

## Θέματα Δ

## 12.Δ.1

α. Από τη δοθείσα εξίσωση έχουμε:

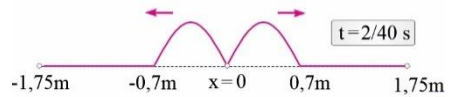
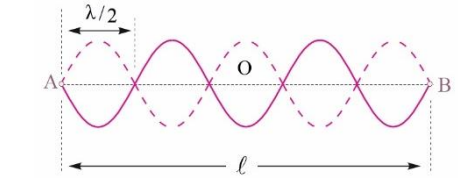
$$\omega = 20 \text{ rad/s}, \quad f = 10 \text{ Hz}, \quad \text{άρα } \lambda = v/f = 1,4 \text{ m}$$

$$\ell = 5 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \ell = 3,5 \text{ m}$$

β. Την  $t_1 = 2/40 \text{ s}$  το κύμα έχει διαδοθεί και στις δύο κατευθύνσεις κατά  $x = v \cdot t_1 = 0,7 \text{ m}$ . Το στιγμιότυπο αντιστοιχεί στις εξισώσεις:

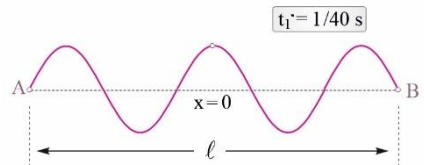
$$y_1 = 0,02 \eta \mu 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{1,4} \right) \quad (\text{S.I.})$$

$$y_2 = 0,02 \eta \mu 2\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{1,4} \right) \quad (\text{S.I.})$$



γ. Θεωρούμε  $t' = 0 \text{ s}$  τη στιγμή που η κοιλία της θέσης  $x = 0 \text{ m}$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της με  $v > 0$ , επομένως για την  $t'_1 = 1/40 \text{ s}$  βρίσκουμε

$$y = 0,04 \sigma \nu \nu \frac{2\pi x}{1,4} \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow y = 0,04 \sigma \nu \nu \frac{10\pi x}{7} \quad (\text{S.I.})$$



δ. Πρέπει να ισχύει  $\ell = N \frac{\lambda}{2} = N \frac{v}{2f} \Rightarrow N = \frac{2\ell f}{v} = 4,5$

Αφού το  $N$  δεν είναι ακέραιος, δεν δημιουργούνται στάσιμα κύματα στη χορδή.

## 12.Δ.2

α. Το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα είναι

$$A_1 = 4 \text{ cm} = 2A \Rightarrow A = 2 \text{ cm}$$

Από την απόσταση ΟΔ βρίσκουμε το μήκος κύματος  $\lambda$

$$(\text{ΟΔ}) = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 40 \text{ cm}$$

Η συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{80}{40} \text{ Hz} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu 2\pi f \cdot t \Rightarrow y = 4 \cdot \sin \frac{\pi x}{20} \eta\mu 4\pi t, (y, x \text{ σε cm})$$

β. Βρίσκουμε τα σημεία που έχουν απομάκρυνση  $y=2\text{cm}$  από την εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$t = 0,0625\text{s}: y = 4 \cdot \sin \frac{\pi x}{20} \eta\mu \frac{\pi}{4} (\text{cm}) \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{20} \text{ cm} \Rightarrow$$

$$2 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{20} \Rightarrow \sin \frac{\pi x}{4} = \sin \frac{\pi x}{20}$$

Οι λύσεις της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι:

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi x}{20} \Rightarrow x = 5 + 40\kappa \quad (1)$$

$$2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi x}{20} \Rightarrow x = 40\kappa - 5 \quad (2)$$

Πρέπει  $0\text{cm} < x < 70\text{cm}$

Από την (1):  $\kappa=0, x=5\text{cm}$  ( $M_1$ ),  $\kappa=1, x=45\text{cm}$  ( $M_3$ )

Από την (2):  $\kappa=1, x=35\text{cm}$  ( $M_2$ )

γ. Βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές από την εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$\left. \begin{array}{l} x = 20\text{cm} \\ y = 2\text{cm} \end{array} \right\} 2 = 4 \cdot \sin \frac{\pi \cdot 20}{20} \eta\mu 4\pi t \Rightarrow -\frac{1}{2} = \eta\mu 4\pi t$$

$$\eta\mu \frac{7\pi}{6} = \eta\mu 4\pi t \left\{ \begin{array}{l} 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} = 4\pi t \quad (3) \\ (2\kappa+1)\pi - \frac{7\pi}{6} = 4\pi t \quad (4) \end{array} \right.$$

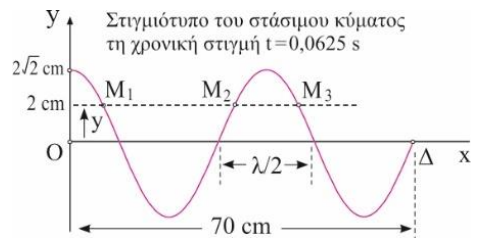
από την (3) προκύπτει ότι  $t = \frac{\kappa}{2} + \frac{7}{24}$ .

Για  $\kappa=0, 1, 2$  και για  $0\text{s} \leq t \leq 1\text{s}$  παίρνουμε τις τιμές  $7/24\text{s}, 19/24\text{s}$ .

Από την (4) προκύπτει ότι  $t = \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{24}$ .

Για  $\kappa=0, 1, 2$  και για  $0\text{s} \leq t \leq 1\text{s}$  παίρνουμε τις τιμές  $11/24\text{s}, 23/24\text{s}$ .

δ. Το σημείο M έχει πλάτος ταλάντωσης



$$|A_M| = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 4 \left| \sin \frac{2\pi \cdot 0,25}{0,4} \right| \Rightarrow |A_M| = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του Μ έχουμε

$$\frac{1}{2} D A_M^2 = \frac{1}{2} D y_M^2 + \frac{1}{2} m v_M^2 \Rightarrow v_M^2 = \omega^2 (A_M^2 - y_M^2) \Rightarrow v_M = 8\pi \text{ cm/s}$$

### 12.Δ.3

Α. α. Η εξίσωση της φάσης του σημείου Ο είναι  $\varphi_0 = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ .

Για  $\varphi_0 = 6\pi \text{ rad}$ ,  $t_1 = 1,2 \text{ s}$ ,  $x = 0 \text{ m}$  θα έχουμε

$$6\pi = 2\pi \cdot \frac{1,2}{T} \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$$

Η εξίσωση της φάσης του σημείου Μ είναι  $\varphi_M = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ .

Για  $t_1 = 1,2 \text{ s}$  η φάση ταλάντωσης του σημείου Μ είναι  $3\pi/2 \text{ rad}$  οπότε το μήκος κύματος θα είναι

$$3\frac{\pi}{2} = 2\pi \left( \frac{1,2}{0,4} - \frac{0,9}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

β. Βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης από τη μέγιστη ταχύτητα

$$v_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = 2 \text{ cm}$$

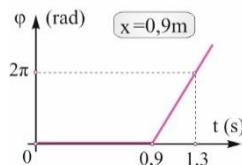
Η εξίσωση του κύματος θα είναι

$$y = 2 \cdot \eta \mu 2\pi(2,5t - 2,5x) \quad (x \text{ σε m, } y \text{ σε cm})$$

Η φάση ταλάντωσης του σημείου Μ είναι

$$\varphi_M = 2\pi(2,5t - 2,5 \cdot 0,9) \Rightarrow \varphi_M = 5\pi t - 4,5\pi \quad (\text{S.I.})$$

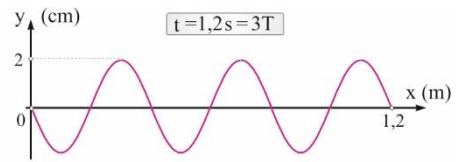
Για  $\varphi_M = 0 \text{ rad}$  παίρνουμε ότι  $t = 0,9 \text{ s}$ . Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τον χρόνο δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή

$t_1 = 1,2s = 3T$  δίνεται από την εξίσωση

$$y = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{3T}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,02 \eta \mu 2\pi \left( 3 - \frac{x}{0,4} \right) \text{ (S.I.)}$$



και δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

Β. α. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y' = 2A \cdot \sigma \nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{T} t' \Rightarrow y' = 4 \cdot \sigma \nu 5\pi x \cdot \eta \mu 5\pi t' \text{ (cm)}$$

Β. β. Το σημείο Λ ταλαντώνεται σύμφωνα με την σχέση

$$y'_\Lambda = 4 \cdot \sigma \nu 5\pi \cdot 0,95 \cdot \eta \mu 5\pi t \Rightarrow y'_\Lambda = -2\sqrt{2} \cdot \eta \mu 5\pi t \text{ (cm)}$$

Την  $t_1' = 1,25s$  η απομάκρυνση του Λ είναι

$$y_\Lambda = -2\sqrt{2} \cdot \eta \mu \frac{\pi}{4} \text{ (cm)} \Rightarrow y_\Lambda = -2 \text{ cm}$$

#### 12.Δ.4

α. Την  $t_1$  η απομάκρυνση του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του είναι

$$U_M = \frac{U_{\max}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} D y_M^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D (2A)^2 \Rightarrow y_M = A$$

Από την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ βρίσκουμε τη συχνότητα ταλάντωσης των σημείων

$$y_M = 2A \eta \mu 2\pi f t_1 \Rightarrow A = 2A \eta \mu 2\pi f \cdot 0,1 \frac{1}{60} \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{6} = \eta \mu 2\pi f \cdot 0,1 \frac{1}{60} \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} = 2\pi f \cdot 0,1 \frac{1}{60}$$

$$\kappa = 0: f = 5 \text{ Hz}$$

Άρα η κοιλία διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της 10 φορές το δευτερόλεπτο.

β. Από τη μέγιστη ταχύτητα βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης του τρέχοντος κύματος

$$v_{\max} = 2\pi f \cdot 2A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{4\pi f} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων μιας κοιλίας του στάσιμου είναι

$$h_{\max} = 4A \Rightarrow h_{\max} = 0,8 \text{ m}$$

γ. Το Ν απέχει  $x = \frac{7\lambda}{8} - \frac{\lambda}{4} = \frac{5\lambda}{8}$  από την πρώτη κοιλία που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των  $x$ .

Άρα η εξίσωση ταλάντωσης του Ν θα είναι

$$y_N = 2A \sin \frac{2\pi \cdot 5\lambda}{\lambda \cdot 8} \eta \mu 2\pi f \Rightarrow y_N = -0,2\sqrt{2} \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

δ. Από το μήκος της χορδής βρίσκουμε τα μήκη κύματος:

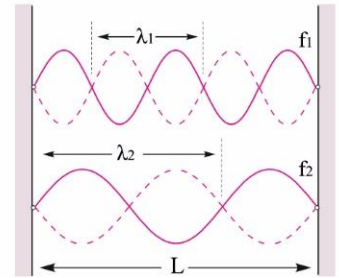
$$L = \frac{5\lambda_1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ m}$$

$$L = \frac{3\lambda_2}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{3} \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στην χορδή δε θα αλλάξει.

Η νέα συχνότητα ταλάντωσης των μορίων θα είναι

$$v = \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{f_1 \cdot \lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow f_2 = 3 \text{ Hz}$$



### 12.Δ.5

α. Τα πλάτη ταλάντωσης των σημείων Μ και Λ που βρίσκονται στις θέσεις αντίστοιχα  $x_M=15\text{cm}$ ,  $x_\Lambda=-10\text{cm}$  είναι:

$$A_M = 8 \cdot \sin \frac{\pi x_M}{5} = 8 \cdot \sin 3\pi \text{ cm} \Rightarrow |A_M| = 8 \text{ cm}$$

$$A_\Lambda = 8 \cdot \sin \frac{\pi x_\Lambda}{5} = 8 \cdot \sin(-2\pi) \text{ cm} \Rightarrow |A_\Lambda| = 8 \text{ cm}$$

Άρα τα σημεία Μ και Ν είναι κοιλίες.

β. Οι θέσεις όλων των σημείων που είναι δεσμοί, μεταξύ των Μ και Λ είναι

$$x_\Delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ με } -10\text{cm} < x < 15\text{cm}$$

$$\kappa=0, x=2,5\text{cm}, \kappa=\pm 1, x_1=7,5\text{cm}, x_1'=-2,5\text{cm}$$

$$\kappa=\pm 2, x_2=12,5\text{cm}, x_2'=-7,5\text{cm}$$

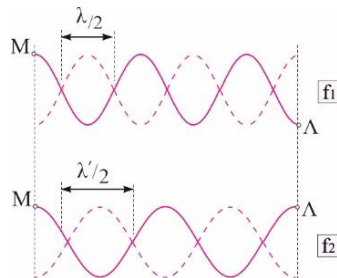
$$\kappa=\pm 3, x_3=17,5\text{cm (απορ)}, x_3'=-12,5\text{cm (απορ)}.$$

Άρα υπάρχουν συνολικά 5 δεσμοί.

γ. Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του στάσιμου βρίσκεται από το πρόσημο της παράστασης  $\sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ . Για τα Μ και Ν τα πρόσημα της παράστασης είναι αντίθετα. Άρα τα Μ και Λ έχουν διαφορά φάσης  $\pi$  rad.

δ. Θέλουμε την αμέσως μικρότερη συχνότητα,  $f'$ , επομένως θα πρέπει το  $\lambda$  να γίνει το αμέσως μεγαλύτερο, (ίδιο μέσο, άρα ίδια ταχύτητα διάδοσης). Επομένως ο αριθμός των κοιλιών θα μειωθεί. Αν  $\lambda'$  είναι το νέο μήκος κύματος θα έχουμε

$$\left. \begin{aligned} (M\Lambda) &= 5\frac{\lambda}{2} \\ (M\Lambda) &= 4\frac{\lambda'}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4\lambda' = 5\lambda \Rightarrow 4\frac{v}{f'} = 5\frac{v}{f} \Rightarrow f' = 8\text{Hz}$$



### 12.Δ.6

Α. α. Τη χρονική στιγμή  $t_1=0,3\text{s}$  το κύμα έφθασε στο Μ και αυτό άρχισε να ταλαντώνεται με πλάτος Α. Τη στιγμή  $t_2=1,1\text{s}$  το ανακλώμενο κύμα έφθασε στο Μ και η συμβολή των δύο κυμάτων δημιούργησε δεσμό.

β. Η θέση του σημείου Μ στον άξονα θα είναι

$$x_M = v \cdot t_1 = (2\text{m/s}) \cdot 0,3\text{s} \Rightarrow x_M = 0,6\text{m}$$

γ. Η απόσταση ΟΒ είναι

$$2(MB) = v \cdot \Delta t \Rightarrow (MB) = \frac{2 \cdot (1,1 - 0,3)}{2} \text{m} = 0,8\text{m}$$

$$(OB) = (OM) + (MB) = 1,4\text{m}$$

Β. α. Βρίσκουμε το μήκος κύματος από την απόσταση ΟΒ

$$(OB) = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 1,4\text{m} = 7\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 0,8\text{m}$$

Η συχνότητα ταλάντωσης των σημείων της χορδής είναι

$$f = \frac{v}{\lambda} = 2,5\text{Hz}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 0,2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{0,8} \cdot \eta\mu 5\pi t' \text{ (S.I.)}$$

Β. β. Από την εξίσωση των κοιλιών έχουμε ότι

$$x_k = k \frac{\lambda}{2} \text{ με } x < 1,4\text{m}$$

$$k=0 \quad x=0\text{m} \quad , \quad k=1 \quad x=0,4\text{m} \quad ,$$

$$k=2 \quad x=0,8\text{m} \quad , \quad k=3 \quad x=1,2\text{m}.$$

### 12.Δ.7

α. Όταν το Ο διέρχεται για δεύτερη φορά από την ακραία αρνητική του θέση έχει περάσει χρόνος

$$t = 1,75\text{s} = 7T / 4$$

Άρα η συχνότητα είναι

$$1,75\text{s} = 7T / 4 \Rightarrow T = 1\text{s} \Rightarrow f = 1\text{Hz}$$

Το μήκος και η ταχύτητα του κύματος είναι

$$\lambda = 0,8\text{m} \quad , \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,8\text{m}}{1\text{s}} = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β. Το Γ απέχει 0,9m από την άκρη Β άρα απέχει  $x_r = L - 0,9\text{m} = 1,3\text{m}$  από το Ο.

Η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι

$$y_r = 2A \sin 2\pi \frac{x_r}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_r = 0,02 \sin 2\pi \frac{1,3\text{m}}{0,8\text{m}} \eta\mu \frac{2\pi}{1} 1,75 \Rightarrow y_r = 0,01\sqrt{2}\text{m}$$

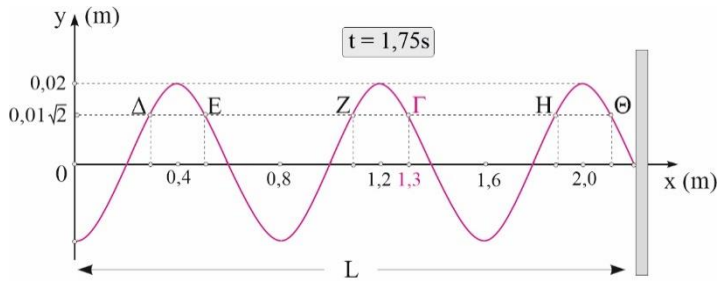
γ. Οι θέσεις όλων των σημείων της χορδής που έχουν ίδιο πλάτος ταλάντωσης και ίδια φάση με το σημείο Γ θα είναι

$$y_r = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow 0,01\sqrt{2}\text{m} = 0,02 \sin 2\pi \frac{x}{0,8} \eta\mu \frac{2\pi}{1} 1,75 \Rightarrow$$

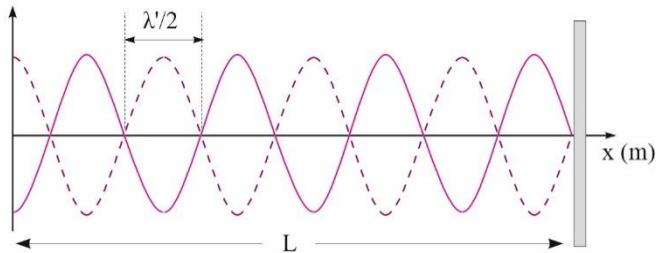
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 2,5\pi x \Rightarrow \begin{aligned} 2k\pi + \frac{3\pi}{4} &= \sin 2,5\pi x, (1) \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} &= \sin 2,5\pi x, (2) \end{aligned}$$

Η σχέση (1) γίνεται  $x = 0,8k + 0,3$  και για  $k=0,1,2$  δίνει τις θέσεις 0,3m(Δ), 1,1m(Ζ), 1,9m(Η).

Η σχέση (2) γίνεται  $x = 0,8k - 0,3$  και για  $k=1,2,3$  δίνει τις θέσεις 0,5m(Ε), 1,3m(Γ), 2,1m(Θ).



δ. Όταν μεταβάλλουμε τη συχνότητα, η ταχύτητα διάδοσης παραμένει σταθερή. Τώρα στη χορδή έχουμε 8 δεσμούς επομένως



Από το μήκος της χορδής βρίσκουμε το νέο μήκος κύματος

$$L = \frac{7\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{15\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{4L}{15} = \frac{8,8}{15} \text{ m}$$

Η νέα συχνότητα ταλάντωσης των μορίων θα είναι

$$v = f\lambda = f'\lambda' \Rightarrow f' = \frac{f\lambda}{\lambda'} = \frac{15}{11} \text{ Hz}$$

### 12.Δ.8

α. Τη χρονική στιγμή  $t_1=2\text{s}$ , το σημείο Δ της χορδής που βρίσκεται στη θέση  $x_\Delta=1\text{m}$ , έχει φάση ίση με  $3\pi \text{ rad}$  άρα

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t_1}{T} - \frac{x_\Delta}{\lambda} \right) \Rightarrow 3\pi = 2\pi \left( \frac{2\text{s}}{T} - \frac{1\text{m}}{\lambda} \right) \Rightarrow \frac{2\text{s}}{T} - \frac{1\text{m}}{\lambda} = \frac{3}{2}, (1)$$

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT \Rightarrow \lambda = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot T, (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) βρίσκουμε την περίοδο της ταλάντωσης και το μήκος κύματος:

$$\frac{2s}{T} - \frac{1m}{2\frac{m}{s}T} = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 1s, \quad \lambda = 2\frac{m}{s} \cdot 1s \Rightarrow \lambda = 2m$$

β. Η εξίσωση του κύματος που δημιουργήθηκε στη χορδή στο χρονικό διάστημα  $0s \leq t \leq 2,25s$  είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad (3)$$

Από τη μέγιστη ταχύτητα βρίσκουμε το πλάτος

$$v = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 3\pi \Rightarrow v = -v_{\max} \Rightarrow 0,05\pi \frac{m}{s} = \frac{2\pi}{1s} A \Rightarrow A = 0,025m$$

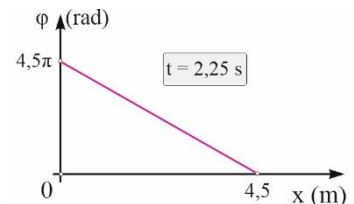
Αντικαθιστώντας τις τιμές A, λ και T στην (3) παίρνουμε

$$y = 0,025\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2}\right), \quad (\text{S.I.})$$

Η φάση ενός σημείου της χορδής τη χρονική στιγμή  $t_2 = 2,25s$  είναι

$$\phi = 2\pi\left(t_2 - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \phi = 2\pi\left(2,25 - \frac{x}{2}\right), \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τη θέση x είναι όπως στο σχήμα.



γ. Το σημείο Δ, που βρίσκεται στη θέση  $x_\Delta = 1m$ , έχει νέο πλάτος, μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος, που δίνεται από τη σχέση

$$|A_\Delta| = 2A \left| \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x_\Delta}{\lambda} \right| = 0,05 \left| \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1m}{2m} \right| = 0,05 |\sigma\upsilon\nu \pi| \Rightarrow |A_\Delta| = 0,05m$$

Από την εξίσωση των στάσιμων κυμάτων για το σημείο Δ και για τη χρονική στιγμή  $t'_1 = 1,25s$ , μετά τη δημιουργία στάσιμου κύματος, το Δ έχει απομάκρυνση

$$y = 2A \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t'}{T} \Rightarrow y = 0,05 \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1}{2} \eta\mu \frac{2\pi t'}{1}, \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow$$

$$y = -0,05\eta\mu 2,5\pi \Rightarrow y = -0,05m$$

Η επιτάχυνση του σημείου Δ είναι

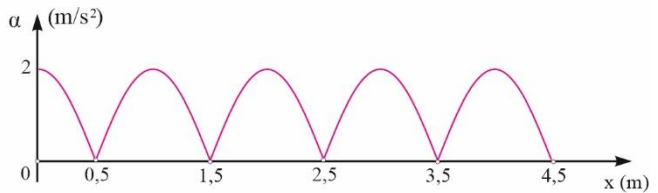
$$\alpha = -\omega^2 y \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ. Η μέγιστη επιτάχυνση των σημείων της χορδής δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_{\max} = \omega^2 |A'| \Rightarrow \alpha_{\max} = \omega^2 2A \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max} = 2 \left| \sin \pi x \right| \text{ (S.I.)}$$

Άρα η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τη θέση είναι όπως στο σχήμα.



### 12.Δ.9

Α. Στα δύο άκρα σχηματίζονται κοιλίες, οπότε αν με N συμβολίσουμε τον αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται, τότε για το μήκος του σχοινιού έχουμε

$$L = N \frac{\lambda}{2} = N \frac{v}{2f} \Rightarrow f = \frac{Nv}{2L} = N \frac{20 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} \Rightarrow f = N \cdot 20 \text{ Hz με } N=1, 2, \dots$$

Για N=5 προκύπτει η 5<sup>η</sup> κατά αύξουσα σειρά συχνότητα, f=100Hz.

$$\text{B. } \alpha. \lambda = \frac{v}{f} = \frac{20 \text{ m/s}}{100 \text{ Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις

$$x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \kappa=0, 1, 2, \dots \text{ και } 0 \text{ m} \leq x \leq 0,5 \text{ m}$$

$$\kappa = 0, x_0 = \frac{\lambda}{4} = 0,05 \text{ m}, \quad \kappa = 1, x_1 = \frac{3\lambda}{4} = 0,15 \text{ m}$$

$$\kappa = 2, x_2 = \frac{5\lambda}{4} = 0,25 \text{ m}, \quad \kappa = 3, x_3 = \frac{7\lambda}{4} = 0,35 \text{ m}$$

$$\kappa = 4, x_4 = \frac{9\lambda}{4} = 0,45 \text{ m}$$

β. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow y = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 10\pi x \cdot \eta \mu 200\pi t \text{ (S.I.) (1)}$$

γ. Από την εξίσωση (1) προκύπτει

$$y_M = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \cdot \eta \mu 200\pi t \text{ (S.I.)} \Rightarrow y_M = -3 \cdot 10^{-2} \cdot \eta \mu 200\pi t \text{ (S.I.)}$$

δ. Η απόσταση των M και Λ στη διεύθυνση του σχοινιού είναι

$$x_M - x_\Lambda = \frac{0,4\text{m}}{3} - 0,1\text{m} \Rightarrow x_M - x_\Lambda = \frac{0,1\text{m}}{3}$$

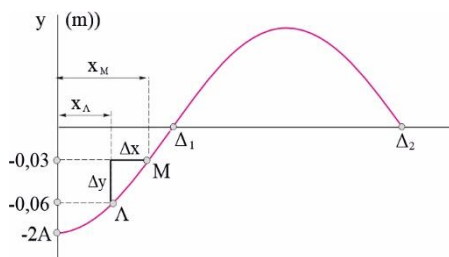
Για το σημείο Λ έχουμε

$$A'_\Lambda = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \sin \pi \text{ cm} \Rightarrow A'_\Lambda = -6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

Τα δύο σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, οπότε στον άξονα της ταλάντωσης, στις μέγιστες απομακρύνσεις, τα δύο σημεία έχουν απόσταση

$\Delta y = |A'_\Lambda| - |A'_M| = 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$  και η μέγιστη μεταξύ τους απόσταση είναι

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3} \text{ cm}\right)^2 + (3 \text{ cm})^2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{181}}{3} \text{ cm}$$



### 12.Δ.10

Α. α. Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος έχουμε

$$2A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{216\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 108 \text{ Hz}$$

Η συχνότητα διέλευσης των μορίων από τη θέση ισορροπίας τους είναι διπλάσια από τη συχνότητα ταλάντωσης των μορίων άρα

$$f_{\text{OI}} = 2f = 216 \text{ Hz}$$

Το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{324 \text{ m/s}}{108 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

β. Για την ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του αέρα έχουμε

$$v = \omega A' \sin \omega t \Rightarrow v = \omega \cdot 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin \omega t$$

Για το σημείο M συγκεκριμένα θα έχουμε

$$v_M = \omega \cdot 2A \sin \frac{2\pi x_M}{\lambda} \cdot \sin \omega t \Rightarrow v_M = 216\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} \sin \frac{2\pi x_M}{3} \sin 216\pi t \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

$$v_M = 0,864\pi \cdot \sin \frac{7\pi}{3} \cdot \sin 216\pi t \text{ (S.I.)} \Rightarrow v_M = 0,432\pi \cdot \sin 216\pi t \text{ (S.I.)}$$

B. α. Στο χεῖλος του πηγαδιού έχουμε κοιλία και στην επιφάνεια του νερού δεσμό, οπότε για το μήκος  $h$  του ελαστικού μέσου που δημιουργείται το στάσιμο έχουμε

$$h = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow h = (2\kappa + 1) \frac{v}{4f_1} \quad (1)$$

Για την αμέσως επόμενη τιμή της συχνότητας  $f_2$  θα έχουμε

$$h = [2(\kappa + 1) + 1] \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow h = (2\kappa + 3) \frac{v}{4f_2} \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε

$$(2\kappa + 1) \frac{v}{4f_1} = (2\kappa + 3) \frac{v}{4f_2} \Rightarrow (2\kappa + 1)f_2 = (2\kappa + 3)f_1 \Rightarrow (2\kappa + 1) \cdot 151,2 = (2\kappa + 3) \cdot 108 \Rightarrow$$

$$302,4\kappa + 151,2 = 216\kappa + 324 \Rightarrow 86,4\kappa = 172,8 \Rightarrow \kappa = 2$$

Από τη σχέση (1) για το βάθος του πηγαδιού έχουμε

$$h = (2\kappa + 1) \frac{v}{4f_1} = \frac{5 \cdot 324}{4 \cdot 108} \text{ m} = 3,75 \text{ m}$$

β. Την αμέσως επόμενη μεγαλύτερη συχνότητα την βρίσκουμε εάν στην εξίσωση (1) βάλουμε ό-  
που  $\kappa$  το  $\kappa + 2$ , δηλαδή

$$h = [2(\kappa + 2) + 1] \frac{v}{4f_3} \Rightarrow f_3 = (2\kappa + 5) \frac{v}{4h} \Rightarrow f_3 = (2 \cdot 2 + 5) \frac{324}{4 \cdot 3,75} \text{ Hz} \Rightarrow f_3 = 194,4 \text{ Hz}$$

### 12.Δ.11

A. α. Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος βρίσκουμε το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων, το μήκος κύματός τους και τη συχνότητα ταλάντωσης των μορίων του αέρα:

$$2A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{0,09} \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 0,18 \text{ m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{3800\pi}{2\pi} \text{ Hz} \Rightarrow f = 1900 \text{ Hz}$$

Επομένως η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι

$$v = \lambda \cdot f = 0,18 \cdot 1900 \text{ m/s} = 342 \text{ m/s}$$

Οι εξισώσεις των κυμάτων από τις οποίες προέρχεται το στάσιμο κύμα είναι:

$$y_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 2\pi \left( 1900t - \frac{x}{0,18} \right) \text{ (S.I.)}$$

$$y_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 2\pi \left( 1900t + \frac{x}{0,18} \right) \text{ (S.I.)}$$

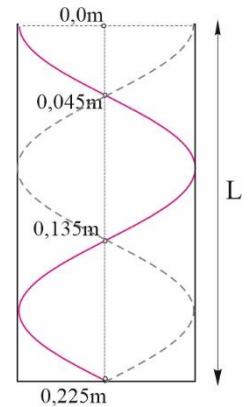
β. Ο αριθμός των δεσμών που δημιουργούνται στο εσωτερικό του μπουκαλιού είναι

$$0 \text{ m} < x \leq \ell \Rightarrow 0 \text{ m} < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \leq \ell \Rightarrow 0 \text{ m} < (2\kappa + 1) \lambda \leq 4\ell \Rightarrow$$

$$0 < 2\kappa + 1 \leq \frac{4 \cdot 0,225}{0,18} \Rightarrow 0 < 2\kappa + 1 \leq 5 \Rightarrow$$

$$-1 < 2\kappa \leq 4 \Rightarrow -0,5 < \kappa \leq 2$$

Άρα δημιουργούνται τρεις δεσμοί στο εσωτερικό του μπουκαλιού για  $\kappa = 0, 1, 2$ , επομένως το στιγμιότυπο είναι όπως στο σχήμα.



Β. α. Το μήκος της νέας αέριας στήλης θα είναι

$$\ell' = \ell - 0,3\ell \Rightarrow \ell' = 0,7\ell \Rightarrow \ell' = 0,7 \cdot 0,225 \text{ m} = 0,1575 \text{ m}$$

Αφού αποκαθίσταται στάσιμο και σχηματίζονται συνολικά 5 δεσμοί θα έχουμε για  $\kappa=4$

$$\ell' = (2 \cdot 4 + 1) \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{4 \cdot 0,1575}{9} \text{ m} = 0,07 \text{ m}$$

και η νέα συχνότητα θα είναι

$$f' = \frac{v}{\lambda'} \Rightarrow f' = \frac{342 \text{ m/s}}{0,07 \text{ m}} \Rightarrow f' = 4885,7 \text{ Hz}$$

Β. β. Η νέα εξίσωση του στάσιμου θα είναι

$$y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{2\pi x}{0,07} \cdot \eta\mu 9771,4\pi t \quad (\text{SI})$$

και το πλάτος ταλάντωσης των μορίων του αέρα που απέχουν  $x_1=10,5\text{cm}$  από το χείλος του μπουκαλιού θα είναι

$$A' = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 0,105}{0,07} \text{ m} \Rightarrow A' = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 3\pi \text{ m} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow |A'| = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

### 12.Δ.12

α. Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων του Ο είναι 0,8m, οπότε το πλάτος ταλάντωσης των τρεχόντων κυμάτων είναι

$$4A = 0,8\text{m} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Η κινητική ενέργεια ενός σημείου που ταλαντώνεται γίνεται μέγιστη δύο φορές σε κάθε περίοδο, οπότε

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t = 2\text{s}$$

Οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις  $x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4}$ ,

οπότε ο δεύτερος δεσμός, για  $\kappa=1$ , βρίσκεται στη θέση  $x = \frac{3\lambda}{4}$ .

Από τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στην κοιλία και τον δεύτερο δεσμό, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$d_{\max} = \sqrt{(2A)^2 + \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^2} \Rightarrow 0,5^2 = 4 \cdot 0,2^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0,2\text{m}$$

Άρα, η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu\omega t \Rightarrow y = 0,4 \cdot \sin 10\pi x \cdot \eta\mu\pi t \quad (\text{S.I.})$$

β. Το πλάτος των σημείων του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση

$$|A'| = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0,4 \left| \sin 10\pi x \right| \quad (\text{SI}) \quad \text{Βρίσκουμε τις θέσεις των δεσμών}$$

$$x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} \quad \kappa=0, 1, 2, \dots \text{ και } 0\text{m} \leq x \leq 0,55\text{m}$$

$$\kappa = 0, x_0 = \frac{\lambda}{4} = 0,05\text{m}$$

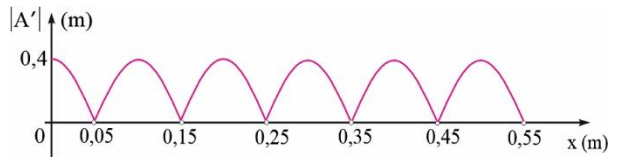
$$\kappa = 1, x_1 = \frac{3\lambda}{4} = 0,15\text{m}$$

$$\kappa = 2, x_2 = \frac{5\lambda}{4} = 0,25\text{m}$$

$$\kappa = 3, x_3 = \frac{7\lambda}{4} = 0,35\text{m}$$

$$\kappa = 4, x_4 = \frac{9\lambda}{4} = 0,45\text{m}$$

$$\kappa = 5, x_5 = \frac{11\lambda}{4} = 0,55\text{m}$$



Η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

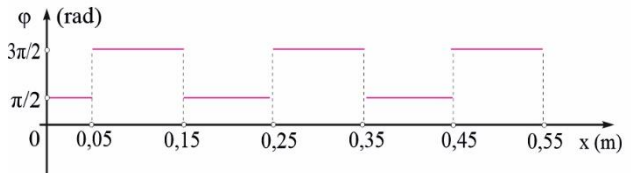
γ. Βρίσκουμε τη φάση ταλάντωσης του σημείου Ο τη στιγμή 0,5s

$$\varphi_0 = \omega t = \frac{2\pi}{T}t = 0,5\pi \text{ rad}$$

Τα σημεία του μέσου ομαδοποιούνται σε δύο κατηγορίες, σε σημεία που την  $t=0\text{s}$  κατευθύνονται προς τα θετικά και έχουν κάθε στιγμή την ίδια φάση ταλάντωσης με το Ο και σε σημεία που την  $t=0\text{s}$  κατευθύνονται προς τα αρνητικά και έχουν κάθε στιγμή μεγαλύτερη φάση ταλάντωσης από το Ο κατά  $\pi$  rad. Τα σημεία αυτά έχουν φάση ταλάντωσης

$$\varphi = (0,5\pi + \pi) \text{ rad} = 1,5\pi \text{ rad}$$

Άρα η γραφική παράσταση της φάσης  $\varphi=f(x)$  όλων των σημείων της χορδής τη χρονική στιγμή  $t_1=0,5\text{s}$  είναι όπως στο σχήμα.



δ. Οι θέσεις των μορίων της χορδής που τη χρονική στιγμή  $t_1$  έχουν απομάκρυνση  $+A$ , όπου  $A$  είναι το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργήσαν το στάσιμο είναι

$$0,2 = 0,4 \cdot \sin 10\pi x \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 10\pi x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 10\pi x = \frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi & (1) \\ 10\pi x = -\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi & (2) \end{cases}$$

$$(1), \kappa = 0 : x_1 = \frac{1}{30} \text{ m} \quad (2), \kappa = 1 : x_2 = \frac{5}{30} \text{ m}$$

$$(1), \kappa = 1 : x_3 = \frac{7}{30} \text{ m} \quad (2), \kappa = 2 : x_4 = \frac{11}{30} \text{ m}$$

$$(1), \kappa = 2 : x_5 = \frac{13}{30} \text{ m}$$

ε. Για το μήκος της χορδής αρχικά έχουμε  $L = 5\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{11\lambda}{4}$ .

Στην αμέσως μεγαλύτερη συχνότητα έχουμε το αμέσως μικρότερο μήκος κύματος, οπότε θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με μία άτρακτο περισσότερο από πριν, οπότε για το μήκος της χορδής τώρα έχουμε

$$L = 6\frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{13\lambda'}{4}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε το νέο μήκος κύματος και τη νέα συχνότητα

$$\frac{13\lambda'}{4} = \frac{11\lambda}{4} \Rightarrow 13\lambda' = 11\lambda \xrightarrow{\lambda=v/f} 13\frac{v}{f'} = 11\frac{v}{f} \Rightarrow f' = \frac{6,5}{11} \text{ Hz}$$

### 12.Δ.13

α. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε κοιλίας μηδενίζεται κάθε 2 δευτερόλεπτα. Ο ρυθμός αυτός γίνεται μηδενικός τόσο στη θέση ισορροπίας όσο και στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, γιατί δίνεται από τη σχέση  $\frac{dK}{dt} = Fv$ , επομένως

$$\frac{T}{4} = 2s \Rightarrow T = 8s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

β. Μεταξύ των  $M_1$ ,  $M_2$  υπάρχουν άλλες 3 κοιλίες, οπότε για το μήκος κύματος έχουμε

$$4 \cdot \frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = 6\text{cm}$$

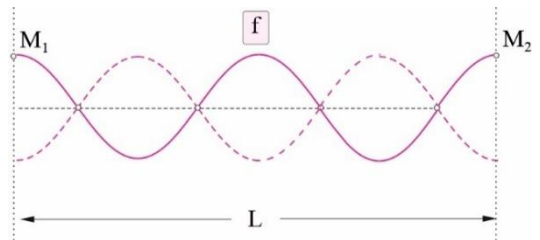
Η κάθε κοιλία σε χρόνο μιας περιόδου διανύει διάστημα 20cm, άρα

$$s = 8A \Rightarrow A = \frac{s}{8} = \frac{20\text{cm}}{8} \Rightarrow A = 2,5\text{cm}$$

Η ταχύτητα των τρεχόντων κυμάτων είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{8} \text{ m/s} \Rightarrow v = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Άρα στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί δεξιά και αριστερά από τη θέση  $x=0\text{m}$  σε απόσταση ίση με



$$d = v \cdot t = 75 \cdot 10^{-4} \cdot 4m \Rightarrow d = 0,03m = 3cm$$

Συνεπώς η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

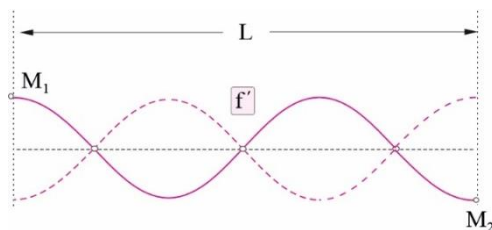
$$y = 5\sigma\eta\nu \frac{\pi x}{3} \eta\mu \frac{\pi}{4} t \quad (x, y \text{ σε cm}, t \text{ σε s}), \quad -3cm \leq x \leq 3cm$$

γ. Στο σημείο  $M_3$  που βρίσκεται  $x=4cm$  δεξιά του  $O$  για  $0s < t < 4s$  δεν έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα σε αυτό το χρονικό διάστημα, επομένως η απομάκρυνσή του θα οφείλεται μόνο στο τρέχον κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά

$$y_M = A\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right) \Rightarrow y_M = 2,5\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{8} + \frac{2}{3} \right) \quad (x, y \text{ σε cm}, t \text{ σε s}),$$

δ. Η αμέσως μικρότερη συχνότητα αντιστοιχεί στο αμέσως μεγαλύτερο μήκος κύματος, οπότε θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με μία λιγότερη άτρακτο από πριν.

Για την απόσταση  $L$  μεταξύ των σημείων  $M_1$  και  $M_2$  στις δύο περιπτώσεις έχουμε:



$$\left. \begin{aligned} L &= 4 \frac{\lambda}{2} \\ L &= 3 \frac{\lambda'}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4\lambda = 3\lambda' \Rightarrow 4 \frac{v}{f} = 3 \frac{v}{f'} \Rightarrow f' = \frac{3}{4} f \Rightarrow f' = \frac{3}{32} \text{ Hz}$$

### 12.Δ.14

α. Κάθε υλικό σημείο αποκτά ταχύτητα μέγιστου μέτρου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του, άρα η περίοδος και η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι

$$\frac{T}{2} = 0,5s \Rightarrow T = 1s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

Από το διάγραμμα για το μήκος κύματος έχουμε

$$\frac{\lambda}{4} = 6cm \Rightarrow \lambda = 24cm = 0,24m$$

Τη στιγμή  $t_1 = (1/12)s$  η κοιλία  $O$  έχει απομάκρυνση  $2cm$ , οπότε από την εξίσωση ταλάντωσής της βρίσκουμε το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων

$$y = 2A\eta\mu\omega t \Rightarrow 2\text{cm} = 2A\eta\mu\frac{2\pi}{12} \Rightarrow A = 2\text{cm} = 0,02\text{m}$$

Άρα οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0,02\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{0,24}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) = 0,02\eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{0,24}\right) \text{ (S.I.)}$$

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ προκύπτει από τη εξίσωση του στάσιμου κύματος εάν αντικαταστήσουμε τη θέση x του σημείου

$$y_M = A'_M \eta\mu\omega t = 2A \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda} \eta\mu\omega t$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Μ είναι

$$v_M = \omega A'_M \sigma\upsilon\nu\omega t = 2\omega A \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda} \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow v_M = 2 \cdot 2\pi \cdot 0,02 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi \cdot 0,16}{0,24} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi t \Rightarrow$$

$$v_M = 0,08\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi t \Rightarrow v_M = -0,04\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi t \text{ (S.I.)}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου Μ είναι

$$\alpha_M = -\omega^2 y = -2\omega^2 A \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda} \eta\mu\omega t \Rightarrow \alpha_M = -2 \cdot (2\pi)^2 \cdot 0,02 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi \cdot 0,16}{0,24} \eta\mu 2\pi t \Rightarrow \alpha_M = 0,08\pi^2 \eta\mu 2\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ είναι

$$|A'_M| = 2A \left| \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda} \right| = 0,04 \left| \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi \cdot 0,16}{0,24} \right| \text{m} \Rightarrow |A'_M| = 0,04 \left| \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} \right| \Rightarrow |A'_M| = 0,02\text{m}$$

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για το σημείο Μ και έχουμε

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} D A_M'^2 = \frac{1}{2} m v_M'^2 + \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m \omega^2 A_M'^2 = \frac{1}{2} m v_M'^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$v_M = \pm \omega \sqrt{A_M'^2 - y^2} \Rightarrow |v_M| = 2\pi \sqrt{(2 \cdot 10^{-2})^2 - (10^{-2})^2} \text{m/s} \Rightarrow |v_M| = 2\pi \cdot 10^{-2} \sqrt{3} \text{m/s}$$

δ. Το σημείο Σ έχει τον όρο  $A_\Sigma'$  ίσο με

$$E_\Sigma = \frac{1}{4} E_k \Rightarrow \frac{1}{2} D A_\Sigma'^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A_k'^2 \Rightarrow A_\Sigma'^2 = \frac{1}{4} A_k'^2 \Rightarrow A_\Sigma' = \pm \frac{1}{2} A_k' = \pm \frac{2A}{2} \Rightarrow A_\Sigma' = \pm A = \pm 0,02\text{m}$$

Το σημείο αυτό βρίσκεται αριστερά του σημείου Μ, στην ίδια άτρακτο με αυτό, άρα το σημείο αυτό είναι συμφασικό με το Μ και τα δύο αυτά σημεία είναι σε αντίθεση φάσης με την κοιλία Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα. Αφού η κοιλία Ο δεν έχει αρχική φάση ταλάντωσης, τα σημεία Σ και Μ θα έχουν αρχική φάση ταλάντωσης  $\pi$  rad, άρα το Α' τους θα είναι αρνητικό, επομένως έχουμε

$$A'_\Sigma = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_\Sigma}{\lambda} \Rightarrow -0,02\text{m} = 0,04\text{m}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_\Sigma}{0,24} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{200\pi x_\Sigma}{24} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{200\pi x_\Sigma}{24} = \frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi \quad (1) \\ \frac{200\pi x_\Sigma}{24} = -\frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1), \kappa = 0: x_1 = 0,08\text{m}$$

$$(2), \kappa = 0: x_2 = 0,16\text{m}$$

Άρα το σημείο Σ έχει τετμημένη 0,08m. Επειδή τα δύο σημεία έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης και είναι συμφασικά η απόσταση ανάμεσα τους θα είναι σταθερή και ίση με

$$d = 0,16\text{m} - 0,08\text{m} = 0,08\text{m}$$

## 12.Δ.15

α. Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι

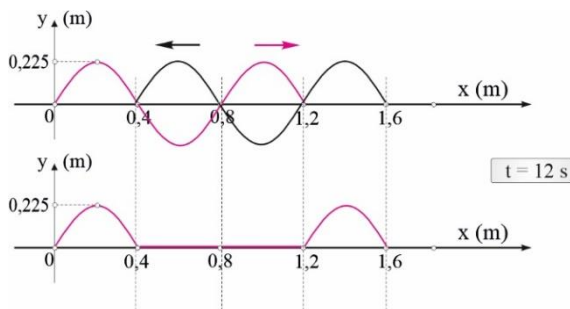
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0,1\text{m/s}}{\frac{1}{8}\text{Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,8\text{m}$$

Η περίοδος των κυμάτων είναι  $T=1/f=8\text{s}$ .

Τη χρονική στιγμή  $t_1=12\text{s}$  κάθε κύμα έχει προχωρήσει κατά

$$\Delta x = v\Delta t = 0,1\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12\text{s} \Rightarrow \Delta x = 1,2\text{m} \text{ που είναι ίσο με } \lambda + \frac{\lambda}{2}.$$

Τα δύο στιγμιότυπα θα είναι όπως στο σχήμα. Στην περιοχή  $0,4\text{m} \leq x \leq 1,2\text{m}$  τα δύο κύματα έχουν αντίθετες απομακρύνσεις, οπότε συμβαίνει αναιρετική συμβολή. Στις περιοχές  $0\text{m} \leq x < 0,4\text{m}$  και  $1,2\text{m} < x \leq 1,6\text{m}$  τα σημεία ταλαντώνονται εξαιτίας του ενός μόνο κύματος. Το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο κυμάτων δείχνεται στο σχήμα.



β. Τη χρονική στιγμή  $t_2=14s$  κάθε κύμα έχει προχωρήσει επιπλέον κατά  $0,2m$  που είναι ίσο με  $\lambda/4$ .

Τα δύο στιγμιότυπα θα είναι όπως στα σχήματα. Για την περιοχή  $0,2m \leq x \leq 1,4m$  τα δύο κύματα έχουν ίδιες απομακρύνσεις, οπότε συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Στις περιοχές  $0m \leq x < 0,2m$  και  $1,4m < x \leq 1,6m$  τα σημεία ταλαντώνονται εξαιτίας του ενός μόνο κύματος. Το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο κυμάτων δείχνεται στο σχήμα.

γ. Η χρονική στιγμή που θα σχηματιστεί στάσιμο κύμα κατά μήκος όλης της χορδής AB είναι

$$t = \frac{L}{v} = \frac{1,6m}{0,1m/s} \Rightarrow t = 16s$$

Η απόσταση AB είναι ίση με  $2\lambda$ . Όταν το κύμα που κατευθύνεται προς τα αρνητικά φτάνει στο σημείο A, αυτό έχει εκτελέσει δύο πλήρεις ταλαντώσεις (έχει φάση  $4\pi \text{ rad}$ ) με αποτέλεσμα στο σημείο A να συμβεί ενισχυτική συμβολή, και να σχηματιστεί κοιλία. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο B.

Η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

Με το  $x$  να μετρά από την κοιλία A η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow y = 0,15 \cdot \sin 2,5\pi x \cdot \eta \mu \frac{\pi}{4}(t - 16) \text{ (S.I.)}, t \geq 16s$$

δ. Οι θέσεις που σχηματίζονται κοιλίες πάνω στη χορδή είναι:

$$x = \kappa \frac{\lambda}{2}$$

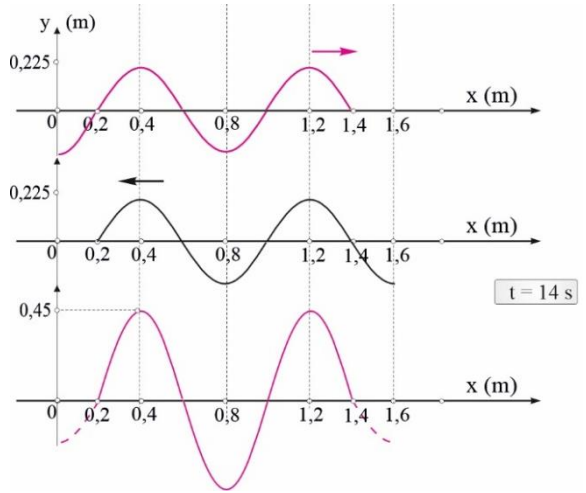
$$\kappa = 0, x_1 = 0m$$

$$\kappa = 1, x_2 = 0,4m$$

$$\kappa = 2, x_3 = 0,8m$$

$$\kappa = 3, x_4 = 1,2m$$

$$\kappa = 4, x_5 = 1,6m$$



ε. Δύο διαδοχικές κοιλίες είναι σε αντίθεση φάσης, άρα η μέγιστη απόσταση ανάμεσα τους είναι όταν αυτές βρίσκονται σε ακραίες θέσεις

$$d_{\max} = \sqrt{(4\lambda)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \Rightarrow d_{\max} = \sqrt{(4 \cdot 0,075\text{m})^2 + \left(\frac{0,8\text{m}}{2}\right)^2} \Rightarrow d_{\max} = 0,5\text{m}$$

### 12.Δ.16

α. Από τη φάση ταλάντωσης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή  $t=0\text{s}$  βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$\varphi_M = \frac{2\pi x_K}{\lambda} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi \cdot 2\text{m}}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4\text{m}$$

β. Για την ταχύτητα του σημείου Μ τη στιγμή  $t=0\text{s}$  έχουμε

$$v_M = \omega A \sin \varphi_M \Rightarrow v_M = \omega A \sin \pi \Rightarrow v_M = -\omega A \Rightarrow |v_M| = \omega A \Rightarrow \omega A = 0,2\pi \text{ m/s} \quad (1)$$

Για τη φάση ταλάντωσης του σημείου Λ τη χρονική στιγμή  $t=0\text{s}$  ισχύει

$$\varphi_\Lambda - \varphi_M = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_M}{\lambda} \Rightarrow \varphi_\Lambda - \pi \text{ rad} = 2\pi \frac{(3\text{m} - 2\text{m})}{4\text{m}} \Rightarrow \varphi_\Lambda = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Για την επιτάχυνση του σημείου Λ τη στιγμή  $t=0\text{s}$  έχουμε

$$a_\Lambda = -\omega^2 A \sin \varphi_\Lambda \Rightarrow 0,2\pi^2 = -\omega^2 A \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \omega^2 A = 0,2\pi^2 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

Διαιρούμε τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη και έχουμε

$$\frac{\omega^2 A}{\omega A} = \frac{0,2\pi^2}{0,2\pi} \Rightarrow \omega = \pi \text{ rad/s}$$

Η συχνότητα του κύματος είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 0,5\text{Hz}$$

και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$$v = \lambda \cdot f = 4\text{m} \cdot 0,5\text{s}^{-1} \Rightarrow v = 2\text{m/s}$$

γ. Από την (1) το πλάτος ταλάντωσης είναι

$$A = \frac{0,2\pi}{\omega} = \frac{0,2\pi \text{ m/s}}{\pi \text{ rad/s}} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Άρα οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων είναι:

$$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ. Μέχρι τη στιγμή  $t=4\text{s}$  στάσιμο κύμα δημιουργείται σε απόσταση  $vt = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} = 8\text{m}$  εκατέρωθεν της θέσης  $x=0\text{m}$ , δηλαδή στην περιοχή  $-8\text{m} \leq x \leq 8\text{m}$ . Για τον αριθμό των δεσμών στην περιοχή αυτή έχουμε

$$-8\text{m} \leq (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} \leq 8\text{m} \Rightarrow -8\text{m} \leq (2\kappa + 1)\frac{4\text{m}}{4} \leq 8\text{m} \Rightarrow -4,5 \leq \kappa \leq 3,5$$

$$\kappa = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Άρα συνολικά υπάρχουν 8 δεσμοί.

ε. Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο, βρίσκουμε τη στιγμή  $t=4\text{s}$  την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σημείου που βρίσκεται στη θέση  $x=0\text{m}$ , που είναι κοιλία

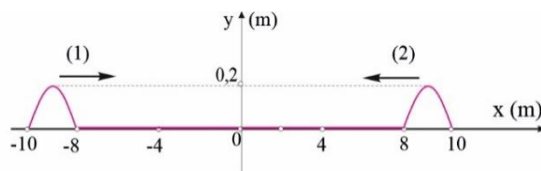
$$y_0 = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t \Rightarrow y_0 = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 \cdot \eta\mu 4\pi \text{ (m)} \Rightarrow y_0 = 0\text{m}$$

$$v_0 = \omega A_0' \sigma\upsilon\nu\omega t = 2\omega A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_0}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow v_0 = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 4\pi \text{ (m/s)} \Rightarrow v_0 = 0,4\pi \text{ (m/s)} > 0$$

Άρα η κοιλία που είναι στη θέση  $x=0\text{m}$  έχει τη στιγμή  $t=4\text{s}$  μηδενική απομάκρυνση και φορά κίνησης προς τα πάνω. Στις θέσεις  $-10\text{m} \leq x < -8\text{m}$  και  $8\text{m} < x \leq 10\text{m}$  υπάρχουν μόνο τρέχοντα κύματα. Συνολικά η συνάρτηση που περιγράφει τις απομακρύνσεις είναι

$$y = \begin{cases} 0,2\eta\mu 2\pi(2 - 0,25x) \text{ (S.I.)}, & -10\text{m} \leq x < -8\text{m} \\ 0\text{m}, & -8\text{m} \leq x \leq 8\text{m} \\ 0,2\eta\mu 2\pi(2 + 0,25x) \text{ (S.I.)}, & 8\text{m} < x \leq 10\text{m} \end{cases}$$

και η γραφική παράσταση θα είναι όπως στο σχήμα.



## 12.Δ.17

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου  $y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

$$2A=2m \text{ ή } A=1m,$$

η περίοδος είναι  $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4s$

και το μήκος κύματος είναι  $\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \Rightarrow \lambda = 1m.$

H οριζόντια απόσταση των δύο κοιλιών είναι  $\Delta x = 3 \frac{\lambda}{2} = 1,5m.$

Οι δύο κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, επειδή έχουν ανάμεσά τους περιττό αριθμό δεσμών. Έτσι τη χρονική στιγμή  $t_1=5/3 s$ , η μία κοιλία θα έχει απομάκρυνση

$$y_1 = 2A \cdot \eta\mu \frac{\pi t_1}{2} = 2A \cdot \eta\mu \frac{\pi \cdot \frac{5}{3}}{2} = A = 1m$$

ενώ η άλλη κοιλία θα έχει απομάκρυνση

$$y_2 = -2A \cdot \eta\mu \frac{\pi t_1}{2} = -2A \cdot \eta\mu \frac{\pi \cdot \frac{5}{3}}{2} = -A = -1m$$

Άρα η κατακόρυφη απόστασή τους είναι  $\Delta y = 2A = 2m$  οπότε η απόστασή τους είναι

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1,5m)^2 + (2m)^2} \Rightarrow d = 2,5m$$

β. Τα δύο σημεία Μ και Λ έχουν πλάτη ταλάντωσης:

$$|A'_M| = 2A \cdot |\sin 2\pi x_M| = 2 \left| \sin 2\pi \frac{5}{3} \right| m \Rightarrow |A'_M| = 1m$$

$$|A'_\Lambda| = 2A \cdot |\sin 2\pi x_\Lambda| = 2 \left| \sin 2\pi \cdot 4 \right| m \Rightarrow |A'_\Lambda| = 2m$$

και ο λόγος των ενεργειών τους είναι

$$\frac{E_M}{E_A} = \frac{\frac{1}{2}D|A'_M|^2}{\frac{1}{2}D|A'_A|^2} = \frac{1}{4}$$

γ. Είναι  $A'_M = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x_M = 2\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{5}{3}m \Rightarrow A'_M = -1m$

$$A'_A = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x_A = 2m$$

κατά συνέπεια οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο σημείων είναι:

$$y_M = A'_M \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{2} = -1\eta\mu \frac{\pi t}{2} \Rightarrow y_M = 1\eta\mu \left( \frac{\pi t}{2} + \pi \right) \quad (\text{S.I.})$$

$$y_A = A'_A \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{2} = 2\eta\mu \frac{\pi t}{2} \quad (\text{S.I.})$$

και τα δύο σημεία έχουν  $\Delta\phi = \pi \text{rad}$ .

δ. Η οριζόντια απόσταση των δύο σημείων είναι  $\Delta x = x_A - x_M = 7/3m$ .

Τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης και η μέγιστη κατακόρυφη απόστασή τους είναι

όταν βρεθούν στις ακραίες τους θέσεις, άρα  $\Delta y_{\max} = |A'_M| + |A'_A| = 3m$ .

Άρα η μέγιστη απόστασή τους είναι

$$r_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_{\max})^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}m\right)^2 + (3m)^2} \Rightarrow r_{\max} = \frac{\sqrt{130}}{3}m$$

### 12.Δ.18

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου  $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T}t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

$$2A = 0,2m \text{ ή } A = 0,1m,$$

$$\text{η περίοδος είναι } \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = 8s$$

και το μήκος κύματος είναι  $\frac{2\pi}{\lambda} = \pi \Rightarrow \lambda = 2m$ .

Τα σημεία που έχουν μέγιστη ταχύτητα  $v_{\max} = 0,025\pi m/s$ , ταλαντώνονται με πλάτος

$$v_{\max} = \omega \cdot |A'| = \frac{2\pi}{T} \cdot |A'| \Rightarrow |A'| = A = 0,1\text{m}$$

Τα σημεία Μ και Λ είναι κοιλίες, αφού  $x_M = 3\text{m} = 3\lambda/2$  και  $x_L = 6\text{m} = 6\lambda/2$ . Η απόστασή τους είναι  $\Delta x = 3\lambda/2$ , δηλαδή ίση με τρεις ατράκτους μισού μήκους κύματος καθεμιά. Σε κάθε άτρακτο υπάρχουν δύο σημεία με πλάτος μισό μιας κοιλίας, άρα συνολικά υπάρχουν 6 σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστη ταχύτητα  $v_{\max} = 0,025\pi$  m/s.

β. Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 5\text{s}$  το σημείο Μ έχει απομάκρυνση

$$y = A_M \cdot \eta\mu \frac{\pi t_1}{4} = A_M \cdot \eta\mu \frac{\pi 5}{4} \Rightarrow y = -A_M \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια του σημείου Μ είναι

$$\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{\frac{1}{2} D A_M'^2 - \frac{1}{2} D y^2}{\frac{1}{2} D y^2} = \frac{A_M'^2 - \left(-A_M' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(-A_M' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = 1$$

γ. Όταν το σημείο Μ έχει απομάκρυνση  $y_M = 0,1\text{m}$ , τότε ο όρος ημωτ έχει τιμή που είναι ίση με

$$y_M = 0,2 \cdot \text{συν}\pi x_M \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{4} \Rightarrow 0,1\text{m} = -0,2\text{m} \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{4} \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi t}{4} = -\frac{1}{2}$$

Η απομάκρυνση του σημείου Σ την ίδια στιγμή είναι

$$y_\Sigma = 0,2 \cdot \text{συν}\pi x_\Sigma \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{4} = 0,2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y_\Sigma = 0,05\text{m}$$

δ. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει

$$v = \lambda f = \lambda' f' = 0,25\text{m/s} \quad (1)$$

Οι θέσεις των δεσμών δίνονται από τη σχέση  $x_\Delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}$ .

Αν θέλουμε το σημείο Μ να είναι ο 3<sup>ος</sup> δεσμός πρέπει

$$x_M = (2 \cdot 2 + 1) \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow 3\text{m} = \frac{5\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{12}{5}\text{m} \Rightarrow \frac{v}{f'} = \frac{12}{5}\text{m} \Rightarrow f' = \frac{5}{48}\text{Hz}$$

και το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας είναι

$$\pi\% = \frac{f' - f}{f} 100\% = \frac{\frac{5}{48} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} 100\% \Rightarrow \pi\% = -\frac{100}{6}\%$$

## 12.Δ.19

α. Οι θέσεις των κοιλιών είναι  $x_k = k \frac{\lambda}{2}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  Οι κοιλίες που είναι συμφασικές με την κοιλία στη θέση  $x=0m$ , είναι όσες αντιστοιχούν σε  $k$  άρτιο. Αν  $k$  περιττός έχουμε κοιλίες σε αντίθεση φάσης με την κοιλία στη θέση  $x=0m$ . Άρα η 2<sup>η</sup> κοιλία είναι αυτή που βρίσκεται στη θέση  $x=3\lambda/2=d$  και προκύπτει  $\lambda=0,2m$ .

Η ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων είναι

$$v = \lambda f = 1m / s$$

β. Η οριζόντια απόσταση των δύο κοιλιών είναι

$$\Delta x = 3 \frac{\lambda}{2} = 0,3m$$

Η μέγιστη κατακόρυφη απόστασή τους είναι όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους και είναι

$$\Delta y = 2A + 2A = 0,4m$$

Άρα η μέγιστη απόστασή τους είναι

$$d_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0,3m)^2 + (0,4m)^2} \Rightarrow d_{\max} = 0,5m$$

γ. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του  $\Lambda$  έχουμε

$$y_{\Lambda} = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{T} t = 0,2 \sin \frac{2\pi \frac{1}{3}}{0,2} \eta \mu 10\pi t \Rightarrow$$

$$y_{\Lambda} = -0,1 \eta \mu 10\pi t \Rightarrow -0,05 = -0,1 \eta \mu 10\pi t \Rightarrow \eta \mu 10\pi t = \frac{1}{2} = \eta \mu \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Η 1}^{\text{η}} \text{ λύση δίνει την 1}^{\text{η}} \text{ φορά που είναι } 10\pi t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{60} s$$

$$\text{και η 2}^{\text{η}} \text{ λύση δίνει τη 2}^{\text{η}} \text{ φορά που είναι } 10\pi t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{12} s.$$

δ. Για το σημείο  $\Lambda$  είναι

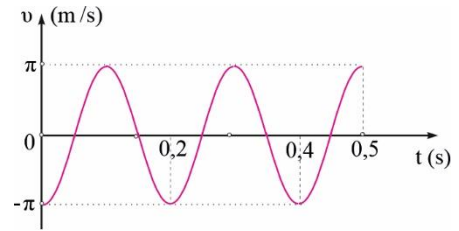
$$A'_{\Lambda} = 2A \cdot \sin 10\pi x_{\Lambda} = 0,2 \sin 10\pi \frac{1}{3} \Rightarrow A'_{\Lambda} = -0,1m$$

Η εξίσωση της ταχύτητας για το σημείο Λ είναι

$$v = A'_\Lambda \omega \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t = -0,1 \cdot 10\pi \cdot \sin 10\pi t \Rightarrow$$

$$v = -\pi \cdot \sin 10\pi t \Rightarrow v = \pi \cdot \sin(10\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα δίνεται στο σχήμα.



### 12.Δ.20

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου  $y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{T} t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

$$2A = 0,2\text{m} \text{ ή } A = 0,1\text{m}, \omega = \pi \text{rad/s},$$

η περίοδος είναι  $\frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 2\text{s}$

και το μήκος κύματος είναι  $\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \Rightarrow \lambda = 1\text{m}.$

Η μέγιστη επιτάχυνση μιας κουλίας είναι

$$\alpha_{\max} = \omega^2 \cdot 2A = (\pi)^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \alpha_{\max} = 2\text{m/s}^2$$

β. Η απομάκρυνση των σημείων θα ισούται με A. Άρα

$$y = 0,2 \cdot \sin 2\pi x \cdot \eta \mu \pi t_1 = A \Rightarrow 0,2 \cdot \sin 2\pi x \cdot \eta \mu \frac{5\pi}{6} = 0,1 \Rightarrow$$

$$\sin 2\pi x = 1 = \sin 0 \Rightarrow 2\pi x = 2\kappa\pi \Rightarrow x = \kappa\text{m}$$

και τα ζητούμενα σημεία είναι στις θέσεις:

$$\kappa = 0, x_0 = 0\text{m}, \quad \kappa = 1, x_1 = 1\text{m} = \lambda$$

$$\kappa = 2, x_2 = 2\text{m} = 2\lambda \quad \kappa = 3, x_3 = 3\text{m} = 3\lambda$$

γ. Από τη γενική εξίσωση της ταχύτητας, για το σημείο Λ έχουμε

$$v_\Lambda = 2A\omega \cdot \sin \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow v_\Lambda = 0,2\pi \cdot \sin \frac{2\pi \cdot \frac{5}{6}}{1} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{5}{6} \right) \Rightarrow$$

$$v_\Lambda = 0,2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow v_\Lambda = -0,05\pi\sqrt{3}\text{m/s}$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dK}{dt} = F_{\text{επ}} \cdot v = -m\omega^2 y \cdot v_A \quad (1)$$

Η απομάκρυνση του Α εκείνη τη στιγμή είναι

$$y = 0,2 \cdot \sin 2\pi x_A \cdot \eta \mu \pi t_1 = 0,2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 5}{1} \cdot \eta \mu \left( \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{5}{6} \right) = 0,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0,05 \text{ m}$$

και η σχέση (1) δίνει

$$\frac{dK}{dt} = -m\omega^2 y \cdot v_A = -\left(2 \cdot 10^{-3}\right) \cdot \pi^2 \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right) \cdot \left(-5 \cdot 10^{-2} \pi \sqrt{3}\right) \text{ J/s} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5 \cdot 10^{-5} \pi \sqrt{3} \text{ J/s}$$

### 12.Δ.21

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου  $y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{T} t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

$$2A = 0,1 \text{ m} \text{ ή } A = 0,05 \text{ m}, \omega = \pi/2 \text{ rad/s},$$

η περίοδος είναι  $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$

και το μήκος κύματος είναι  $\frac{2\pi}{\lambda} = \pi \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}.$

Οι θέσεις των κοιλιών δίνονται από τη σχέση  $x_K = \kappa \frac{\lambda}{2}.$

Η 1η κοιλία βρίσκεται στη θέση  $x=0 \text{ m}$  και για την άλλη ακραία κοιλία είναι

$$x_K \leq L \Rightarrow \kappa \frac{\lambda}{2} \leq 6,5 \text{ m} \Rightarrow \kappa \frac{2 \text{ m}}{2} \leq 6,5 \text{ m} \Rightarrow \kappa \leq 6,5$$

άρα για  $\kappa=6$ , η τελευταία κοιλία βρίσκεται στη θέση  $x=6\lambda/2=6 \text{ m}$ , που είναι και η μέγιστη απόσταση των δύο ακραίων κοιλιών του μέσου καθώς αυτές βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

β. Είναι  $A'_M = 2A \cdot \sin \pi x_M = 0,1 \sin \pi \frac{13}{3} \text{ m} \Rightarrow A'_M = 0,05 \text{ m}$

$$A'_A = 2A \cdot \sin \pi x_A = 0,1 \sin 5,25\pi \Rightarrow A'_A = -0,05\sqrt{2} \text{ m}$$

κατά συνέπεια οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο σημείων είναι:

$$y_M = A'_M \cdot \eta \mu \frac{\pi t}{2} = 0,05 \eta \mu \frac{\pi t}{2} \quad (\text{S.I.})$$

$$y_A = A'_A \cdot \eta \mu \frac{\pi t}{2} = -0,05\sqrt{2} \eta \mu \frac{\pi t}{2} \Rightarrow y_A = 0,05\sqrt{2} \eta \mu \left( \frac{\pi t}{2} + \pi \right) \quad (\text{S.I.})$$

και τα δύο σημεία έχουν  $\Delta\phi = \pi \text{rad}$ .

γ. Τα σημεία που έχουν μέγιστη επιτάχυνση  $a_{\max} = 0,25 \text{m/s}^2$ , ταλαντώνονται με πλάτος

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot |A'| = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot |A'| \Rightarrow |A'| = 0,1 \text{m}, \text{ άρα είναι κοιλίες.}$$

Όπως είδαμε στο ερώτημα α, αυτές είναι 7, από  $\kappa=0$  μέχρι  $\kappa=6$ .

δ. Η αμέσως μεγαλύτερη συχνότητα  $f'$ , σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής,  $v = \lambda f$ , οδηγεί στο αμέσως μικρότερο μήκος κύματος  $\lambda'$  και στη χορδή θα δημιουργηθεί μία άτρακτος μισού κύματος περισσότερο από πριν. Είχαν σχηματιστεί στη χορδή 6,5 άτρακτοι, τώρα θα σχηματιστούν 7,5 άτρακτοι, οπότε το μήκος της χορδής θα είναι

$$L = 7 \frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{15\lambda'}{4} = \frac{15v}{4f'} = \frac{15\lambda f}{4f'} \Rightarrow 6,5 \text{m} = \frac{15 \cdot 2 \text{m} \cdot 0,25 \text{Hz}}{4f'} \Rightarrow f' = \frac{15}{52} \text{Hz}$$

## 12.Δ.22

α. Από την περίοδο βρίσκουμε την κυκλική συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{4} \text{rad/s} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$$

Από τη μέγιστη ταχύτητα βρίσκουμε το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{20}{\frac{\pi}{2}} \text{m} = 0,1 \text{m}$$

Στο ένα άκρο της χορδής βρίσκεται ο πέμπτος δεσμός. Από τη σχέση που δίνει τις θέσεις των δεσμών θα βρούμε το μήκος κύματος. Για  $\kappa=4$  παίρνουμε

$$x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = (2 \cdot 4 + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{9} \Rightarrow \lambda = \frac{4 \cdot 4,5}{9} \text{m} = 2 \text{m}$$

Άρα η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων είναι

$$v = \lambda f \Rightarrow v = 2 \cdot \frac{\pi}{2\pi} \text{ m/s} \Rightarrow v = 0,5 \text{ m/s}$$

β. Σε χρονικό διάστημα  $\Delta t = 10\text{s}$  η κάθε κοιλία εκτελεί

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{10\text{s}}{4\text{s}} = 2,5 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Επομένως το μήκος διαδρομής που έχει κάνει είναι

$$s = 8A \cdot 2,5 \Rightarrow s = 20A \Rightarrow s = 20 \cdot 0,1\text{m} = 2\text{m}$$

γ. Η εξίσωση της επιτάχυνσης όλων των σημείων του μέσου συναρτήσει του χρόνου είναι

$$a = -\omega^2 y = -\omega^2 2A \cdot \text{συν} \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow a = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 2 \cdot 0,1 \cdot \text{συν} \frac{2\pi x}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2} t \Rightarrow$$

$$a = -0,5 \text{συν}\pi x \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t \quad (\text{S.I.})$$

δ. Το σημείο έχει πλάτος  $0,1\text{m}$  και είναι το δεύτερο συμφασικό του Ο άρα θα έχουμε

$$A' = 2A \text{συν} \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow 0,1\text{m} = 0,2\text{m} \text{συν} \frac{2\pi x}{2} \Rightarrow \text{συν}\pi x = \text{συν} \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} & (1) \\ \pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

$$(1), k=0: x_1 = \frac{1}{3} \text{ m}$$

$$(2), k=1: x_2 = \frac{5}{3} \text{ m}$$

Άρα το σημείο βρίσκεται στη θέση  $x_2 = 5/3\text{m}$ .

### 12.Δ.23

α. Το σημείο Σ είναι συμφασικό με το Ο και έχει τετμημένη

$$x_{\Sigma} = (2 \cdot 1 + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{12} \Rightarrow x_{\Sigma} = (2 \cdot 1 + 1) \frac{1}{4} \text{ m} + \frac{1}{12} \text{ m} \Rightarrow x_{\Sigma} = \frac{3}{4} \text{ m} + \frac{1}{12} \text{ m} = \frac{5}{6} \text{ m}$$

Η απομάκρυνση του σημείου Σ τη χρονική στιγμή  $t_1 = 3\text{s}$  είναι

$$y_{\Sigma} = 0,5 \cdot \text{συν} 2\pi \frac{5}{6} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{4} \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \Rightarrow y_{\Sigma} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ m}$$

β. Η συνάρτηση που δίνει την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων Σ και Ο σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$\Delta y = y_O - y_\Sigma \Rightarrow \Delta y = 0,5 \cdot \sin 0 \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{4} - 0,5 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 5}{6} \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{4} \Rightarrow \Delta y = 0,5\eta\mu \frac{\pi t}{4} - 0,25\eta\mu \frac{\pi t}{4} \Rightarrow$$

$$\Delta y = 0,25\eta\mu \frac{\pi t}{4} \text{ (S.I.)}$$

γ. Τα σημεία που ταλαντώνονται με ίδια ενέργεια με το Σ στο διάστημα  $0\text{m} \leq x \leq x_\Sigma = \frac{5}{6}\text{m}$  είναι

αυτά που έχουν ίδιο πλάτος με το Σ, δηλαδή  $|A'| = 0,5 \cdot \left| \sin 2\pi \frac{5}{6} \right| \text{m} = 0,25\text{m}$ , ανεξάρτητα εάν είναι συμφασικά ή αντιφασικά με αυτό. Οπότε έχουμε

$$A' = 0,5 \cdot \sin 2\pi x \Rightarrow \pm 0,25 = 0,5 \cdot \sin 2\pi x \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\pi x = \frac{1}{2} & (1) \\ \sin 2\pi x = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) : \sin 2\pi x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} & (3) \\ 2\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} & (4) \end{cases}$$

$$(3), k = 0 : x_1 = \frac{1}{6}\text{m}$$

$$(4), k = 1 : x_\Sigma = \frac{5}{6}\text{m}$$

$$(2) : \sin 2\pi x = \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} & (5) \\ 2\pi x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} & (6) \end{cases}$$

$$(5), k = 0 : x_2 = \frac{1}{3}\text{m}$$

$$(6), k = 1 : x_3 = \frac{2}{3}\text{m}$$

Άρα τα εν λόγω σημεία απέχουν από την αρχή του άξονα  $1/6\text{ m}$ ,  $1/3\text{ m}$ ,  $2/3\text{ m}$ .

δ. Για την αμέσως μεγαλύτερη περίοδο των τρεχόντων κυμάτων επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή το μήκος κύματος θα είναι το αμέσως μεγαλύτερο. Πριν την αλλαγή της περιόδου, το Σ βρισκόταν αμέσως δεξιότερα του 2<sup>ου</sup> δεσμού, που ήταν στη θέση

$$x_{2\lambda} = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} = 3 \frac{\lambda}{4} = 0,75\text{m}$$

Μετά την αύξηση του μήκους κύματος το σημείο Σ θα γίνει ο 2<sup>ος</sup> δεσμός, άρα

$$x_{\Sigma} = 3 \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{4x_{\Sigma}}{3} \Rightarrow \lambda' = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 6} \text{m} = \frac{10}{9} \text{m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{1}{8} \text{m/s}$$

και η νέα περίοδος θα είναι

$$T' = \frac{\lambda'}{v} \Rightarrow T' = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{1}{8}} \text{s} \Rightarrow T' = \frac{80}{9} \text{s}$$

### 12.Δ.24

α. Από τη χρονική στιγμή που ξεκινάει να ταλαντώνεται το σημείο Γ βρίσκουμε την ταχύτητα των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο

$$v = \frac{x_{\Gamma}}{t_{\Gamma}} = \frac{0,8}{4} \text{m/s} \Rightarrow v = 0,2 \text{m/s}$$

β. Το μήκος της χορδής είναι

$$v = \frac{L - x_{\Gamma}}{t_B} \Rightarrow 0,2 \text{m/s} = \frac{L - 0,8 \text{m}}{12 \text{s}} \Rightarrow L = 3,2 \text{m}$$

γ. Από το διάγραμμα η περίοδος είναι

$$T = (12 - 4) \text{s} = 8 \text{s}$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} \text{rad/s} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{rad/s}$$

Το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = vT = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8 \text{s} \Rightarrow \lambda = 1,6 \text{m}$$

και το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων είναι  $A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \omega t \Rightarrow y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{\pi x}{0,8} \cdot \eta \mu \frac{\pi}{4} t \quad (\text{S.I.}), \quad -1,6 \text{ m} \leq x \leq 1,6 \text{ m}$$

δ. Τα σημεία που είναι συμφασικά με το Ο τη χρονική στιγμή  $t_1' = 2\text{s}$  έχουν φάση ταλάντωσης

$$\varphi = \omega t_1' = \frac{\pi}{4} t_1' = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

και τα σημεία που είναι σε αντίθεση φάσης με το Ο τη χρονική στιγμή  $t_1' = 2\text{s}$  έχουν φάση ταλάντωσης

$$\varphi' = \frac{\pi}{4} t + \pi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Δεσμοί δημιουργούνται στις θέσεις  $x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}$ ,  $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  και  $-1,6 \text{ m} \leq x \leq 1,6 \text{ m}$

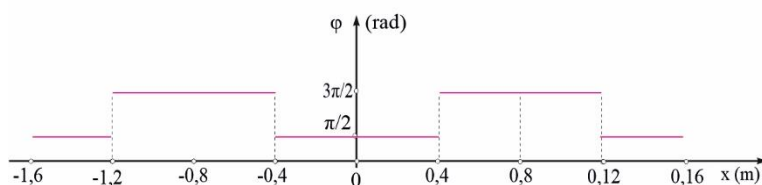
$$\kappa = 0, \quad x = \frac{\lambda}{4} = 0,4 \text{ m}$$

$$\kappa = 1, \quad x = \frac{3\lambda}{4} = 0,12 \text{ m}$$

$$\kappa = -1, \quad x = -\frac{\lambda}{4} = -0,4 \text{ m}$$

$$\kappa = -2, \quad x = -\frac{3\lambda}{4} = -0,12 \text{ m}$$

Άρα, η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων σε συνάρτηση με το  $x$  είναι όπως στο σχήμα.



### 12.Δ.25

α. Από το διάγραμμα παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

$$2A = 2 \text{ cm} \Rightarrow A = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 10 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

Το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο στιγμιότυπα είναι ίσο με  $T/4$ , επομένως η περίοδος, η γωνιακή συχνότητα και η συχνότητα είναι

$$\frac{T}{4} = 0,5\text{s} \Rightarrow T = 2\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = \pi\text{rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{\pi}{2\pi}\text{Hz} = 0,5\text{Hz}$$

Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t \Rightarrow y = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin\frac{2\pi x}{0,2} \cdot \eta\mu\pi t \Rightarrow y = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 10\pi x \cdot \eta\mu\pi t \text{ (S.I.)}$$

β. Η χρονική στιγμή  $t_1+1\text{s}$  είναι μισή περίοδος μετά τη στιγμή που μας έχει δοθεί, οπότε όλα τα σημεία του μέσου βρίσκονται σε αντίθετες απομακρύνσεις από αυτές της στιγμής  $t_1$ .

γ. Από τη φάση του σημείου Μ βρίσκουμε τη χρονική στιγμή  $t_1$

$$\varphi_M = \omega t + \pi = \pi t + \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \pi t_1 + \pi \Rightarrow t_1 = 0,5\text{s}$$

Άρα η φάση του Μ τη χρονική στιγμή  $t_1+1\text{s}=1,5\text{s}$  είναι

$$\varphi_M = (1,5\pi + \pi)\text{rad} \Rightarrow \varphi_M = 2,5\pi\text{rad}$$

Την ίδια στιγμή η φάση του Ν είναι

$$\varphi_N = \omega(t_1 + 1\text{s}) = \pi(t_1 + 1\text{s}) \Rightarrow \varphi_N = 1,5\pi\text{rad}$$

δ. Αν η συχνότητα ταλάντωσης των μορίων της χορδής διπλασιαστεί, θα γίνει

$$f' = 2f = 2 \cdot 0,5\text{Hz} \Rightarrow f' = 1\text{Hz}$$

$$\omega' = 2\pi f' = 2\pi\text{rad/s}$$

Το πλάτος δεν αλλάζει, άρα η νέα μέγιστη ταχύτητα θα είναι

$$|v_{\max}| = \omega'|A'_K| \Rightarrow |v_{\max}| = \omega'2A \left| \sin\frac{2\pi x_K}{\lambda} \right| \Rightarrow |v_{\max}| = 2 \cdot 2\pi \cdot 10^{-2} \left| \sin\frac{2\pi \cdot 10}{20} \right| \text{m/s} \Rightarrow |v_{\max}| = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{m/s}$$

