

Θέματα Β

12.B.1 γ.

Από το διάγραμμα που έχει δοθεί προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ είναι $|A'_M| = A$, οπότε από τον τύπο του πλάτους ταλάντωσης ενός σημείου του στάσιμου που απέχει x από κοιλιά έχουμε

$$|A'| = A \Rightarrow 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} \right| = A \Rightarrow \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} = \sin \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) \xrightarrow{\kappa=0} x_M = \pm \frac{\lambda}{6} \\ \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} = \sin \left(\pm \frac{2\pi}{3} \right) \xrightarrow{\kappa=0} x_M = \pm \frac{2\lambda}{6} \end{cases}$$

Άρα το Μ απέχει ή $\lambda/6$ ή $\lambda/3$ από κοιλιά. Η 2^η περίπτωση όμως ισοδυναμεί με την 1^η, αφού 2 κοιλίες απέχουν μεταξύ τους κατά $\lambda/4$.

12.B.2 β.

Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\lambda/2$ και η απόσταση μεταξύ μιας κοιλιάς και ενός δεσμού $\lambda/4$, άρα $L = N \lambda/2 + \lambda/4$.

12.B.3 β.

Όλα τα σημεία βρίσκονται στις ακραίες τους θέσεις, οπότε έχουν τη μέγιστη δυναμική τους ενέργεια, $U = \frac{1}{2} Dy^2 = \frac{1}{2} DA'^2$

με τα σημεία στις θέσεις $x=0m$, $x=\lambda/2$, $x=\lambda$, που είναι δεσμοί, να έχουν μηδενική δυναμική ενέργεια και τα υπόλοιπα να έχουν μέγιστη δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από την απόστασή τους από μία κοιλιά.

12.B.4 β.

Στο στιγμιότυπο που δίνεται τα υλικά σημεία του μέσου διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, οπότε έχουν ταχύτητες μέγιστου μέτρου

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\omega A')^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A'^2$$

με τα σημεία στις θέσεις $x=0m$, $x=\lambda/2$, $x=\lambda$, που είναι δεσμοί, να έχουν μηδενική κινητική ενέργεια και τα υπόλοιπα να έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια που εξαρτάται από την απόστασή τους από μία κοιλιά.

12.B.5 β.

Οι κοιλίες έχουν πλάτος ταλάντωσης $2A$ και ενέργεια ταλάντωσης

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2} D (2A)^2$$

Στο στιγμιότυπο οι κοιλίες βρίσκονται σε απομάκρυνση μέτρου A , άρα έχουν δυναμική ενέργεια ταλάντωσης

$$U = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{U_{\max}}{4}$$

Από την αρχή διατήρησής της ενέργειας προκύπτει ότι για κάθε σημείο

$$K = U_{\max} - U = \frac{3}{4} U_{\max} \Rightarrow K = 3U$$

Η σχέση αυτή μπορεί να ικανοποιείται μόνο στο διάγραμμα β.

12.B.6 β.

Η μέγιστη ταχύτητα μιας κοιλίας πριν και μετά τη μεταβολή δίνεται από τις σχέσεις:

$$v_{\max 1} = \omega_1 |A'|, \quad v_{\max 2} = \omega_2 |A'|$$

Επειδή το πλάτος τους παραμένει σταθερό είναι

$$v_{\max 2} < v_{\max 1} \Rightarrow \omega_2 < \omega_1 \Rightarrow f_2 < f_1$$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων παραμένει σταθερή, οπότε από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε $v_1 = v_2 \Rightarrow \lambda_2 f_2 = \lambda_1 f_1 \xrightarrow{f_2 < f_1} \lambda_2 > \lambda_1$

Αφού αυξάνεται η απόσταση $\lambda/2$ μεταξύ των διαδοχικών δεσμών, ελαττώνεται ο αριθμός των ατράκτων που χωρούν στη χορδή, άρα ελαττώνεται και ο αριθμός των δεσμών που σχηματίζονται.

12.B.7 α.

Η απόσταση $\lambda/6$ είναι μικρότερη από $\lambda/2$ που είναι η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών δεσμών. Άρα, αν τα δύο σημεία βρίσκονται από την ίδια πλευρά ενός δεσμού έχουν διαφορά φάσης 0 rad , ενώ αν βρίσκονται εκατέρωθεν του δεσμού θα έχουν διαφορά φάσης $\pi \text{ rad}$.

12.B.8 i. α. ii. α.

i. Η συμφωνία ή αντίθεση φάσης μεταξύ δύο σημείων ενός στάσιμου βρίσκεται από το πρόσημο του A' :

$$A'_1 = 2A \cdot \sin \frac{2\pi\lambda/6}{\lambda} = 2A \cdot \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow A'_1 = A$$

$$A'_2 = 2A \cdot \sin \frac{2\pi\lambda/2}{\lambda} = 2A \cdot \sin \pi \Rightarrow A'_2 = -2A$$

Αφού οι δύο όροι έχουν αντίθετα πρόσημα, τα σημεία είναι σε αντίθεση φάσης, καθώς από τις εξισώσεις ταλάντωσης των δύο σημείων προκύπτει ότι έχουν διαφορά φάσης π rad

$$y_1 = A'_1 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t = A\eta\mu \frac{2\pi}{T} t$$

$$y_2 = A'_2 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t = -2A\eta\mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow y_2 = 2A\eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t + \pi \right)$$

Άρα τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

ii. Το πλάτος της ταλάντωσης του κάθε σημείου είναι:

$$|A'_1| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'_1| = A$$

$$|A'_2| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x_2}{\lambda} \right| = 2A |\sin \pi| \Rightarrow |A'_2| = 2A$$

άρα το M_2 έχει μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

12.B.9 β.

Στα δύο άκρα της χορδής υπάρχουν δεσμοί, οπότε στην 1^η περίπτωση που κατά μήκος της χορδής έχουν σχηματιστεί συνολικά 4 δεσμοί, υπάρχουν μεταξύ αυτών 3 άτρακτοι, άρα

$$L = 3 \frac{\lambda_1}{2} \quad (1)$$

Στη 2^η περίπτωση οι δεσμοί είναι συνολικά 5 και οι άτρακτοι 4, οπότε

$$L = 4 \frac{\lambda_2}{2} \quad (2)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των λ_1 και λ_2

$$4 \frac{\lambda_2}{2} = 3 \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{4} \lambda_1 \quad (3)$$

Στη συχνότητα f_1 , από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, αντιστοιχεί ένα μήκος κύματος λ_1 , και στη συχνότητα f_2 ένα μήκος κύματος λ_2 . Η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια οπότε έχουμε

$$\lambda_2 f_2 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow \frac{3}{4} \lambda_1 f_2 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{4}{3}$$

12.B.10 i. α. ii. α.

i. Για να εφαρμόσουμε τη σχέση $A' = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ (1)

πρέπει οι αποστάσεις να μετράνε από κοιλία, οπότε αν θεωρήσουμε $x=0\text{m}$ την κοιλία που βρίσκεται αριστερά του δεσμού που αναφέρεται στην εκφώνηση, για τις θέσεις των δύο σημείων έχουμε

$$x_1 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{3}$$

$$x_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{5\lambda}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{7\lambda}{8}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$A'_1 = 2A \cdot \sin \frac{2\pi \lambda / 3}{\lambda} = 2A \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A'_1 = -A$$

$$A'_2 = 2A \cdot \sin \frac{2\pi 7\lambda / 8}{\lambda} = 2A \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \Rightarrow A'_2 = A\sqrt{2}$$

Αφού οι δύο όροι έχουν αντίθετα πρόσημα, τα σημεία είναι σε αντίθεση φάσης, καθώς από τις εξισώσεις ταλάντωσης των δύο σημείων προκύπτει ότι έχουν διαφορά φάσης $\pi \text{ rad}$.

Άρα τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

ii. Το πλάτος της ταλάντωσης του κάθε σημείου είναι

$$|A'_1| = A \text{ και } |A'_2| = A\sqrt{2}$$

και το M_2 έχει μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

12.B.11 i. α. ii. β.

i. Από τη σύγκριση με τη γενική εξίσωση του στάσιμου κύματος έχουμε:

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \frac{\pi x}{10} \Rightarrow \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda = 20\text{cm}$$

$$\eta\mu\omega t = \eta\mu 50\pi t \Rightarrow 2\pi f = 50\pi \Rightarrow f = 25\text{Hz}$$

Άρα δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν μεταξύ τους $\lambda/2=10\text{cm}$.

ii. Μια κοιλία περνά από τη θέση ισορροπίας της 50 φορές το δευτερόλεπτο, αφού σε κάθε ταλάντωση περνάει 2 φορές.

12.B.12 α.

Η συμφωνία ή αντίθεση φάσης μεταξύ δύο σημείων ενός στάσιμου βρίσκεται από το πρόσημο του A' :

$$A'_1 = 5 \cdot \sin \frac{\pi 10}{5} \text{ cm} = 5 \cdot \sin 2\pi \text{ cm} \Rightarrow A'_1 = 5 \text{ cm}$$

$$A'_2 = 5 \cdot \sin \frac{\pi 25}{5} \text{ cm} = 5 \cdot \sin (24\pi + \pi) \text{ cm} \Rightarrow A'_2 = -5 \text{ cm}$$

Άρα οι δύο κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

12.B.13 α.

Το πλάτος ταλάντωσης του M είναι

$$|A'_M| = 2A \cdot \sin \frac{2\pi 9\lambda / 8}{\lambda} = 2A \cdot \sin \frac{9\pi}{4} = 2A \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |A'_M| = A\sqrt{2}$$

και η μέγιστη ταχύτητά του

$$v_{\max} = \omega |A'_M| = \frac{2\pi A\sqrt{2}}{T}$$

12.B.14 β.

Στα δύο άκρα της χορδής υπάρχουν δεσμοί, οπότε όταν σχηματιστούν συνολικά N δεσμοί για το μήκος L της χορδής έχουμε

$$L = (N-1) \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{\lambda=v/f} L = (N-1) \frac{v}{2f} \quad \text{με } N=2, 3, \dots$$

Με συχνότητα f_1 έχουμε $N_1=5$ δεσμούς, άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$L = (N_1-1) \frac{v}{2f_1} \quad (1)$$

Στην ίδια χορδή με συχνότητα f_2 έχουμε N_2 δεσμούς

$$L = (N_2-1) \frac{v}{2f_2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$(N_2 - 1) \frac{v}{2 \cdot 2f_1} = (N_1 - 1) \frac{v}{2f_1} \Rightarrow N_2 - 1 = 2(N_1 - 1) \Rightarrow N_2 = 2N_1 - 1 \Rightarrow N_2 = 9 \text{ δεσμοί}$$

12.B.15 γ.

Οι θέσεις των δεσμών από την 1^η κοιλία στο στάσιμο υπολογίζονται από τη σχέση

$$x_{\Delta} = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } 4^{\text{ος}} \text{ δεσμός για } \kappa=3: x_1 = (2\kappa + 1) \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{7\lambda_1}{4}$$

$$2^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } 2^{\text{ος}} \text{ δεσμός για } \kappa'=1: x_1 = (2\kappa' + 1) \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3\lambda_2}{4}$$

Από τον συνδυασμό των δύο σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{7\lambda_1}{4} = \frac{3\lambda_2}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{7}{3} \lambda_1$$

$$\text{η οποία με τη βοήθεια της } v = \lambda f \text{ δίνει } f_2 = \frac{3}{7} f_1.$$

Το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας είναι

$$\pi\% = \frac{f_2 - f_1}{f_1} 100\% = \frac{(3f_1 / 7) - f_1}{f_1} 100\% \Rightarrow \pi\% = -\frac{400}{7}\%$$

12.B.16 β.

Το σημείο Μ απέχει $3\lambda/8$ από την 1^η κοιλία και η απομάκρυνσή του δίνεται από τη σχέση

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi \frac{3\lambda}{8}}{\lambda} \cdot \eta \mu \omega t = 2A \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow y = 2A \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \eta \mu \omega t \Rightarrow$$

$$y = A\sqrt{2} \eta \mu (\omega t + \pi)$$

Η ταχύτητά του με τον χρόνο είναι

$$v = \omega A \sqrt{2} \sigma \nu (\omega t + \pi), (S.I.) \text{ ή } v = 2\pi f A \sqrt{2} \sigma \nu (\omega t + \pi)$$

και το σωστό διάγραμμα είναι το (II).

12.B.17 β.

Το μήκος κύματος λ , των κυμάτων που συμβάλλουν και το μήκος της χορδής, L , συνδέονται με τη σχέση

$$L = \kappa \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Παίρνοντας υπόψη τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $u = \lambda f$, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$L = (2\kappa + 1) \frac{u}{4f} \Rightarrow f = \frac{(2\kappa + 1)u}{4L} = \frac{(2\kappa + 1)4}{4 \cdot 2} \text{ Hz} \Rightarrow f = \left(\frac{2\kappa + 1}{2} \right) \text{ Hz}$$

Άρα, οι επιτρεπτές τιμές συχνοτήτων είναι:

$$\kappa = 0, f = 0,5 \text{ Hz}$$

$$\kappa = 1, f = 1,5 \text{ Hz}$$

$$\kappa = 2, f = 2,5 \text{ Hz}$$

$$\kappa = 3, f = 3,5 \text{ Hz}$$

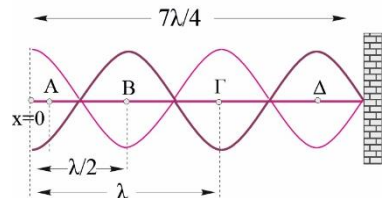
12.B.18 γ.

Το σημείο Α απέχει οριζόντια $\lambda/12$ από το σημείο Ο, $x_0 = 0 \text{ m}$, και έχει πλάτος

$$|A'_A| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi \lambda / 12}{\lambda} \right| = 2A \cdot \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow |A'_A| = A\sqrt{3}$$

Το σημείο Δ απέχει οριζόντια $3\lambda/2$ από το σημείο Ο και έχει πλάτος $2A$, άρα ο λόγος των ταχυτήτων είναι

$$\frac{v_{A(\max)}}{v_{\Delta(\max)}} = \frac{\omega |A'_A|}{\omega |A'_\Delta|} = \frac{A\sqrt{3}}{2A} \Rightarrow \frac{v_{A(\max)}}{v_{\Delta(\max)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**12.B.19 β.**

Η μέγιστη ταχύτητα ενός σημείου δίνεται από τη σχέση

$$v_{\max} = \omega |A'| \quad (1)$$

Θα βρούμε τα πλάτη ταλάντωσης των δύο σημείων από τη σχέση

$$|A'| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \quad (2)$$

Στη σχέση αυτή το x μετρά από κοιλία, οπότε για τις αποστάσεις των δύο σημείων από κοιλία έχουμε:

$$x_K = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_K = \frac{\lambda}{12}$$

$$x_A = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_A = \frac{\lambda}{3}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$|A'_K| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi\lambda/12}{\lambda} \right| = \left| 2A \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right| \Rightarrow |A'_K| = A\sqrt{3}$$

$$|A'_A| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi\lambda/3}{\lambda} \right| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'_A| = A$$

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\frac{v_K}{v_A} = \frac{\omega |A'_K|}{\omega |A'_A|} = \sqrt{3}$$

12.B.20 γ.

Το σημείο Ο είναι κοιλία που για $t=0s$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για αυτό είναι

$$y_O = 2A \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην απομάκρυνση που δίνεται στο διάγραμμα, για τη την $t=T/8$ παίρνουμε

$$0,1\sqrt{2} \text{ m} = 2A \cdot \eta\mu \frac{2\pi T}{T 8} = 2A \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0,1\sqrt{2} \text{ m} = A\sqrt{2} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Η απόσταση $x_B = \lambda/8$ είναι από κοιλία, οπότε το πλάτος του σημείου Β είναι

$$|A'_B| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi\lambda/8}{\lambda} \right| = \left| 2A \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right| \Rightarrow |A'_B| = A\sqrt{2} \Rightarrow |A'_B| = 0,1\sqrt{2} \text{ m}$$

12.B.21 γ.

Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου στο στάσιμο κύμα βρίσκεται από τη σχέση

$$|A'| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right|, \text{ με το } x \text{ να μετρά από κοιλία.}$$

Αν θεωρήσουμε ως $x=0\text{m}$ την κοιλία που βρίσκεται αριστερά του 3ου δεσμού, τότε το Μ θα απέχει από αυτήν

$$x_M = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_M = \frac{\lambda}{3} \text{ και θα έχει πλάτος}$$

$$|A'| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi\lambda/3}{\lambda} \right| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'| = A$$

12.B.22 β.

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας ισούται με $T/2$, οπότε

$$\Delta t = T/2 = 2s \Rightarrow T = 4s$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT = 0,5 \frac{m}{s} \cdot 4s \Rightarrow \lambda = 2m$$

Από το στιγμιότυπο του στάσιμου που έχει δοθεί έχουμε

$$L = 4 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow L = 4m$$

12.B.23 γ.

Στα άκρα της χορδής δημιουργούνται δεσμοί, οπότε το μήκος L της χορδής θα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\lambda/2$

$$L = \kappa \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{\lambda=vT} L = \kappa \frac{vT}{2} \Rightarrow T = \frac{2L}{\kappa v} \quad (1)$$

Αφού για περίοδο T_1 το στάσιμο έχει 6 κοιλίες, έχουμε

$$L = 6 \frac{\lambda_1}{2} \xrightarrow{\lambda_1=vT_1} L = 6 \frac{vT_1}{2} \Rightarrow v = \frac{L}{3T_1}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε

$$T = \frac{2L}{\kappa L / 3T_1} \Rightarrow T = \frac{6T_1}{\kappa}$$

Η περίοδος μεγιστοποιείται όταν το κ παίρνει τη μικρότερη τιμή του, που είναι το 1, άρα $T_{\max} = 1,2s$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Εφόσον στη χορδή δημιουργούνται 6 κοιλίες και τα άκρα της είναι δεσμοί, το μήκος L της χορδής θα ισούται με

$$L = 6 \frac{\lambda_1}{2} \xrightarrow{\lambda_1=vT_1} L = 6 \frac{vT_1}{2} \quad (1)$$

Αν μεγιστοποιηθεί η περίοδος, θα μεγιστοποιηθεί και το μήκος κύματος, $\lambda = vT$, άρα στη χορδή θα δημιουργηθεί μία άτρακτος μισού μήκους κύματος και το μήκος της χορδής θα είναι

$$L = \frac{\lambda_{\max}}{2} = \frac{vT_{\max}}{2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$L = 6 \frac{vT_1}{2} = \frac{vT_{\max}}{2} \Rightarrow T_{\max} = 6T_1 = 1,2s$$

12.B.24 α.

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων μηδενισμού της έντασης αντιστοιχεί σε δύο διαδοχικούς δεσμούς, οπότε $\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 0,5m \Rightarrow \lambda = 1m$

και από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340m/s}{1m} \Rightarrow f = 340Hz$$

12.B.25 γ.

Η μέγιστη ταχύτητα ενός σημείου δίνεται από τη σχέση

$$v_{\max} = \omega |A'| \quad (1)$$

Η γωνιακή συχνότητα ισούται με

$$T/8 = 0,25s \Rightarrow T = 2s \text{ και } \omega = 2\pi/T = \pi \text{ rad/s}$$

Πρέπει να βρούμε το πλάτος του σημείου της θέσης $x=8m$.

Το σημείο της θέσης $x=0m$ είναι κοιλία που για $t=0s$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για αυτό είναι

$$y_0 = 2A \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$$

Με αριθμητική αντικατάσταση για την $t=T/8$ παίρνουμε

$$5 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 2A \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \frac{T}{8} = 2A \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = A\sqrt{2} \Rightarrow A = 2,5 \text{ cm}$$

Η απόσταση του σημείου της θέσης $x=8m$ είναι από κοιλία, οπότε το πλάτος του σημείου είναι

$$|A'| = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi 8}{8} \right| = |2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi| \Rightarrow |A'| = 2A \Rightarrow |A'| = 5 \text{ cm}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε $v_{\max} = 5\pi \text{ cm/s}$.

12.B.26 γ.

Ανάμεσα στους 7 δεσμούς δημιουργούνται 6 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και από την πρώτη κοιλία στον πρώτο δεσμό υπάρχει απόσταση $\lambda/4$, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$d = 6 \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{13\lambda}{4}$$

12.B.27 γ.

Οι θέσεις των δεσμών δίνονται από τη σχέση

$$x_{\Delta} = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Για τους δεσμούς ανάμεσα στα σημεία Μ και Λ ισχύει

$$x_M < x_{\Delta} < x_L \Rightarrow 7\lambda < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} < 11,5\lambda \Rightarrow 28 < 2\kappa + 1 < 46 \Rightarrow$$

$$27 < 2\kappa < 45 \Rightarrow 13,5 < \kappa < 22,5$$

Άρα, υπάρχουν 9 δεσμοί που αντιστοιχούν στις τιμές του κ από 14 έως 22.

12.B.28 α.

Από τη σχέση του πλάτους έχουμε

$$|A'| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \Rightarrow A\sqrt{3} = \pm 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) \quad (1) \\ \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \left(\pm \frac{5\pi}{6} \right) \quad (2) \end{array} \right.$$

Από τις δύο εξισώσεις, αυτή που δίνει τη ζητούμενη λύση είναι η (1) για $\kappa=2$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \kappa\lambda \pm \frac{\lambda}{12}$$

Για $\kappa=2$ στη σχέση των κοιλιών $x_{\kappa} = \kappa\lambda/2$, έχουμε την κοιλία της θέσης $x=2\lambda$, οπότε το κοντινότερο σημείο με πλάτος $|A'| = A\sqrt{3}$ μετά από αυτή την κοιλία βρίσκεται στη θέση

$$x_N = 2\lambda + \frac{\lambda}{12} = \frac{25\lambda}{12}$$

Η 2^η εξίσωση δίνει σημεία με ίδιο πλάτος αλλά πιο μακρινά από την κοιλία της θέσης $x=2\lambda$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \kappa\lambda \pm \frac{5\lambda}{12} \xrightarrow{\kappa=2} x = 2\lambda \pm \frac{5\lambda}{12}$$

12.B.29 α.

Το πλάτος της ταλάντωσης του κάθε σημείου είναι

$$|A'_M| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{16\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'_M| = 2A \left| \sin \frac{4\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'_M| = A$$

$$|A'_\Lambda| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \right| = 2A |\sin 6\pi| \Rightarrow |A'_\Lambda| = 2A$$

και ο λόγος των ενεργειών τους είναι

$$\frac{E_M}{E_\Lambda} = \frac{\frac{1}{2} D |A'_M|^2}{\frac{1}{2} D |A'_\Lambda|^2} = \frac{A^2}{(2A)^2} \Rightarrow \frac{E_M}{E_\Lambda} = \frac{1}{4}$$

12.B.30 β.

Η απόσταση των θέσεων ισορροπίας δύο διαδοχικών κοιλιών είναι $\Delta x = \lambda/2 = 3A$. Στον άξονα της ταλάντωσης, οι δύο κοιλίες έχουν μέγιστη απόσταση $\Delta y = 4A$, όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους. Άρα η μέγιστη απόστασή τους είναι

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3A)^2 + (4A)^2} \Rightarrow d = 5A$$

12.B.31 γ.

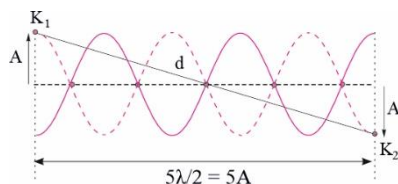
Οι δύο κοιλίες K_1 , K_2 έχουν ανάμεσά τους 5 δεσμούς και 4 κοιλίες, όπως φαίνεται και στο στιγμιότυπο του στάσιμου. Η οριζόντια απόσταση των θέσεων των δύο κοιλιών είναι $\Delta x = 5\lambda/2 = 5A$. Δύο κοιλίες που έχουν ανάμεσά τους περιττό αριθμό δεσμών βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Τη χρονική στιγμή $t = 5T/12$, οι δύο κοιλίες έχουν απομακρύνσεις:

$$y_1 = 2A \eta \mu \frac{2\pi}{T} t = 2A \eta \mu \frac{2\pi}{T} \frac{5T}{12} = 2A \eta \mu \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y_1 = A$$

$$y_2 = -2A \eta \mu \frac{2\pi}{T} t = -2A \eta \mu \frac{2\pi}{T} \frac{5T}{12} = -2A \eta \mu \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y_2 = -A$$

Άρα, στον άξονα της ταλάντωσης, οι δύο κοιλίες έχουν απόσταση $\Delta y = 2A$ και η απόστασή τους είναι

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2A)^2 + (5A)^2} \Rightarrow d = A\sqrt{29}$$

**12.B.32 β.**

Ανάμεσα στους 4 δεσμούς δημιουργούνται 3 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και από την πρώτη κοιλία στον πρώτο δεσμό υπάρχει απόσταση $\lambda/4$, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$d = 3\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{4} = \frac{7\lambda_1}{4} \quad (1)$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, προκύπτει για το νέο μήκος κύματος λ_2

$$v = \lambda_2 f_2 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow \lambda_2 3f_1 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{3}$$

Άρα, η σχέση (1) δίνει

$$d = \frac{7\lambda_1}{4} = \frac{21\lambda_2}{4} = 10\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4}$$

και οι δεσμοί τώρα θα είναι 11, αφού ανάμεσα σε 11 δεσμούς βρίσκονται 10 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και από την πρώτη κοιλία στον πρώτο δεσμό υπάρχει απόσταση $\lambda_2/4$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Αν με N συμβολίσουμε τον συνολικό αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται κατά μήκος της χορδής, τότε το μήκος της L και ο συνολικός αριθμός των δεσμών, N , θα συνδέονται με τη σχέση

$$L = (N-1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{4}\right)\lambda \xrightarrow{\lambda=v/f} L = \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{v}{f}$$

$$\text{Στην 1}^{\text{η}} \text{ περίπτωση } N=N_1=4, \text{ οπότε } L = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{v}{f_1} \quad (1)$$

$$\text{Στην 2}^{\text{η}} \text{ περίπτωση έχουμε } N=N_2 \text{ και οπότε } f_2=3f_1, L = \left(\frac{N_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{v}{3f_1} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε

$$\left(\frac{N_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{v}{3f_1} = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{v}{f_1} \Rightarrow \frac{N_2}{2} - 0,25 = 5,25 \Rightarrow N_2 = 11$$

12.B.33 α.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, $v=\lambda f$, προκύπτει ότι η ελάχιστη συχνότητα αντιστοιχεί στο μέγιστο μήκος κύματος, αφού η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων σε κάποιο μέσο είναι σταθερή.

Όταν το μήκος κύματος γίνει μέγιστο, τότε στη χορδή θα δημιουργηθεί μία άτρακτος μισού μήκους κύματος και το μήκος της χορδής θα είναι $d=\lambda_1/2$ (1)

Αν θέλουμε να δημιουργηθούν 4 κοιλίες στη χορδή θα υπάρχουν σ' αυτή 4 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και θα ισχύει για το μήκος της χορδής $d=4\lambda_2/2$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) και τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει

$$d = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{4\lambda_2}{2} \Rightarrow \frac{v}{2f_1} = \frac{2v}{f_2} \Rightarrow f_2 = 4f_1 = 40\text{Hz}$$

12.B.34 i. α. ii. β.

i. Το πρόσημο του όρου $A' = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ για κάθε σημείο θα μας οδηγήσει στη διαφορά φάσης τους:

$$A'_M = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} = 2A \sin \frac{26\pi}{3} = 2A \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A'_M = -A$$

$$A'_\Lambda = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} = 2A \sin 11\pi = 2A \sin \pi \Rightarrow A'_\Lambda = -2A$$

Αφού είναι και οι δύο όροι αρνητικοί, τα σημεία είναι συμφασικά, καθώς από τις εξισώσεις ταλάντωσης των δύο σημείων προκύπτει ότι έχουν την ίδια φάση

$$y_M = A'_M \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t = -A \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow y_M = A \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t + \pi \right)$$

$$y_\Lambda = A'_\Lambda \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t = -2A \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow y_\Lambda = 2A \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t + \pi \right)$$

ii. Αφού τα δύο σημεία είναι συμφασικά θα φτάνουν ταυτόχρονα στην ακραία θετική τους απομάκρυνση και εκείνη τη στιγμή η απόστασή τους γίνεται μέγιστη.

Η οριζόντια απόσταση των δύο σημείων είναι

$$\Delta x = x_\Lambda - x_M = 5,5\lambda - \frac{13\lambda}{3} = \frac{33\lambda}{6} - \frac{26\lambda}{6} \Rightarrow \Delta x = \frac{7\lambda}{6} = 7A$$

Στον άξονα της ταλάντωσης, στις μέγιστες απομακρύνσεις, τα δύο σημεία έχουν απόσταση $\Delta y = 2A - A = A$ και η μέγιστη απόστασή τους είναι

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(7A)^2 + A^2} \Rightarrow d = A\sqrt{50}$$

12.B.35 β.

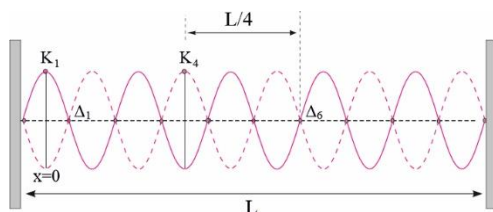
Ανάμεσα στην 4^η κοιλία και τον 6^ο δεσμό μετά το Ο, βρίσκονται 2 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και επιπλέον, από την κοιλία στον επόμενο δεσμό υπάρχει απόσταση $\lambda/4$. Άρα από την απόσταση Δx προκύπτει το μήκος της χορδής

$$\Delta x = \frac{L}{4} \Rightarrow 2 \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{L}{4} \Rightarrow L = 5\lambda = 10 \frac{\lambda}{2}$$

Άρα θα υπάρχουν στη χορδή 10 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και κατά συνέπεια 10 κοιλίες.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Η 4^η κοιλία βρίσκεται στη θέση



$$x_K = \kappa \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{\kappa=3} x_K = 3 \frac{\lambda}{2}$$

Ο 6^{ος} δεσμός βρίσκεται στη θέση

$$x_\Delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \xrightarrow{\kappa=5} x_\Delta = 11 \frac{\lambda}{4}$$

Άρα, για τη μεταξύ τους απόσταση έχουμε

$$\Delta x = \frac{L}{4} \Rightarrow x_\Delta - x_K = \frac{L}{4} \Rightarrow \frac{11\lambda}{4} - \frac{3\lambda}{2} = \frac{L}{4} \Rightarrow \frac{5\lambda}{4} = \frac{L}{4} \Rightarrow L = 5\lambda = 10 \frac{\lambda}{2}$$

12.B.36 γ.

Τα σημεία Μ και Λ είναι κοιλίες γιατί $x_M = 3\lambda = 6\lambda/2$ και $x_\Lambda = 11,5\lambda = 23\lambda/2$.

Η απόσταση (ΜΛ) ισούται με

$$(ΜΛ) = x_\Lambda - x_M = 11,5\lambda - 3\lambda = 8,5\lambda = 17 \frac{\lambda}{2}$$

δηλαδή μεταξύ τους δημιουργούνται 16 ολόκληρες άτρακτοι μισού μήκους κύματος και εκατέρωθεν αυτών άλλες δύο μισές, δηλαδή συνολικά 17 άτρακτοι.

Η μέγιστη ταχύτητα των σημείων δίνει το πλάτος τους

$$v_{\max} = \omega |A'| \Rightarrow \omega A = \omega |A'| \Rightarrow |A'| = A$$

Σε κάθε άτρακτο μισού μήκους κύματος υπάρχουν δύο σημεία με πλάτος ίσο με Α, άρα από το Μ μέχρι το Λ υπάρχουν 34 σημεία.

12.B.37 γ.

Οι θέσεις των δεσμών δίνονται από τη σχέση $x_\Delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}$.

Άρα στην 1^η περίπτωση που το μήκος κύματος είναι λ_1 , για το σημείο Κ που είναι ο 4^{ος} δεσμός, ισχύει

$$x_K = (2 \cdot 3 + 1) \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow x_K = \frac{7v}{4f_1} \quad (1)$$

Στη 2^η περίπτωση που το μήκος κύματος είναι λ_2 , για το σημείο Κ είναι

$$x_K = (2 \cdot 4 + 1) \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow x_K = \frac{9v}{4f_2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$x_K = \frac{7v}{4f_1} = \frac{9v}{4f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{9}{7} f_1$$

και το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας είναι

$$\pi\% = \frac{f_2 - f_1}{f_1} 100\% = \frac{\frac{9}{7} f_1 - f_1}{f_1} \Rightarrow \pi\% = \frac{200}{7} \%$$

12.B.38 β.

Το σημείο Ο, είναι κοιλία, άρα έχει πλάτος 2Α. Από τη σχέση των ενεργειών προκύπτει για το Μ

$$E_M = \frac{E_O}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} D |A'_M|^2 = \frac{\frac{1}{2} D |A'_O|^2}{2} \Rightarrow |A'_M|^2 = \frac{|A'_O|^2}{2} \Rightarrow |A'_M| = A\sqrt{2} \Rightarrow A'_M = \pm A\sqrt{2}$$

Επειδή το σημείο Μ είναι σε αντίθεση φάσης με το Ο που έχει τον όρο $A' = 2A$ θετικό, για το Μ ο όρος A' θα είναι αρνητικός, άρα $A'_M = -A\sqrt{2}$, από όπου παίρνουμε τη θέση του Μ

$$A'_M = -A\sqrt{2} \Rightarrow 2A \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} = -A\sqrt{2} \Rightarrow \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi x_M}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (1) \\ \frac{2\pi x_M}{\lambda} = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (2) \end{array} \right.$$

Η εξίσωση (1) για $\kappa=0$ δίνει

$$\frac{2\pi x_M}{\lambda} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x_M = \frac{3\pi}{8}$$

που είναι η αποδεκτή λύση, γιατί η εξίσωση (2) για $\kappa=1$ δίνει

$$\frac{2\pi x_M}{\lambda} = 2\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x_M = \frac{5\lambda}{8}$$

12.B.39 β.

Ανάμεσα στην 1^η κοιλία και στον 3^ο δεσμό μετά το Ο, βρίσκεται 1 άτρακτος μισού μήκους κύματος και επιπλέον, από την κοιλία στον επόμενο δεσμό υπάρχει απόσταση $\lambda/4$. Άρα, η απόσταση των θέσεων ισορροπίας των δύο σημείων είναι $\Delta x = \lambda/2 + \lambda/4 = 3\lambda/4$ κι αυτή είναι και η ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση, $d_{\min} = 3\lambda/4 = 3A/2$, όταν το σημείο Μ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

Η μέγιστη απόσταση των δύο σημείων είναι όταν το Μ βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής του και τότε στον άξονα της ταλάντωσης, τα δύο σημεία έχουν μέγιστη απόσταση $\Delta y = 2A$. Άρα η μέγιστη απόστασή τους είναι

$$d_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{3A}{2}\right)^2 + (2A)^2} \Rightarrow d_{\max} = 2,5A$$

Ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη απόσταση των δύο σημείων ισούται με

$$\frac{d_{\max}}{d_{\min}} = \frac{2,5A}{1,5A} = \frac{5}{3}$$

12.B.40 α.

Αφού στη χορδή δημιουργούνται 4 κοιλίες, δημιουργούνται 3 ολόκληρες άτρακτοι μισού μήκους κύματος και ακόμα μισή από την ανοικτή κοιλία ως τον πρώτο δεσμό, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$L = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{7vT}{4} \quad (1)$$

Για να διαδοθούν τα τρέχοντα κύματα κατά μήκος της χορδής απαιτείται χρόνος ίσος με

$$L = vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$t_1 = \frac{L}{v} = \frac{\frac{7vT}{4}}{v} = \frac{7T}{4} \Rightarrow t_1 = 3,5s$$

12.B.41 α.

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων των τρεχόντων κυμάτων, που έχουν πλάτος A και γωνιακή συχνότητα ω , είναι

$$v_{\max} = \omega A \quad (1)$$

Η μέγιστη επιτάχυνση μιας κοιλίας του στάσιμου ισούται με

$$a_{\max} = \omega^2 |A'| = \omega^2 2A \quad (2)$$

και ο λόγος που ζητείται, θα προκύψει με διαίρεση των σχέσεων (1) και (2)

$$\frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{\omega A}{\omega^2 2A} = \frac{1}{\omega 2} = \frac{1}{\frac{2\pi}{T} 2} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{T}{4\pi}$$

12.B.42 β.

Αφού τα δύο σημεία απέχουν μεταξύ τους $\Delta x = 3\lambda/2$, έχουν αναγκαστικά ανάμεσά τους 3 δεσμούς και βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Άρα, η διαφορά φάσης τους είναι π rad και η μόνη αποδεκτή λύση είναι

$$\Delta\varphi = \pi \text{ rad} \Rightarrow \varphi_B - \varphi_T = \pi \text{ rad} \Rightarrow 2,2\pi \text{ rad} - \varphi_T = \pi \text{ rad} \Rightarrow \varphi_T = 1,2\pi \text{ rad}$$

12.B.43 α.

Αφού στη χορδή δημιουργούνται 3 κοιλίες, δημιουργούνται και 3 άτρακτοι μισού μήκους κύματος, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$L = 3 \frac{\lambda_1}{2} = \frac{3v}{2f_1} \quad (1)$$

Η αμέσως μεγαλύτερη συχνότητα f_2 , σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, $v = \lambda f$, οδηγεί στο αμέσως μικρότερο μήκος κύματος λ_2 και στη χορδή θα δημιουργηθεί μία άτρακτος περισσότερη, οπότε το μήκος της χορδής θα είναι

$$L = 4 \frac{\lambda_2}{2} = \frac{2v}{f_2} \quad (2)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε

$$L = \frac{3v}{2f_1} = \frac{2v}{f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{4f_1}{3} = 40\text{Hz}$$

12.B.44 γ.

Η μέγιστη ταχύτητα ενός σημείου δίνεται από τη σχέση

$$v_{\max} = \omega |A'| \quad (1)$$

Θα βρούμε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου από τη σχέση

$$|A'| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \quad (2)$$

Στη σχέση αυτή το x μετρά από κοιλία, οπότε για την απόσταση του σημείου από κοιλία έχουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το σημείο είναι πριν ή μετά τον δεσμό:

$$x_1 = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{12}$$

$$x_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{5\lambda}{12}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$|A'_1| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi \lambda / 12}{\lambda} \right| = \left| 2A \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right| \Rightarrow |A'_1| = A\sqrt{3}$$

$$|A'_2| = \left| 2A \cdot \sin \frac{2\pi 5\lambda / 12}{\lambda} \right| = \left| 2A \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right| \Rightarrow |A'_2| = A\sqrt{3} = |A'_1|$$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις η σχέση (1) δίνει

$$v_{\max} = \omega |A'| = \omega A\sqrt{3}$$

12.B.45 γ.

Αφού στη χορδή δημιουργούνται 6 δεσμοί, δημιουργούνται 5 άτρακτοι μισού μήκους κύματος, άρα το μήκος της χορδής και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση

$$L = 5 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} L \quad (1)$$

Η μέγιστη επιτάχυνση μιας κοιλίας δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_{\max} = \omega^2 |A'| = \omega^2 2A = (2\pi f)^2 2A = 8\pi^2 f^2 A = 8\pi^2 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^2 A \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max} = 8\pi^2 \left(\frac{v}{\frac{2L}{5}} \right)^2 A \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{50\pi^2 v^2 A}{L^2}$$

12.B.46 α.

Από τη σχέση του πλάτους έχουμε

$$|A'| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \Rightarrow A = \pm 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \frac{\pi}{3} \quad (1) \\ \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \frac{2\pi}{3} \quad (2) \end{array} \right\}$$

Η 1^η εξίσωση δίνει δύο σειρές λύσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi x_1}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = \kappa\lambda + \frac{\lambda}{6} \quad (3) \\ \frac{2\pi x_2}{\lambda} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_2 = \kappa\lambda - \frac{\lambda}{6} \quad (4) \end{array} \right\}$$

Η 2^η εξίσωση δίνει επίσης δύο σειρές λύσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi x_3}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x_3 = \kappa\lambda + \frac{\lambda}{3} \quad (5) \\ \frac{2\pi x_4}{\lambda} = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x_4 = \kappa\lambda - \frac{\lambda}{3} \quad (6) \end{array} \right\}$$

Η μικρότερη απόσταση είναι $\Delta x = x_3 - x_1 = x_2 - x_4 = \lambda/6$.

12.B.47 β.

Στην 1^η περίπτωση ανάμεσα στους 4 δεσμούς δημιουργούνται 3 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και από την πρώτη κοιλία στον πρώτο δεσμό υπάρχει απόσταση $\lambda/4$, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$L = 3 \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{4} = \frac{7\lambda_1}{4} \Rightarrow L = \frac{7vT_1}{4} \quad (1)$$

Αν μεγαλώσει η περίοδος, θα μεγαλώσει και το μήκος κύματος, $\lambda = vT$, άρα στη χορδή θα δημιουργηθεί μία άτρακτος λιγότερο και το μήκος της χορδής θα είναι

$$L = 2 \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} = \frac{5\lambda_2}{4} \Rightarrow L = \frac{5vT_2}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$L = \frac{7vT_1}{4} = \frac{5vT_2}{4} \Rightarrow T_1 = \frac{5}{7}T_2 = 0,6s$$

12.B.48 β.

Αφού στην 1^η περίπτωση στη χορδή δημιουργούνται 5 δεσμοί, δημιουργούνται 4 άτρακτοι μισού μήκους κύματος, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$L = 4 \frac{\lambda_1}{2} = \frac{2v}{f_1} \quad (1)$$

Στη 2^η περίπτωση στη χορδή δημιουργούνται 3 δεσμοί, άρα 2 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και το μήκος της χορδής ισούται με

$$L = 2 \frac{\lambda_2}{2} = \frac{v}{f_2} \quad (2)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε

$$L = \frac{2v}{f_1} = \frac{v}{f_2} \Rightarrow f_1 = 2f_2 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \quad (3)$$

Το πλάτος του σημείου M, που είναι κοιλία, στην 1^η περίπτωση είναι $|A'_1| = 2A$ και στη 2^η περίπτωση που το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων διπλασιάζεται, είναι $|A'_2| = 4A$.

Άρα, ο λόγος της ενέργειας του M στην 1^η, προς την ενέργεια στη 2^η περίπτωση είναι ίσος με

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} m \omega_1^2 |A'_1|^2}{\frac{1}{2} m \omega_2^2 |A'_2|^2} = \frac{(2\omega_2)^2 (2A)^2}{\omega_2^2 (4A)^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 1$$

12.B.49 β.

Αντικαθιστούμε τη χρονική στιγμή $t_1 = 7T/8$ στην εξίσωση της απομάκρυνσης και παίρνουμε

$$y = A' \eta \mu 2\pi \frac{t_1}{T} = A' \eta \mu 2\pi \frac{7}{8} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2} A'$$

Η δυναμική ενέργεια του M εκείνη τη στιγμή είναι

$$U = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} D \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} A' \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} D A'^2 \Rightarrow U = \frac{E_M}{2} \Rightarrow$$

$$U = \frac{U + K}{2} \Rightarrow U = K$$

και ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια του M είναι ίσος με $K/U = 1$.

12.B.50 γ.

Όταν το σημείο O, $x=0m$, έχει απομάκρυνση $y_0 = -A$, είναι

$$y_0 = 2A \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} = -A \Rightarrow \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Την ίδια χρονική στιγμή η απομάκρυνση του M, με χρήση της σχέσης (1), είναι

$$y_M = 2A \cdot \sigma \nu \pi \frac{x_M}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} = 2A \cdot \sigma \nu \pi \frac{4\lambda/3}{\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y_M = -A \cdot \sigma \nu \pi \frac{8\pi}{3} = \frac{A}{2}$$

12.B.51 γ.

Αν στη χορδή δημιουργούνται N δεσμοί, δημιουργούνται N-1 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και το μήκος της χορδής ισούται με

$$d = (N-1) \frac{\lambda}{2} = (N-1) \frac{vT}{2}$$

Άρα, από την προηγούμενη σχέση, η ταχύτητα διάδοσης ισούται με

$$v = \frac{2d}{(N-1)T} = \frac{8}{N-1} \quad (1)$$

Όμως η ταχύτητα διάδοσης είναι μεγαλύτερη από 5m/s, άρα

$$v \geq 5 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{8}{N-1} \geq 5 \Rightarrow N-1 \leq 1,6 \Rightarrow N \leq 2,6$$

και δεκτή είναι μόνο η τιμή $N=2$ δεσμοί στη χορδή.

Για $N=2$ η (1) δίνει $v=8\text{m/s}$.

12.B.52 γ.

Δύο διαδοχικές κοιλίες έχουν απόσταση στον άξονα του γραμμικού μέσου $\Delta x = \lambda/2 = 3A/2$. Όταν έχουν απόσταση d , η απόστασή τους στον άξονα της ταλάντωσής τους είναι

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Rightarrow \Delta y = \sqrt{(2,5A)^2 - (1,5A)^2} \Rightarrow \Delta y = 2A$$

Αφού οι δύο κοιλίες είναι διαδοχικές, είναι σε αντίθεση φάσης, κατά συνέπεια έχουν διαρκώς αντίθετες απομακρύνσεις, $y_2 = -y_1$. Άρα, από την απόστασή τους στον άξονα y προκύπτει

$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow 2A = y_2 - (-y_2) \Rightarrow y_2 = A$$

Η απομάκρυνση της μιας κοιλίας είναι A τη στιγμή t_1 , όταν

$$y_2 = A \Rightarrow 2A \eta \mu \omega t_1 = A \Rightarrow \eta \mu \omega t_1 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου M δίνεται από τη σχέση

$$K_M = E_M - U_M = \frac{1}{2} D A_M'^2 - \frac{1}{2} D y_M'^2 \quad (2)$$

Το πλάτος του σημείου M είναι

$$|A'_M| = 2A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| \Rightarrow |A'_M| = |-A\sqrt{2}| = A\sqrt{2}$$

και η απομάκρυνσή του τη χρονική στιγμή t_1 , με χρήση της (1) είναι

$$y_M = A'_M \eta \mu \omega t_1 = -A\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow y_M = A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα, η σχέση (2) δίνει

$$K_M = E_M - U_M = \frac{1}{2} D A_M'^2 - \frac{1}{2} D y_M'^2 = \frac{1}{2} D (A\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} D \left(A \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$K_M = \frac{3}{4} m \omega^2 A^2$$

12.B.53 γ.

Από τα δεδομένα του θέματος έχουμε:

$$T/4 = 0,25 \text{ s} \Rightarrow T = 1 \text{ s} \quad \text{και} \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi \text{ rad/s}, \quad \lambda = 12 \text{ m}$$

Το σημείο Λ έχει εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου

$$y_{\Lambda} = A'_{\Lambda} \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow y_{\Lambda} = A'_{\Lambda} \cdot \eta \mu 2\pi t \quad (1)$$

και ταχύτητας - χρόνου

$$v_{\Lambda} = \omega A'_{\Lambda} \cdot \sigma \upsilon \nu 2\pi t \quad (2)$$

Το σημείο της θέσης $x=0\text{m}$ είναι κοιλία που για $t=0\text{s}$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για αυτό είναι

$$y_0 = 2A \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{T} t$$

Με αριθμητική αντικατάσταση για την $t=T/4$ παίρνουμε

$$6\text{cm} = 2A \cdot \eta \mu \frac{2\pi T}{T} \frac{1}{4} = 2A \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow 6\text{cm} = 2A \Rightarrow A = 3\text{cm}$$

Για το A' του σημείου Λ έχουμε

$$A'_{\Lambda} = 2A \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \sigma \upsilon \nu \frac{2\pi 4}{12} \text{m} = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A'_{\Lambda} = -3 \cdot 10^{-2} \text{m}$$

Έτσι, η σχέση (1) γίνεται

$$y_{\Lambda} = -3 \cdot 10^{-2} \cdot \eta \mu 2\pi t \text{ (SI)} \Rightarrow y_{\Lambda} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \eta \mu (2\pi t + \pi) \text{ (SI)}$$

και από την (2) παίρνουμε

$$v_{\Lambda} = \omega |A'_{\Lambda}| \cdot \sigma \upsilon \nu (2\pi t + \pi) = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma \upsilon \nu \left(\frac{2\pi}{T} \frac{5T}{12} + \pi \right) \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$v_{\Lambda} = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \sigma \upsilon \nu \frac{11\pi}{6} \Rightarrow v_{\Lambda} = \pi 3\sqrt{3} \text{ cm / s}$$