

Θέματα Δ

8.Δ.1

$$\alpha. T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_o = 0,2\pi s$$

Άρα μετά από 20 ταλαντώσεις στο σύστημα απέμειναν

$$E_{20} = E_o - \Delta E = 2J - 1,5J \quad \text{ή} \quad E_{20} = 0,5J = E_o/4$$

Αφού η ενέργεια ταλάντωσης είναι το 1/4 της αρχικής, το πλάτος ταλάντωσης είναι το 1/2 του

$$\text{αρχικού, δηλαδή } E_{20} = \frac{E_o}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_{20}^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D A_o^2 \Rightarrow A_{20} = \frac{1}{2} A_o = 0,1m$$

$$\beta. \frac{A_o}{2} = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{t} = \frac{\ln 2}{20 T_o} \Rightarrow \Lambda = \frac{0,175}{\pi} s^{-1}$$

$$E_{40} = \frac{1}{2} D A_{40}^2 = 0,125J$$

$$\gamma. A_{40} = A_o e^{-\Lambda 40 T_o} = 0,2 e^{-40 \frac{\ln 2}{4\pi} 0,2\pi} \Rightarrow A_{40} = 0,05m$$

Μετά από 40 ταλαντώσεις το σύστημα έχασε ενέργεια

$$\Delta E = E_o - E_{40} = 2J - 0,125J \quad \text{ή} \quad \Delta E = 1,875J$$

δ. Μετά από 40 ταλαντώσεις το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης με πλάτος $A_{40} = 0,05m$, οπότε η δύναμη απόσβεσης τη στιγμή αυτή είναι μηδενική, καθώς το σώμα δεν έχει ταχύτητα. Θεωρώντας θετικό άξονα προς τα κάτω για την επιτάχυνση θα έχουμε

$$\Sigma F = -k(\Delta \ell_o + A_{40}) + mg \Rightarrow m\alpha = -k\left(\frac{mg}{k} + A_{40}\right) + mg \Rightarrow m\alpha = -mg - kA_{40} + mg \Rightarrow$$

$$m\alpha = -kA_{40} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-kA_{40}}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{(100N/m) \cdot 0,05m}{1kg} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -5m/s^2$$

8.Δ.2

α. Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για το σύστημα m και M παίρνουμε

$$m_2 \cdot v = (m_1 + m_2) \cdot V_k \Rightarrow V_k = 1m/s$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΕΤ για την ταλάντωση παίρνουμε

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V_k^2 = \frac{1}{2} k A_o^2 \Rightarrow A_o = \frac{1}{8} m$$

$$\beta. A_{\kappa} = A_o \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \Rightarrow A_o = \frac{1}{8}e^{-\frac{3}{4}t} \text{ m}$$

γ. Την $t=0\text{s}$, $x=+A$, οπότε δεν υπάρχει αρχική φάση.

Το ω της ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση

$$m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 8 \text{ rad / s}$$

$$x = 1/8 \cdot \text{συν}8t \text{ (SI)}, \quad v = -1 \cdot \eta\mu8t \text{ (SI)}$$

$$\delta. x = A_{\kappa} \cdot \text{συν}(8t + \varphi_o) \Rightarrow x = \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \text{συν}8t \text{ (SI)}$$

8.Δ.3

α. Το αρχικό πλάτος ισούται με την παραμόρφωση του ελατηρίου όταν το σώμα μάζας m ισορροπεί. Από $\Sigma F=0$ για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης προκύπτει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k\Delta\ell_o \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{mg}{k} \Rightarrow A_o = 9\text{cm}$$

$$\beta. A = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{A_o}{3} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot 30T} \Rightarrow \ln 3 = 30\Lambda T$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,6\text{s}, \quad \Lambda = \frac{\ln 3}{18} \text{ s}^{-1}, \quad A = 9 \cdot e^{-\frac{\ln 3}{18}t} \text{ (cm)}$$

$$\gamma. x = 3 \cdot \text{συν}\frac{2\pi}{0,6}t \text{ (cm)}$$

$$\delta. v_{\max} = \omega \cdot A = 10\pi \text{ cm / s}$$

$$F'_{\max} = b \cdot v_{\max} = \Lambda \cdot 2m \cdot v_{\max} \Rightarrow F'_{\max} = 0,1\pi \cdot \ln 3 \text{ N}$$

$$\epsilon. W = \frac{2b\pi^2}{T} A_o^2 = 0,27 \ln 3 \text{ J}$$

8.Δ.4

α. Η ενέργεια ταλάντωσης σε μια φθίνουσα ταλάντωση δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}D(A_o e^{-\Lambda \cdot t})^2 \Rightarrow E = E_o e^{-2\Lambda \cdot t}$$

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$E = 4,84e^{-\ell n 1,1^2 \cdot t} \text{ (S.I.)} \Rightarrow E = 4,84e^{-2 \ell n 1,1 \cdot t} \text{ (S.I.)}$$

Από τη σύγκριση των δύο σχέσεων προκύπτει $E_0=4,84\text{J}$ και $\Lambda=\ln 1,1\text{s}^{-1}$.

$$\frac{E_9}{E_{10}} = \frac{\frac{1}{2}DA_9^2}{\frac{1}{2}DA_{10}^2} = \left(\frac{A_9}{A_{10}}\right)^2 = \left(\frac{A_0 e^{-\Lambda \cdot 9T}}{A_0 e^{-\Lambda \cdot 10T}}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_9}{E_{10}} = (e^{\Lambda T})^2 = e^{2/\ln 1,1} \Rightarrow \frac{E_9}{E_{10}} = e^{1,1^2} \Rightarrow \frac{E_9}{E_{10}} = 1,21$$

β. Η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της πρώτης περιόδου είναι

$$E_1 = 4,84e^{-\ln 1,21 \cdot 1} (\text{J}) \Rightarrow E_1 = 4,84e^{-\ln 1,21} (\text{J}) \Rightarrow E_1 = 4,84 \cdot \frac{1}{1,21} \text{J} \Rightarrow E_1 = 4\text{J}$$

Άρα το ποσοστό μείωσης της ενέργειας στην πρώτη περίοδο είναι

$$\pi\% = \left| \frac{E_1 - E_0}{E_0} \right| 100\% = \left| \frac{4\text{J} - 4,84\text{J}}{4,84\text{J}} \right| 100\% = \frac{0,84}{4,84} 100\% = \frac{4 \cdot 0,21}{4 \cdot 1,21} 100\% \Rightarrow \pi\% = 17,4\%$$

γ. Από τη σχέση $\Lambda = \frac{b}{2m}$ βρίσκουμε τη σταθερά απόσβεσης b

$$b = 2m\Lambda \Rightarrow b = 2 \cdot 0,1 \cdot \ln 1,1 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} \Rightarrow b = 0,2 \ln 1,1 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας συμπίπτει με την ισχύ της δύναμης αντίστασης. Τη στιγμή που η ταχύτητα του σώματος είναι 1m/s έχουμε

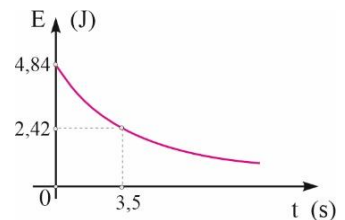
$$|P_F| = |F \cdot v| = |-b \cdot v \cdot v| \Rightarrow |P_F| = b \cdot v^2 \Rightarrow |P_F| = 0,2 \ln 1,1 \cdot 1^2 \text{ J/s} \Rightarrow |P_F| = 0,2 \ln 1,1 \text{ J/s}$$

δ. Η ενέργεια σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$E = 4,84e^{-\ln 1,21 \cdot t} (\text{S.I.})$$

Το χρονικό διάστημα υποδιπλασιασμού της ενέργειας είναι

$$E = 4,84e^{-\ln 1,21 \cdot t} \Rightarrow 2,42 = 4,84e^{-\ln 1,21 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\ln 1,21 \cdot t} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\ln 1,21 \cdot t} \Rightarrow -\ln 2 = -\ln 1,21 \cdot t_{E/2} \Rightarrow t_{E/2} = \frac{\ln 2}{\ln 1,21} \text{s} \Rightarrow t_{E/2} = 3,5\text{s}$$



Άρα η γραφική παράσταση θα είναι όπως στο σχήμα.

8.Δ.5

α. Το σώμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδενική

$$F = F_{ελ} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{F}{k} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{20}{100} \text{ m} \Rightarrow \Delta \ell = 0,2 \text{ m}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης συμπίπτει με το έργο της δύναμης F

$$E = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = F \Delta \ell \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2F\Delta \ell}{k}} = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

β. Για τα πλάτη έχουμε

$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_o} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \frac{A_1}{A_o} - 1 = \frac{A_2}{A_1} - 1 \Rightarrow \frac{A_1 - A_o}{A_o} = \frac{A_2 - A_1}{A_1} \Rightarrow \frac{A_1 - A_o}{A_o} 100\% = \frac{A_2 - A_1}{A_1} 100\%$$

γ. Το γινόμενο $A_1 \cdot A_3$ όπου A_1 και A_3 το πλάτος στο τέλος της 1^{ης} και της 3^{ης} περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης είναι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_1 \cdot A_3 = A_2^2 \quad (1)$$

Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου είναι

$$A_2 = A_o e^{-2\ell n^2} \Rightarrow A_2 = A_o e^{-\ell n^2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_o}{4} \Rightarrow A_2^2 = \frac{A_o^2}{16} \Rightarrow A_2^2 = \frac{(0,2\sqrt{2})^2}{16} \text{ m}^2 \Rightarrow A_2^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Άρα από την (1) έχουμε $A_1 \cdot A_3 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

δ. Η χρονική στιγμή στην οποία το πλάτος έχει γίνει μισό του αρχικού είναι

$$A = A_o e^{-\ell n^2 t} \Rightarrow \frac{A_o}{2} = A_o e^{-\ell n^2 t} \Rightarrow \ell n \frac{1}{2} = -\ell n^2 \cdot t \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

Αφού η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι 1s, το σώμα θα έχει εκτελέσει μία φθίνουσα ταλάντωση.

Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_o = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E_o = \frac{1}{2} 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,2\sqrt{2} \text{ m})^2 \Rightarrow E_o = 4 \text{ J}$$

Αφού το πλάτος έχει γίνει το μισό του αρχικού η ενέργεια του σώματος έχει υποτετραπλασιαστεί,

$$E_{τελ} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D A_o^2 \Rightarrow E_{τελ} = \frac{E_o}{4}$$

άρα το έργο της δύναμης απόσβεσης θα είναι $W_{F'} = E_{τελ} - E_o \Rightarrow W_{F'} = 1 \text{ J} - 4 \text{ J} = -3 \text{ J}$