

## Θέματα Γ

## 6.Γ.1

$$\alpha. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Το σώμα τη χρονική στιγμή  $t = 0s$  διέρχεται από τη θέση  $x=A$ , οπότε υπάρχει αρχική φάση

$$A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

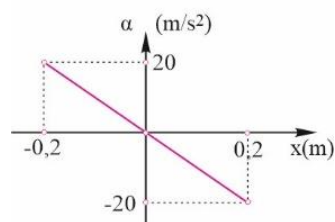
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi s} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$\text{Άρα } x = 0,2\eta\mu(10t + \pi/2) \text{ (SI)}$$

$$\beta. F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -m\omega^2 x \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = 20 \text{ N}$$

$$\gamma. \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -100x \text{ (SI)}, -0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m}$$

$$\delta. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx, \quad x = 0 \text{ m} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \text{ N}$$



## 6.Γ.2

$\alpha.$  Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου στη γενική της μορφή είναι  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$  και με αντι-κατάσταση των τιμών για  $t=T/6$  βρίσκεται ότι

$$0,1\sqrt{3} = 0,2\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{6} + \varphi_0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \varphi_0\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + \varphi_0 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (1) \\ \frac{\pi}{3} + \varphi_0 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (2) \end{array} \right\}$$

Επειδή έχουμε  $x>0$  και  $v>0$ , η δεκτή λύση βρίσκεται στην ομάδα λύσεων (1) και για  $k=0$  παίρνουμε

$$\frac{\pi}{3} + \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

$$\beta. \alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{A}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$\gamma. \varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = 5t \text{ (SI)}$$

$$\delta. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -m\omega^2 x \Rightarrow x = -0,1 \text{ m}$$

$$\alpha = -\omega^2 x = -25(-0,1) \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Εναλλακτικά:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = m\alpha \Rightarrow \alpha = 2,5 \text{ m/s}^2$$

### 6.Γ.3

Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου στη γενική της μορφή είναι  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$  με αντικατάσταση των τιμών για  $t=T/12$  βρίσκεται ότι

$$5\text{cm} = 10\text{cm} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \omega t + \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Επειδή έχουμε  $x > 0$  και  $u > 0$  η φάση της ταλάντωσης τη στιγμή  $t=T/12$  θα είναι  $\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$  (1)

Όμως ο όρος  $\omega t$  την  $t=T/12$  με αριθμητική αντικατάσταση δίνει

$$\omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad (2)$$

Από τον συνδυασμό των (1) και (2) προκύπτει ότι  $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$

β. Σύμφωνα με την εκφώνηση, για δύο διαδοχικές διελεύσεις από  $x=A/2$ , πρέπει να περάσει χρονικό διάστημα  $\Delta t = 1/3 \text{ s}$ . Η πρώτη διέλευση αντιστοιχεί σε φάση  $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$  και η δεύτερη σε

φάση  $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ , οπότε έχουμε

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{5\pi}{6} \text{ rad} - \frac{\pi}{6} \text{ rad}}{\frac{1}{3} \text{ s}} \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s} \text{ και } T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

$$\gamma. F = -Dx = -m\omega^2 x \quad \text{ή} \quad F = -2 \text{ N.}$$

$$\delta. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής μεγιστοποιείται όταν  $x=-A$ , δηλαδή όταν η φάση της ταλάντωσης γίνεται  $\kappa \frac{3\pi}{2}$ ,  $\kappa=1, 2, \dots$ , οπότε η 1<sup>η</sup> φορά θα είναι όταν το σώμα αποκτήσει φάση ίση με  $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ . Άρα, έχουμε

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = 2\pi t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{3}{4} \text{ s}$$

#### 6.Γ.4

Από το σχήμα έχουμε:

$$A=0,1\text{m}, T=10\text{s} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,2\pi \text{ rad/s}$$

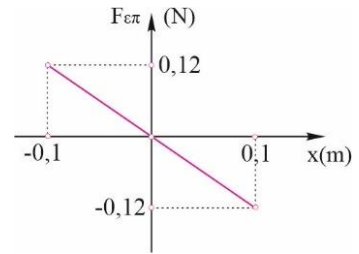
$$\alpha. v = \omega A \sin \omega t \quad \text{ή} \quad v = 0,02\pi \sin 0,2\pi t \quad (\text{S.I.})$$

$$\beta. x = A \cdot \eta \mu \omega t = 0,1 \cdot \eta \mu \left( 0,2\pi \frac{5}{6} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{ή} \quad x = 0,05\text{m}$$

$$\alpha = -\omega^2 x = -(0,2\pi)^2 \cdot 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = -0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\gamma. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = m\alpha \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -0,06 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

$$\delta. F_{\text{επ}} = -m\omega^2 x = -1,2x \quad (\text{S.I.}) \quad , \quad -0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$



#### 6.Γ.5

α. Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \quad \omega = \frac{\pi/2 \text{ rad}}{2 \text{ s}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 8\text{s}$$

$$\beta. \left( \frac{dp}{dt} \right)_{\text{max}} = \Sigma F_{\text{max}} = DA = m\omega^2 A \Rightarrow \left( \frac{dp}{dt} \right)_{\text{max}} = \frac{1}{4} \text{ kgm/s}^2$$

$$v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\text{max}}}{\omega} = \frac{0,1\pi}{\pi/4} = 0,4\text{m}$$

$$\gamma. p = mv = m\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = 0,1 \cdot \sigma \sin \left( \frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (\text{S.I.})$$

$$\xrightarrow{t=1\text{s}} p = -0,05\sqrt{2} \text{ kgm/s}$$

$$\delta. \alpha = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) = -\frac{\pi^2}{16} 0,4 \cdot \eta \mu \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

#### 6.Γ.6

α. Από την κλίση του διαγράμματος που δίνεται έχουμε

$$D = -\frac{F}{x} = -\frac{10}{-0,2} \text{ N/m} \Rightarrow D = 50 \text{ N/m}$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος, δηλαδή η επιτάχυνση, μηδενίζεται δύο φορές σε κάθε περίοδο, άρα  $\frac{T}{2} = 0,2\pi \text{ s} \Rightarrow T = 0,4\pi \text{ s}$  και

$$D = m\omega^2 \Rightarrow m = \frac{D}{\omega^2} = \frac{D}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \Rightarrow m = \frac{DT^2}{4\pi^2} = \frac{50\text{ N/m} \cdot (0,4\pi \text{ s})^2}{4\pi^2} \Rightarrow m = 2\text{ kg}$$

γ. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση  $x=-A$  για 1<sup>η</sup> φορά, η ταλάντωση έχει φάση  $3\pi/2 \text{ rad}$ , οπότε έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \varphi_0 + \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{0,4\pi} \frac{4\pi}{15} (\text{SI}) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\delta. |F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}| = Dx \quad (1)$$

Από τις σχέσεις  $x-t$ ,  $v-t$  με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 (\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t) \Rightarrow v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της ταχύτητας βρίσκουμε σε ποια απομάκρυνση το μέτρο της ταχύτητας είναι το μισό της μέγιστης τιμής

$$(2) \Rightarrow \left(\frac{\omega A}{2}\right)^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \Rightarrow \frac{A^2}{4} = A^2 - x^2 \Rightarrow |x| = \frac{A\sqrt{3}}{2} = 0,1\sqrt{3}\text{ m}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην (1) προκύπτει

$$|F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}| = 5\sqrt{3}\text{ N}$$

### 6.Γ.7

α. Σε μία τυχαία θέση του σώματος η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με τη δύναμη της βαρύτητας

$$\Sigma F = -mg_{\text{in}} = -\frac{mg_0}{R} x$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με τη συνθήκη για α.α.τ.,  $\Sigma F = -D \cdot x$ , συμπεραίνουμε ότι το σώμα εκτελεί α.α.τ. με  $D = \frac{mg_0}{R}$ .

Άρα η περίοδος της α.α.τ. είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg_0}{R}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{64 \cdot 10^3 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} \Rightarrow T = 1600\pi \text{ s}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με την ακτίνα της Γης, άρα η μέγιστη ταχύτητα θα είναι

$$v_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi}{1600\pi s} 64 \cdot 10^5 \text{ m} \Rightarrow v_{\max} = 8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα ενός δορυφόρου που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της Γης με ακτίνα ίση με αυτή της Γης προκύπτει από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης

$$\Sigma F = F_{\text{κέντρ}} \Rightarrow mg_o = m \frac{v_{\delta\phi}^2}{R} \Rightarrow v_{\delta\phi} = \sqrt{g_o R} \Rightarrow v_{\delta\phi} = \sqrt{64 \cdot 10^6} \text{ m/s} \Rightarrow v_{\delta\phi} = 8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Άρα η ταχύτητα του δορυφόρου είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

γ. Το χρονικό διάστημα για μία πλήρη περιφορά του δορυφόρου είναι

$$T_{\delta\phi} = \frac{2\pi R}{v_{\delta\phi}} \Rightarrow T_{\delta\phi} = \frac{2\pi \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ m}}{8 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \Rightarrow T_{\delta\phi} = 1600\pi \text{ s}$$

Άρα, η περίοδος του δορυφόρου είναι ίση με την περίοδο της α.α.τ.

δ. Βρίσκουμε πρώτα τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από το κέντρο της Γης.

Το σώμα την  $t=0$ s αφέθηκε από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση  $\varphi_o = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

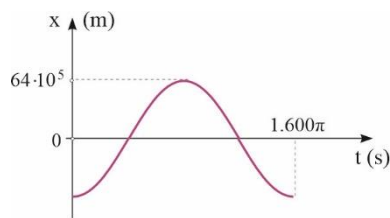
Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{10^{-2}}{8} \text{ rad/s}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με την ακτίνα της Γης, οπότε έχουμε

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow x = 64 \cdot 10^5 \eta\mu\left(\frac{10^{-2}}{8} t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από το κέντρο της Γης σε σχέση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



### 6.Γ.8

α. Φέρνουμε τη χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης στη γνωστή μορφή

$$a = -10 \sigma \nu 10 \pi t \text{ (S.I.)} \Rightarrow a = -10 \eta\mu\left(10 \pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

οπότε από τη σύγκριση με τη γενική εξίσωση έχουμε:

$$\omega^2 A = 10 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

$$\omega = 10\pi \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2 \text{ s}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Από την (1) βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$A = \frac{10}{100\pi^2} \text{ m} \Rightarrow A = 0,01 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = 0,1\pi \sin(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Οπότε, η χρονική εξίσωση της ορμής του σώματος είναι

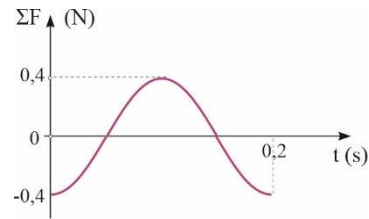
$$p = mv = m\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$p = 4\pi \cdot 10^{-3} \sin(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

β. Η χρονική εξίσωση της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκείται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = ma \Rightarrow \Sigma F = -0,4\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική της παράσταση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$$x = 10^{-2} \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Όταν το σώμα διέρχεται από την ακραία θετική θέση έχει φάση  $\pi/2$  rad. Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που για πρώτη φορά περνάει από τη θέση  $x = -5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$$x = 10^{-2} \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) = -5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10\pi t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 10\pi t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} \xrightarrow{v \leq 0, (2), k=0} 10\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 10\pi t = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 10\pi t = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{15} \text{ s}$$

Άρα η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης είναι

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t + \varphi_0) - \varphi_1 = \left(10\pi \frac{1}{15} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad} - \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

δ. Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας από τη δύναμη επαναφοράς την  $t=1/40 \text{ s}$  είναι

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma F \cdot v = -0,4 \eta \mu \left( 10\pi \frac{1}{40} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot 0,1 \pi \sigma \upsilon \nu \left( 10\pi \frac{1}{40} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{dW}{dt} = -0,04\pi \cdot \eta \mu \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{dW}{dt} = -0,04\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) J/s \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 0,02\pi J/s$$

### 6.Γ.9

α. Από την κλίση της γραφικής παράστασης βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{-\alpha}{x}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8}{0,02}} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 20 \text{ rad/s}$$

Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{20} \text{ s} \Rightarrow T = 0,1\pi \text{ s}$$

β. Βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Άρα η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς είναι

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow \Sigma F = -DA \eta \mu \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Η σταθερά επαναφοράς είναι

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 400 \text{ N/m}$$

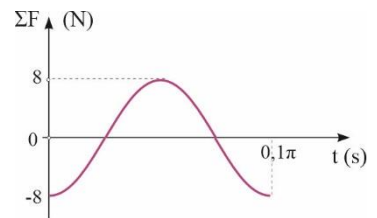
Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = 0,02 \text{ m}$$

Άρα η δύναμη είναι

$$\Sigma F = -400 \cdot 0,02 \eta \mu \left( 20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (SI)} \Rightarrow \Sigma F = -8 \eta \mu \left( 20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

και η γραφική της παράσταση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



γ. Η χρονική εξίσωση της ορμής είναι

$$p = mv \Rightarrow p = m\omega A \sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow p = 20 \cdot 0,02 \sigma \upsilon \nu \left( 20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$p = 0,4 \sigma \upsilon \nu \left( 20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

Η ορμή του σώματος την  $t = \frac{\pi}{40}$  s είναι

$$p = 0,4 \sin\left(20\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI}) \Rightarrow p = 0,4 \sin \pi \text{ kgm/s} \Rightarrow p = -0,4 \text{ kgm/s}$$

δ. Η χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -8\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 0,4 \sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -1,6\eta\mu(40t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

### 6.Γ.10

α. Ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ. σε κάθε περίοδο περνάει από τη θέση ισορροπίας του δύο φορές. Εδώ περνάει δέκα φορές σε ένα δευτερόλεπτο, οπότε το σώμα κάνει πέντε πλήρεις ταλαντώσεις, άρα έχουμε

$$f = \frac{N}{t} \Rightarrow f = \frac{5}{1} \text{ Hz} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων είναι 2A, οπότε  $A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$ .

Η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος είναι

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = \Sigma F_{\max} = m\omega^2 A = m(2\pi f)^2 A \Rightarrow \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = 0,2 \text{ kg} \cdot \left(10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,3 \text{ m} \Rightarrow \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = 6\pi^2 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$$

β. Η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, επομένως οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος είναι:

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0,3\eta\mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow v = 3\pi \sigma\upsilon\nu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

$$a = -\omega^2 A\eta\mu\omega t \Rightarrow a = -30\pi^2 \eta\mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ. Το έργο της δύναμης επαναφοράς μεταξύ δύο χρονικών στιγμών που η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη βρίσκεται από το ΘΜΚΕ

$$W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow W_{\Sigma F} = 0$$

δ. Από τις σχέσεις  $x-t$ ,  $v-t$  με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η σχέση ταχύτητας-απομάκρυνσης

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 (\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t) \Rightarrow x^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

Η αριθμητική αντικατάσταση δίνει  $x = \pm 0,15\text{m}$ .

Η 1<sup>η</sup> διεύθυνση με θετική ταχύτητα, αντιστοιχεί στο  $x_1 = 0,15\text{m}$  (1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο) και η 2<sup>η</sup> στο  $x_2 = -0,15\text{m}$  (4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο)

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = (-\omega^2 x_2) - (-\omega^2 x_1) \Rightarrow \Delta\alpha = \omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = \omega^2 (x_1 - x_2) \Rightarrow$$

$$\Delta\alpha = \left(10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)^2 (0,15\text{m} + 0,15\text{m}) \Rightarrow \Delta\alpha = 30\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 6.Γ.11

α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη γενική χρονική εξίσωση της δύναμης βρίσκουμε:

$$F_{\max} = DA = 10\text{N} \quad (1)$$

$$\omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,1 \cdot (5\pi^2)(\text{SI}) \Rightarrow D = 25\text{N/m}$$

Από την (1) βρίσκουμε το πλάτος

$$D \cdot A = 10\text{N} \Rightarrow A = \frac{10}{25}\text{m} \Rightarrow A = 0,4\text{m}$$

β. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{1}{30}\text{s}$  είναι

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\Sigma F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{-10\eta\mu\left(5\pi \frac{1}{30}\right)}{0,1} (\text{SI}) \Rightarrow \alpha = \frac{-10\eta\mu \frac{\pi}{6}}{0,1} \text{m/s}^2 \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{0,1} \text{m/s}^2 \Rightarrow \alpha = -50\text{m/s}^2$$

γ. Ο ρυθμός που προσφέρει ενέργεια η δύναμη επαναφοράς είναι

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v$$

Από τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση βρίσκουμε την ταχύτητα στη συγκεκριμένη θέση

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v = \pm 5\pi \sqrt{0,4^2 - 0,2^2} \text{ (SI)} \Rightarrow v = \pm 5\pi \sqrt{12 \cdot 10^{-2}} \text{ m/s} \Rightarrow v = \pm \pi \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Δεχόμαστε την αρνητική λύση, διότι το σώμα έχει θετική απομάκρυνση και πλησιάζει στη θέση ισορροπίας

$$v = -\pi \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Άρα

$$\frac{dW}{dt} = -D \cdot x \cdot v = -25 \cdot 0,2 \cdot (-\pi \sqrt{3}) \text{ (S.I.)} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 5\sqrt{3} \pi \text{ J/s}$$

δ. Γνωρίζουμε ότι η τελική θέση του σώματος είναι στην ακραία αρνητική απομάκρυνση, αυτό σημαίνει ότι το σώμα αρχικά βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κινείται προς τα αρνητικά. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ μεταξύ των δύο θέσεων

$$W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} \Rightarrow W_{\Sigma F} = 0 - \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = -\frac{1}{2} m (\omega A)^2 = -\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (5\pi \cdot 0,4)^2 \text{ J} = -0,05 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 0,16 \text{ J} \Rightarrow W_{\Sigma F} = -2 \text{ J}$$

### 6.Γ.12

α. Για τη θέση ισορροπίας στο ηλεκτρικό πεδίο, θέση (β), ισχύει

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή} \quad Eq = kx_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = 5 \text{ cm}$$

β. Η μόνη δύναμη που θα ασκηθεί είναι η  $F_{ελ} = -kx = -Dx$ , άρα  $D = k$  και η περίοδος είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,16}{100}} \text{ s} = 0,08\pi \text{ s}$$

$$\gamma. v_{\text{max}} = \omega A = \frac{2\pi}{0,08\pi} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\text{max}} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

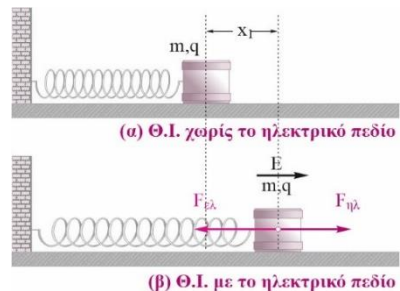
δ. Ο ρυθμός μεταβολής ταχύτητας είναι η επιτάχυνση και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η δύναμη επαναφοράς. Επομένως

$$|F| = \frac{|F_{\text{max}}|}{2} \Rightarrow |-Dx| = \frac{|-DA|}{2} \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = |\alpha| = \omega^2 x \Rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right| = \left( \frac{2\pi}{0,08\pi} \right)^2 \frac{0,05 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \Rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right| = 15,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 6.Γ.13

$$\alpha. \Sigma F = 0 \Rightarrow F_B - F_A = 0 \Rightarrow k_B x_B - k_A x_A = 0 \quad (1)$$



και παίρνοντας υπόψη ότι  $k_A = 4k_B$  προκύπτει  $4x_A = x_B$ .

Επίσης  $x_A + x_B = d = 0,5\text{m}$ , οπότε:

$$x_A = 0,1\text{m}, x_B = 0,4\text{m}$$

β. Στην τυχαία απομάκρυνση  $x$  από τη θέση ισορροπίας η ΣF που ασκείται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = k_B(x_B - x) - k_A(x_A + x) \Rightarrow \Sigma F = k_B x_B - k_A x_A - (k_B + k_A)x$$

η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$\Sigma F = -(k_B + k_A)x, \text{ άρα ικανοποιείται η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα}$$

α.α.τ. με  $D = k_B + k_A = 200\text{N/m}$  και περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\text{kg}}{200\text{N/m}}} \Rightarrow T = 0,2\pi\text{s}$$

γ. Ζητάμε το χρονικό διάστημα για να πάει το σώμα από τη θέση  $x=+A$ , στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου A που αντιστοιχεί σε απομάκρυνση  $x=-A/2$  για 1<sup>η</sup> φορά, δηλαδή θέση που αντιστοιχεί στο 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

Γράφουμε τη σχέση απομάκρυνσης – χρόνου

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Τη χρονική στιγμή  $t=0\text{s}$ , το σώμα βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε

υπάρχει αρχική φάση  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ , επίσης  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\text{rad/s}$ , οπότε έχουμε

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \pi/2)(\text{SI})$$

$$-0,1 = 0,2\eta\mu(10t + \pi/2) \Rightarrow \eta\mu(10t + \pi/2) = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 10\pi t_2 + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 10\pi t_1 + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Η 1<sup>η</sup> σειρά λύσεων αντιστοιχεί στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, ενώ η 2<sup>η</sup> σειρά λύσεων αντιστοιχεί στο 3<sup>ο</sup>, οπότε έχουμε

$$10\pi t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 10\pi t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{15}\text{s}$$

$$\delta. F_{ελ} = -Dx \Rightarrow |x| = \frac{A}{2}$$

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta \mu(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}$$

Από τη σχέση  $\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x = 1$  προκύπτει  $\sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  και

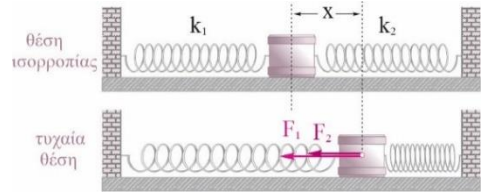
$$|v| = v_{\max} |\sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_0)| = \omega A \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |v| = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

#### 6.Γ.14

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στην τυχαία θέση είναι

$$\Sigma F = F_1 + F_2 = -k_1 x + k_2 x \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -(k_1 + k_2)x$$

Ικανοποιείται η συνθήκη  $\Sigma F = -Dx$  με  $D = k_1 + k_2$ .



$$\beta. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \Rightarrow T = 0,1\pi \text{ s}$$

$$\gamma. t = \frac{T}{4} \Rightarrow t = 0,025\pi \text{ s}$$

δ. Σε κάθε περίοδο διαγράφει μήκος τροχιάς 4A, άρα σε 2,5 περιόδους διαγράφει  $s = 10A$ .

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{(2\text{ m/s}) \cdot 0,1\pi \text{ s}}{2\pi} \Rightarrow A = 0,1\text{ m}$$

Άρα,  $s = 1\text{ m}$ .

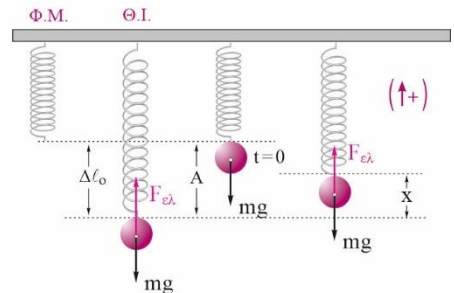
#### 6.Γ.15

α. Η θέση ισορροπίας του συστήματος  $m - k$  βρίσκεται κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά  $\Delta \ell_0$  που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta \ell_0 = 0 \quad (1)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση το σώμα ελευθερώνεται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου και το πλάτος ταλάντωσης είναι  $A = 0,1\text{ m}$ , άρα  $\Delta \ell_0 = 0,1\text{ m}$  και από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$k = \frac{mg}{\Delta \ell_0} = 150 \text{ N/m}$$



$$\beta. t = 0 \text{ s}, x = +A \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$$

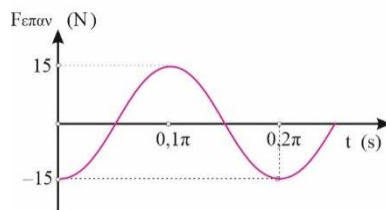
$$x = 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\gamma. F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -150 \cdot 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ N} \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -15 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

και η γραφική της παράσταση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

$$\delta. \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = \Sigma F_{\max} = kA \Rightarrow \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = 150 \text{ N/m}$$



και συμβαίνει όταν το σώμα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση, δηλαδή μετά από

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

### 6.Γ.16

α. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος m-k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά  $\Delta\ell_0$  που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} = 0,1 \text{ m}$$

Όταν η δύναμη του ελατηρίου γίνεται 30N η επιμήκυνσή του είναι

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{k} = 0,3 \text{ m}$$

Το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με τη διαφορά των δύο επιμηκύνσεων

$$A = \Delta\ell - \Delta\ell_0 \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$\beta. F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -100x, -0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m}$$

$$\gamma. F_{\varepsilon\pi} = -kx$$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Τη χρονική στιγμή  $t=0$  s, το σώμα βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε

υπάρχει αρχική φάση  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$$

Άρα η σχέση  $x-t$  γράφεται

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)} \quad (1)$$

και η  $F_{\varepsilon\pi}-t$  είναι

$$F_{\varepsilon\pi} = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

δ. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου βρίσκεται 0,1m πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, στη θέση  $x = -0,1\text{m}$ , άρα το ελατήριο είναι συμπιεσμένο για  $-0,2\text{m} < x < -0,1\text{m}$  και είναι επιμηκυμένο για  $-0,1\text{m} < x < 0,2\text{m}$ .

Πρέπει να βρούμε τις δύο χρονικές στιγμές που το σώμα περνά από τη θέση με απομάκρυνση  $x = -0,1\text{m}$ .

Από την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} -0,1 &= 0,2\eta\mu(10t + \pi/2) \Rightarrow \eta\mu(10t + \pi/2) = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{aligned} 10\pi t_2 + \frac{\pi}{2} &= 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=1} 10\pi t_2 + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow 10\pi t_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{4\pi}{30}\text{s} \\ 10\pi t_1 + \frac{\pi}{2} &= 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=0} 10\pi t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 10\pi t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{30}\text{s} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Άρα, συμπιεσμένο παραμένει για  $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{15}\text{s}$  και επιμηκυμένο για

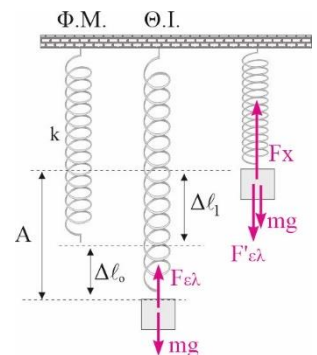
$$\Delta t = T - \frac{\pi}{15}\text{s} = \frac{2\pi}{10}\text{s} - \frac{\pi}{15}\text{s} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{15}\text{s}$$

### 6.Γ.17

α. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος  $m-k$  είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά  $\Delta\ell_0$  που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} = 0,1\text{m}$$

Μετά την άσκηση της δύναμης του χεριού, το σώμα ισορροπεί σε θέση που το ελατήριο είναι παραμορφωμένο από το φυσικό του μήκος κατά  $\Delta\ell_1$ , που είναι συμπίεση, καθώς η δύναμη του χεριού έχει μεγαλύτερο μέτρο από το βάρος του σώματος



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} - mg - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F_{\text{ελ}} - mg}{k} = \frac{40\text{N} - 10\text{N}}{100\text{N/m}} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,3\text{m}$$

Το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με την απόσταση από τη θέση ελευθέρωσης μέχρι τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, άρα  $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_0 \Rightarrow A = 0,4\text{m}$ .

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$ .

Τη χρονική στιγμή  $t=0\text{s}$ , το σώμα βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε υπάρχει αρχική φάση  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ .

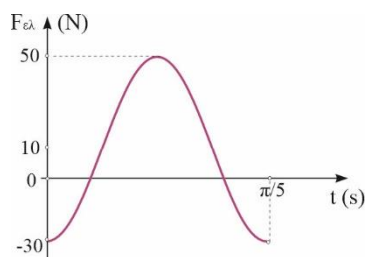
i.  $x = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ , (SI) (1)

ii.  $F_{\text{ελ}} = -40\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ , (SI)

iii.  $\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\text{ελ}} - mg = -kx \Rightarrow$

$F_{\text{ελ}} = 10 - 100x$ , (SI),  $-0,4\text{m} \leq x \leq 0,4\text{m}$

$F_{\text{ελ}} = 10 - 40\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$  (SI)



γ. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου βρίσκεται  $0,1\text{m}$  πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, στη θέση  $x=+0,1\text{m}$ , άρα το ελατήριο είναι επιμηκυμένο για  $0,1\text{m} > x > -0,4\text{m}$ .

Πρέπει να βρούμε τις δύο χρονικές στιγμές που το σώμα περνά από τη θέση με απομάκρυνση  $x=0,1\text{m}$ .

Από την (1) έχουμε

$$0,1 = 0,4\eta\mu(10t + \pi/2) \Rightarrow \eta\mu(10t + \pi/2) = \eta\mu\frac{\pi}{12} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10t_2 + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} 10t_2 + \frac{\pi}{2} = \frac{25\pi}{12} \Rightarrow 10t_2 = \frac{19\pi}{12} \Rightarrow t_2 = \frac{19\pi}{120}\text{s} \\ 10t_1 + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=0} 10t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{12} \Rightarrow 10t_1 = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow t_1 = \frac{5\pi}{120}\text{s} \end{array} \right\}$$

Άρα, επιμηκυμένο παραμένει για

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{14\pi}{120}\text{s} \Rightarrow \Delta t = \frac{7\pi}{60}\text{s}$$

6.Γ.18

α. Η θέση ισορροπίας του συστήματος m-k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά  $\Delta\ell_0$  που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow mg = k\Delta\ell_0 \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση του σώματος που απέχει x από τη θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη είναι

$$\Sigma F = mg - k(\Delta\ell_0 + x) \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -kx$$

Άρα εκτελεί α.α.τ. με  $D=k$ .

$$\beta. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Η θέση που ελευθερώνουμε το σώμα είναι ακραία θέση, άρα το πλάτος  $A=x_1=0,2\text{m}$ .

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}.$$

Τη στιγμή  $t=0\text{s}$  το σώμα αφέθηκε από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει η εξίσωση της απομάκρυνσης - χρόνου

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}), (\text{S.I.})$$

$$\gamma. x = +20\text{cm}, F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -kx = -45\text{N}$$

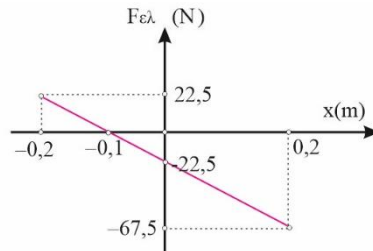
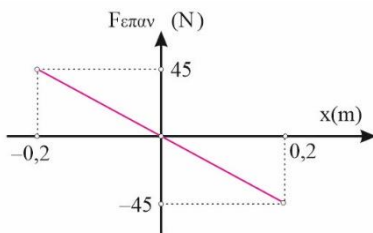
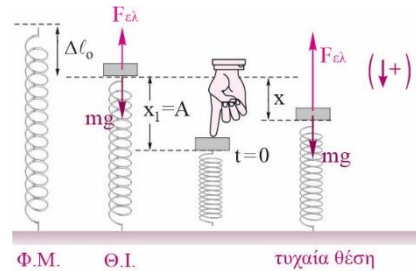
Από (1) έχουμε  $\Delta\ell = mg/k = 0,1\text{m}$ .

$$F_{\epsilon\lambda} = -k(\Delta\ell + x) \quad \text{ή} \quad F_{\epsilon\lambda} = -67,5\text{N}$$

$$\delta. F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -kx = -225x \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{Σε τυχαία θέση } x : mg + F_{\epsilon\lambda} = -kx \quad \text{ή} \quad F_{\epsilon\lambda} = -mg - kx \quad \text{ή} \quad F_{\epsilon\lambda} = -22,5 - 225x \quad (\text{S.I.})$$

και τα διαγράμματα δείχνονται στα παρακάτω σχήματα.



6.Γ.19

α. Η θέση ισορροπίας του συστήματος m-k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά  $\Delta\ell_0$  που βρίσκεται από τη σχέση  $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow mg = k\Delta\ell_0$  (1)

Στην τυχαία θέση του σώματος που απέχει x από τη θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη είναι

$$\Sigma F = mg - k(\Delta\ell_0 + x) \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -kx$$

Άρα εκτελεί α.α.τ. με  $D=k$ .

β. Η θέση που ελευθερώνουμε το σώμα είναι ακραία θέση, άρα το πλάτος  $A=d=0,1\text{m}$ .

Η γωνιακή συχνότητα είναι  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\text{rad/s}$ .

Τη στιγμή  $t=0\text{s}$  το σώμα αφέθηκε από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,1\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right), (\text{S.I.})$$

γ. Η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά όταν το σώμα φτάσει στην ακραία αρνητική θέση, άρα σε χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{20}\text{s}$$

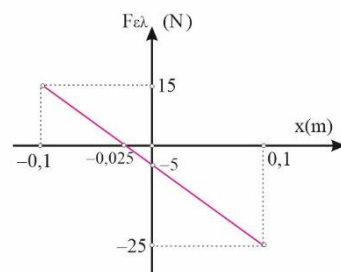
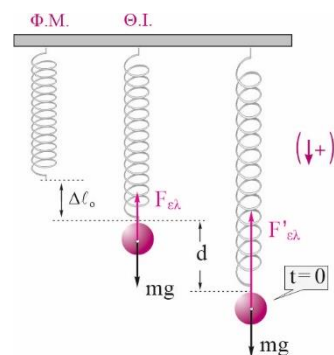
δ. Στην τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι  $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$  και η δύναμη του ελατηρίου

$$F_{ελ} = -k(\Delta\ell_0 + x) = -k\Delta\ell_0 - kx \xrightarrow{(1)} F_{ελ} = -5 - 200x \text{ (SI)}$$

$$-0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m} \quad (\text{τα θετικά προς τα κάτω})$$

ε.  $F_{(ελ)\text{max}}$  όταν  $x = -0,1\text{m}$

$$F_{(ελ)\text{max}} = -5 - 200(-0,1) \text{ (SI)} \quad \text{ή} \quad F_{(ελ)\text{max}} = 15\text{N}$$



$F_{(ελ)min}$  όταν  $x=0,1m$ .

$$F_{(ελ)min} = -5-200(0,1) \text{ (SI)} \quad \text{ή} \quad F_{(ελ)min} = -25N$$

### 6.Γ.20

α. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g = k \Delta \ell \Rightarrow \frac{m_1}{k} = \frac{\Delta \ell}{g} \quad (1)$$

Από τον τύπο της περιόδου της α.α.τ. παίρνουμε ότι

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta \ell}{g} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{T_1^2 g}{4\pi^2} = \frac{1^2 \cdot 10}{4\pi^2} \text{ (SI)} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{10}{40} m \Rightarrow \Delta \ell = 0,25m$$

β. Διαιρούμε τις περιόδους κατά μέλη και έχουμε

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}{2\pi \sqrt{\frac{3m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_2 = \sqrt{3} T_1 \Rightarrow T_2 = \sqrt{3} s$$

γ. Εάν στο άκρο του ελατηρίου τοποθετήσουμε και τα δύο σώματα μαζί η περίοδος της ταλάντωσης τους θα είναι

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{4m}{k}} \Rightarrow T' = 4\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2s$$

δ. Ο πίνακας τιμών για τη γραφική παράσταση είναι στον πίνακα.

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία γραμμή που περνάει από την αρχή των αξόνων κάτι που ήταν αναμενόμενο, καθώς το τετράγωνο της περιόδου σε συνάρτηση με τη μάζα συνδέονται με τη σχέση

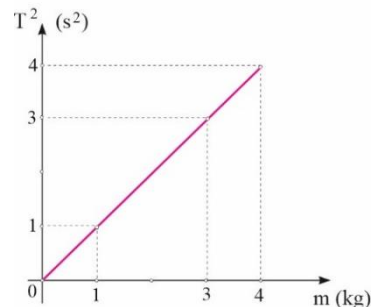
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \Rightarrow T^2 = \frac{40}{k} m \text{ (S.I.)}$$

| m (kg) | T (s)      | T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> ) |
|--------|------------|----------------------------------|
| 1      | 1          | 1                                |
| 3      | $\sqrt{3}$ | 3                                |
| 4      | 2          | 4                                |

Στην κλίση της γραφικής παράστασης αντιστοιχεί η ποσότητα

$\frac{40}{k}$ , οπότε έχουμε

$$\kappaλίση = \frac{40}{k} \Rightarrow \frac{(3-1)s^2}{(3-1)Kg} = \frac{40}{k} \Rightarrow k = 40N/m$$



## 6.Γ.21

α. Το  $\Sigma_B$  εκτελεί α.α.τ., οπότε σε κάθε θέση ισχύει  $\Sigma F_B = -D_B x$  (1) με τη γωνιακή συχνότητα του  $\Sigma_B$  να είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα του συστήματος.

$$\text{Η σταθερά επαναφοράς του } \Sigma_B \text{ είναι } D_B = m_B \omega^2 = 0,2 \text{ kg} \cdot \left( \frac{2\pi}{2s} \right)^2 \Rightarrow D_B = 2 \text{ N/m} .$$

Στη διεύθυνση της κίνησης του  $\Sigma_2$  ασκούνται η δύναμη στήριξης  $N$  από το  $\Sigma_A$  και το βάρος του, οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$\Sigma F_B = -D_B y \Rightarrow N - m_B g = D_B y \Rightarrow N = m_B g + D_B y \quad (2)$$

Με αντικατάσταση του  $D_B$  παίρνουμε  $N = 2 - 2y$  (SI),  $-0,25 \text{ m} \leq y \leq 0,25 \text{ m}$

$$\text{i. } y = 0 \text{ m, } N = 2 \text{ N}$$

$$y = -0,25 \text{ m, } N = 2,5 \text{ N}$$

$$y = 0,25 \text{ m, } N = 1,5 \text{ N}$$

β. Το σώμα  $\Sigma_B$  εγκαταλείπει το  $\Sigma_A$  όταν  $N=0 \text{ N}$ , οπότε,

$$0 = 2 - 2y \text{ (SI)} \Rightarrow y = 1 \text{ m}$$

γ. Από τη σχέση (2) έχουμε

$$N = m_B g - m_B \omega^2 y, \text{ πρέπει}$$

$$N \geq 0 \Rightarrow 0,2 \cdot 10 - 0,2 \omega^2 \cdot 0,25 \geq 0 \Rightarrow \omega^2 \leq \frac{10}{0,25^2}$$

$$\omega_{\max} = 2\sqrt{10} \text{ rad/s}$$