρα η φάση ενός σημείου του μέσου στο οποίο έχει διαδοθεί το κύμα είναι

$$\varphi_M = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2}$$

Αντικαθιστώντας $\varphi=0\text{rad}$, $t=0\text{s}$ βρίσκουμε ότι το κύμα τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ έχει προχωρήσει κατά $\lambda/4$. Μετά από $1T$ θα έχει προχωρήσει ακόμη 1λ και θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $\lambda+\lambda/4$.