Λύσεις κριτηρίου 14

ΘΕΜΑ Α

Α1. (δ)

Α2. (γ) **Α**3. (β) **Α**4. (α) **Α**5. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (ii)

Σε κάθε σώμα ασκείται η δύναμη της τάσης του νήματος που παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Οι τάσεις είναι ίσες γιατί το νήμα δεν έχει μάζα:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{m_1\ {}_1^2}{r_1} = \frac{{}_2\ {}_2^2}{r_2} \Rightarrow m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2 \quad \Rightarrow m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (1)$$

Άρα, το πηλίκο των μέτρων των ορμών των δύο σωμάτων είναι:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1\ {}_1}{m_2\ {}_2} = \frac{{}_1\omega\ {}_1}{{}_2\omega\ {}_2} = 1$$

Επειδή τα δύο σώματα κινούνται κάθε στιγμή σε αντίθετες κατευθύνσεις θα είναι: $\vec{p}_{ολ} = 0$.

Οι στροφορμές των δύο σωμάτων είναι ομόρροπες και βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής, άρα θα έχουμε:

$$\vec{L}_{ολ} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \rightarrow L_{ολ} = L_1 + L_2 = m_1\ {}_1\ {}_1 + \ {}_2\ {}_2\ {}_2 \neq$$

Β2. (iii)

Για το σημείο Ζ ισχύει ότι: $\Delta x_Z = \upsilon_Z \Delta t = (\upsilon_{cm} + \upsilon)\Delta t \quad (1)$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_{cm}} = \frac{\omega r}{\omega R} = \frac{r}{R} \Rightarrow \upsilon = \frac{r}{R}\upsilon_{cm} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\Delta x_Z = \left(\upsilon_{cm} + \frac{r}{R}\upsilon_{cm}\right)\Delta t = \upsilon_{cm}\left(\frac{R+r}{R}\right)\Delta t \quad (3)$$

Για το σημείο Θ ισχύει ότι: $\Delta x_\theta = \upsilon_\theta \Delta t = (\upsilon_{cm} - \upsilon)\Delta t \quad (4)$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_{cm}} = \frac{\omega r}{\omega R} = \frac{r}{R} \Rightarrow \upsilon = \frac{r}{R}\upsilon_{cm} \quad (5)$$

Από (4) και (5) έχουμε:

$$\Delta x_\Theta = \left(\upsilon_{cm} - \frac{r}{R}\upsilon_{cm}\right)\Delta t = \upsilon_{cm}\left(\frac{R-r}{R}\right)\Delta t \quad (6)$$

$$\frac{\Delta x_Z}{\Delta x_\Theta} = \frac{\upsilon_{cm}\left(\frac{R+r}{R}\right)\Delta t}{\upsilon_{cm}\left(\frac{R-r}{R}\right)\Delta t} = \frac{R+r}{R-r}$$

Από (3) και (6) έχουμε:

Για τη μετατόπιση του σημείου Ζ ισχύει ότι:

$$\Delta x_Z = \Delta x_\Theta + \frac{50}{100}\Delta x_\Theta = 1{,}5\Delta x_\Theta$$

Άρα: $\frac{1{,}5\quad_{\Theta}}{\Delta x_\Theta} = \frac{\quad+\quad}{R-r} \Rightarrow 1{,}5R - 1{,}5r = R + r \Rightarrow 0{,}5R = 2{,}5r \Rightarrow R = 5r$

Β3. (ii)

Η ενεργειακή αυτή μετατροπή οφείλεται στο έργο της δύναμης επαναφοράς

$$\frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} = \frac{F_{\varepsilon\pi}dx}{dt} = -Dx\upsilon = -m\omega^2 \cdot A\ \eta\mu\omega t \cdot \omega\ A\ \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$$

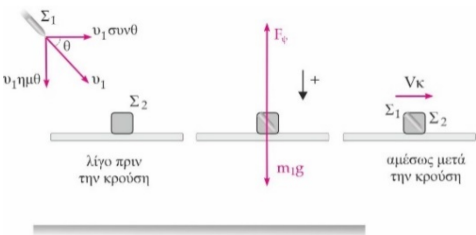
$$\frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} = -m\omega^3 A^2 \cdot \eta\mu\omega t\ \sigma\upsilon\nu\omega t = -\frac{m\quad^3\quad^2}{2}\eta\mu 2\omega t$$

Άρα, η μέγιστη τιμή συμβαίνει για $\eta\mu 2\omega t = -1$ και είναι ίση με

$$\left(\frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt}\right)_{max} = \frac{m\quad^3\quad^2}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η μεταβολή της ορμής του βλήματος στον κατακόρυφο άξονα είναι:



$$\Delta p_y = 0 - m_1\upsilon_1\eta\mu\theta = -16\frac{Kgm}{s}$$

Για το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχεται το βλήμα στον κατακόρυφο άξονα, θεωρώντας θετική φορά την κατακόρυφη προς τα κάτω, ισχύει ότι:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \Rightarrow -F_y + m_1 g = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \Rightarrow F_y = m_1 g - \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = 0{,}5\quad -(-\quad\quad) \Rightarrow$$

$$F_y = 1600{,}5$$

Γ2. Το σύστημα είναι μονωμένο μόνο στον άξονα x’x, άρα στον άξονα αυτόν μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$m_1\ _1\quad = (\ _1 + \quad_2)\ _k \Rightarrow \ _k = \frac{m_1\ _1}{m_1 + m_2} =$$

Η θερμική ενέργεια που παράγεται κατά την κρούση είναι:

$$Q = \frac{1}{2}m_1\ _1^2 - \frac{1}{2}(\ _1 + \quad_2)\ _k^2 \Rightarrow \quad =$$

Γ3. Εάν το σώμα έκανε ΕΟΚ μετά την κρούση θα μετατοπιζόταν κατά $\Delta x = V_k \Delta t = 3,6\ \text{m}.$

Όμως η απόσταση από το δεξιό άκρο της ράβδου είναι 3m, άρα το συσσωμάτωμα θα κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση λόγω της σταθερής τριβής που δέχεται, άρα για το μέτρο της επιτάχυνσης ισχύει ότι:

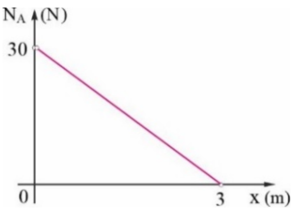
$$\Delta x = V_k\ \Delta t - \frac{1}{2}\ \alpha\ \Delta t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2(V_k \quad - \quad)}{\quad^2} = \frac{(\ \cdot \quad - \ )}{\quad^2}\text{m} \Rightarrow \ \alpha = \frac{10}{\quad}\ \text{m/s}^2$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -(m_1 + m_2) \quad \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{20}{3} \quad {}^2$

Γ4. Για να ανατρέπεται οριακά η σανίδα όταν το συσσωμάτωμα βρεθεί στο δεξιό άκρο της, θα πρέπει εάν πάρουμε τις ροπές ως προς το δεξιό στήριγμα τη στιγμή αυτή να έχουμε:

$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow \frac{MgL}{4} - (m_1 + m_2)g\frac{L}{4} = 0 \Rightarrow M = m_1 + m_2 = 2\text{Kg}$$

Γ5. Έστω ότι το σώμα βρίσκεται σε μία τυχαία απόσταση x από το αριστερό στήριγμα. Εάν πάρουμε ροπές ως προς το σημείο Β θα έχουμε:



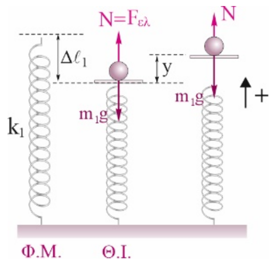
$$\Sigma\tau_B = 0 \rightarrow (m_1 + m_2)g(2 - x) + Mg1 - N_A 2 = 0 \Rightarrow$$

$$N_A = 30 - 10x\ (\text{S.I.}),\ 0 \le x \le 3\text{m}$$

Η γραφική παράσταση της δύναμης δείχνεται στο σχήμα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σε μια τυχαία θέση που απέχει y από τη θέση ισορροπίας και με το σώμα να είναι σε επαφή με τον δίσκο, για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό ισχύει



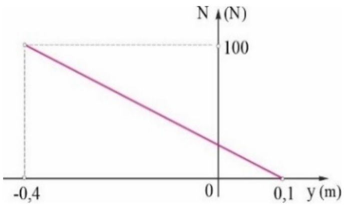
$$\Sigma F = -ky \Rightarrow N - m_1 g = -k_1 y \Rightarrow N = 20 - 200y\ (\text{SI}) \quad (1)$$

Το σώμα χάνει την επαφή με τον δίσκο όταν N=0, δηλαδή σε απομάκρυνση

$$0 = 20 - 200y_1 \Rightarrow y_1 = 0,1\text{m}$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της σχέσης (1) είναι $-0,4\text{m} \le y \le 0,1\text{m}$

και η γραφική της παράσταση δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ2. Το σώμα χάνει την επαφή με τον δίσκο σε απομάκρυνση $y_1 = 0,1\text{m}$.

Το ελατήριο ήταν συσπειρωμένο κατά

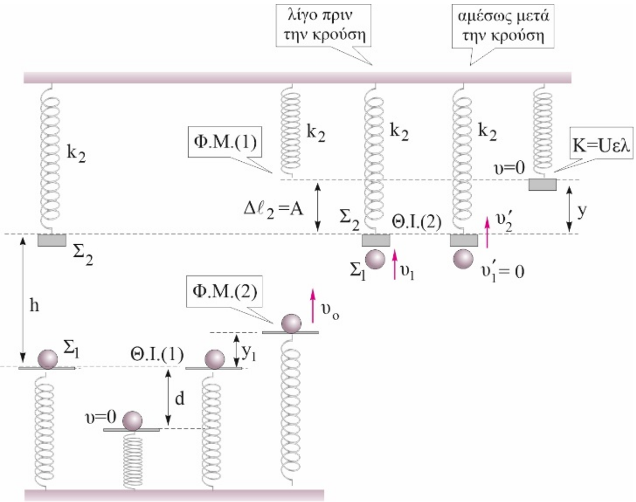
$$\Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1} = 0{,}1\text{m}$$

. Άρα, η επαφή χάνεται στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, με ταχύτητα που βρίσκεται από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

$$\frac{1}{2}k_1 d^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 + \frac{1}{2}k_1 y_1^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_o = \omega\sqrt{d^2 - y_1^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 10\text{r/s}$$



Οπότε με αντικατάσταση έχουμε:

$$\upsilon_o = 10\sqrt{(0{,}4)^2 - (0{,}1)^2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \upsilon_o = \sqrt{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ3. Για να φθάνει το m_2 μέχρι την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου θα πρέπει:

$$A = \Delta\ell_2 = \frac{m_2 g}{k_2} = 0{,}1\text{m}$$

Άρα η ταχύτητα που θα έχει αμέσως μετά την κρούση θα είναι:

$$\upsilon_2' = \omega' A = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,A = 10 \cdot 0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \upsilon_2' = 1\text{m/s}$$

Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ίσων μαζών θα γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων

$$\upsilon_1 = \upsilon_2' = 1\frac{\text{m}}{\text{s}},\ \ \upsilon_1' = 0$$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το m_1 από τη θέση που χάθηκε η επαφή μέχρι το σημείο σύγκρουσης έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + m_1 g(h - y_1) = \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 \Rightarrow 1 + 20(h - 0{,}1) = 15 \Rightarrow$$

$$1 + 20h - 2 = 15 \Rightarrow 20h = 16 \Rightarrow h = 0{,}8\text{m}$$

Δ4. Αν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι ίση με την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης σε απομάκρυνση y πάνω από τη θέση ισορροπίας, τότε

$$U_{\varepsilon\lambda} = K \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = E_T - U_T \Rightarrow \frac{1}{2}k_2(\Delta\ell_2 - y)^2 = \frac{1}{2}k_2 A^2 - \frac{1}{2}k_2 y^2 \Rightarrow y = 0 \qquad =$$

Δεκτή η λύση $y = 0{,}1\text{m}$ που παραπέμπει στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης.
Για μετάβαση από τη Θ.Ι. στην ακραία θέση απαιτείται Δt=T/4.

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20}\mathrm{s}$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ: Βρίσκουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου με αρχική φάση ταλάντωσης μηδενική:

$$y = 0{,}1 \quad {}_2 = \quad (\quad)$$

Από την απαίτηση η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου να είναι ίση με την κινητική ενέργεια έχουμε:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\ {}_2(\quad - \quad)^2 = \frac{1}{2}\ {}_2\ {}_2^2 \Rightarrow \quad - \quad = \pm\sqrt{\frac{m_2}{\ {}_2}}\ {}_2$$

$$\rightarrow 1 - \quad = \pm \quad \Rightarrow \ - \quad = \pm\sqrt{\ - \quad {}^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \ {}^2 \ - \quad = \ - \ {}^2 \Rightarrow \ {}^2 \ - \quad = \ \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \eta\mu 10t = 0 \\ \eta\mu 10t = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20}\mathrm{s} \end{array}\right\}$$

Άρα η πρώτη χρονική στιγμή μετά την κρούση στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι ίση με την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι όταν το σώμα φθάνει για πρώτη φορά στην ακραία θετική απομάκρυνση, οπότε και οι δύο αυτές ποσότητες γίνονται μηδενικές.

Δ5. Το σώμα m_1 αμέσως μετά την κρούση έχει μηδενική ταχύτητα άρα κάνει ελεύθερη πτώση και κατέρχεται κατά $h-y_1$ μέχρι να ξαναπεράσει από το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$m_1 g\left(h - y_1\right) = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}{}^2 \Rightarrow 20\left(0{,}8 - 0{,}1\right) = \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}{}^2 \Rightarrow \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \sqrt{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Άρα η επί τοις εκατό μεταβολή στην κινητική του ενέργεια είναι:

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}{}^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_o{}^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_o{}^2}100\% = \frac{14-15}{15}100\% \Rightarrow \pi\% = -\frac{100}{15}\%$$