Λύσεις κριτηρίου 15

ΘΕΜΑ Α

Α1. (β) **Α2.** (β) **Α3.** (δ) **Α4.** (γ) **Α5.** α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (ii)

Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός στο πρώτο δευτερόλεπτο είναι:

$$N_1 = N_{0\to1} = \frac{\Delta\theta_1}{2} = \frac{\alpha_\gamma}{\quad}\Delta t^2_{0\to1} \quad = \frac{\alpha_\gamma}{\quad} \qquad (1)$$

Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός στο δεύτερο δευτερόλεπτο είναι:

$$N_2 = N_{1\to2} = \frac{\Delta\theta_2}{2} = \frac{1}{\quad}\left(\frac{1}{\quad}\alpha\ \Delta t^2_{\to} - \frac{1}{\quad}\alpha\ \Delta t^2_{0\to1}\right) = \frac{1}{\pi}\alpha\ (4-1) = \frac{3}{\pi}\alpha \qquad (2)$$

Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός στο τρίτο δευτερόλεπτο είναι:

$$N_3 = N_{2\to3} = \frac{\Delta\theta_3}{2} = \frac{1}{\quad}\left(\frac{1}{\quad}\alpha\ \Delta t^2_{\to} - \frac{1}{\quad}\alpha\ \Delta t^2_{0\to2}\right) = \frac{1}{\pi}\alpha\ (9-4) = \frac{5}{\pi}\alpha \qquad (3)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{0\to1}}{N_{1\to2}} = \frac{\Delta t^2_{0\to1}}{\left(\Delta t^2_{0\to2} - \Delta t^2_{0\to1}\right)} = \frac{1}{3} \qquad (4)$$

Διαιρώντας τις (1) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{N_{0\to1}}{N_{2\to3}} = \frac{\Delta t^2_{0\to1}}{\left(\Delta t^2_{0\to3} - \Delta t^2_{0\to2}\right)} = \frac{1}{5} \qquad (5)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (4) και (5) και έχουμε:

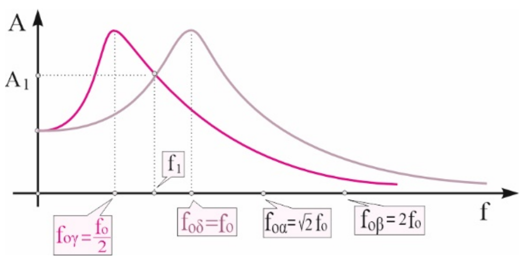
$$\frac{N_{0\to1}}{N_{1\to2}}\frac{N_{0\to1}}{N_{2\to3}} = \frac{1}{15} \to N_2 \cdot N_3 = 15\ N_1^2$$

Β2. (i)

Οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης των συστημάτων είναι:

$$f_{o(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}f_o$$,

$$f_{o(\beta)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}} = 2f_o$$,



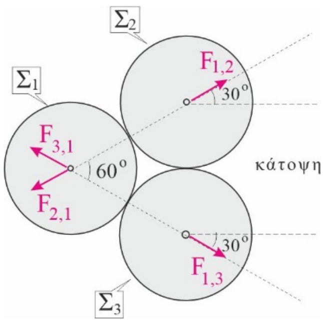
$$f_{o(\gamma)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{f_o}{2}\ ,\quad f_{o(\delta)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = f_o$$

Έχουμε 4 διαφορετικές καμπύλες συντονισμού από τις οποίες οι (γ) , (δ) πρέπει να έχουν σημείο τομής που αντιστοιχεί στο ίδιο πλάτος A_1 για τη συγκεκριμένη συχνότητα f_1 του διεγέρτη (σανίδα) . Άρα η f_1 πρέπει να είναι μεταξύ των δύο ιδιοσυχνοτήτων $f_{0(\,)}' = f_0 / 2$ και $f_{o(\delta)}=f_o$. Μόνο η συχνότητα $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_o$ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

Έχουμε 4 διαφορετικές καμπύλες συντονισμού από τις οποίες οι (γ) , (δ) πρέπει να έχουν σημείο τομής που δείχνει το ίδιο πλάτος A_1 για τη συγκεκριμένη συχνότητα f_1 του διεγέρτη (σανίδα) . Άρα η f_1 πρέπει να είναι μεταξύ των δύο ιδιοδυχνοτήτων $f_{0(\,)}' = f_0 / 2$ και $f_{o(\delta)}=f_o$. Μόνο η συχνότητα $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_o$ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

Β3. (ii)

Αφού η κινητική ενέργεια που χάνει η σφαίρα 1 κατά την κρούση είναι 64% έχουμε:



$$K_1' = \frac{36}{100}K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\ {}_1^2 = \frac{36}{100}\frac{1}{2}\ {}_1\ {}^2 \Rightarrow \quad = \qquad (\ )$$

Από τη διατήρηση της ορμής στον άξονα y'y έχουμε:

$$m_2\ {}_2\ {}^0 = \ {}_3\ {}_3\ {}^0 \Rightarrow \ {}_2 = \ {}_3\ (\ )$$

Από την διατήρηση της ορμής στον άξονα x'x έχουμε:

$$m_1 \quad = - \quad + \quad {}^0 + \quad {}^0 \Rightarrow \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$1{,}6m_1\ {}_0 = \ {}_2\ {}_2\sqrt{\ } \Rightarrow \ {}_2 = \ {}_3 = \frac{1{,}6}{\sqrt{3}}\frac{m_1}{m_2}\ {}_0\ (\ )$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\ {}^2 = \frac{1}{2}\quad {}^2 + \frac{1}{2}\quad {}^2 \Rightarrow \quad {}^2 = \quad {}^2 + \quad {}^2 \Rightarrow$$

$$m_1\ {}^2 - \quad {}^2 = \quad {}^2 \Rightarrow \quad {}^2 = \quad {}^2 \Rightarrow$$

$$0{,}64m_1\ {}^2 = \quad \frac{2{,}56}{3}\frac{m_1^2}{m_2^2}\ {}^2 \Rightarrow$$

$$0{,}64 = 2\frac{2{,}56}{3}\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 = \frac{512}{192}m_1 = \frac{8}{3}m_1$$

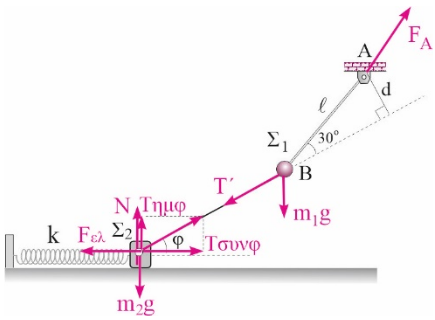
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την ισορροπία του $Σ_2$ στον οριζόντιο άξονα έχουμε ότι:

$$T \quad = \quad = \quad (\ )$$

Από την ισορροπία του m_2 στον κατακόρυφο άξονα και εφόσον $N=m_2g/2=6N$ θα έχουμε:

$$T \quad + \quad = \quad _2 \Rightarrow \quad = \quad (\ )$$



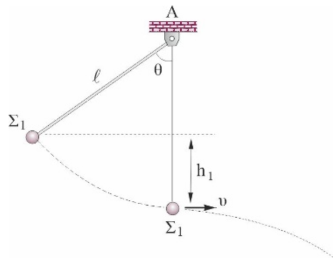
Από (1) και (2) έχουμε:

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{36}{T^2} + \frac{64}{T^2} \Rightarrow T = 10N$$

Από (2) βρίσκουμε ότι η γωνία φ έχει $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$, άρα $\varepsilon\varphi\varphi=3/4$.

Γ2. Για την οριζόντια βολή του σφαιριδίου ισχύουν οι σχέσεις

$$y = \frac{1}{2}gt^2, \ x = \upsilon t$$



και απ' αυτές προκύπτει η παραβολική εξίσωση της τροχιάς

$$y = \frac{gx^2}{2 \quad ^2}$$

Από την εξίσωση τροχιάς βρίσκουμε την ταχύτητα που έχει το σφαιρίδιο τη στιγμή που αποκολλάται:

$$y = \frac{5x^2}{6} = \frac{10x^2}{2 \quad ^2} \Rightarrow \quad = \sqrt{\ }$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για το σφαιρίδιο έχουμε:

$$m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1 \quad ^2 \Rightarrow \quad _1 = \frac{\quad ^2}{2g} =$$

Από τον μοχλοβραχίονα βρίσκουμε το μήκος της ράβδου

$$? = \frac{d}{\eta\mu 30^0} = 10\sqrt{2}cm$$

$$L = m_1 \ ? = \quad \cdot \sqrt{\ } \quad \cdot \quad \sqrt{\ } \Rightarrow \quad = \quad \sqrt{\ } \quad \frac{m^2}{s}$$

Γ3. Αφού η ορμή σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο δάπεδο θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 45^0 = \frac{p_y}{p_\chi} = \frac{\ _y}{\ } = 1 \Rightarrow \upsilon_y = \sqrt{6}\ m/s$$

Άρα, το χρονικό διάστημα κίνησης του σφαιριδίου είναι:

$$\upsilon_y = g\,\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon_y}{g} = 0{,}1\sqrt{6}\,s$$

Άρα, το ύψος είναι: $h = \frac{1}{2}g \quad ^2 =$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σφαιριδίου είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -m_1 g \quad _y = -\sqrt{\ }$$

Γ4. Από την ΑΔΕΤ έχουμε: $E = K + U = 4U \Rightarrow \frac{1}{2} \quad ^2 = \frac{1}{2} \quad ^2 \Rightarrow \quad = \pm\frac{A}{2} = \pm$

Επειδή ψάχνουμε τη δεύτερη φορά και η θετική φορά της ταλάντωσης είναι προς τα δεξιά, η απομάκρυνση είναι αρνητική, άρα: $x = -0{,}02m$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος θα ισχύει ότι: $(m+M)g \quad = \quad (\ )$

Σε μία τυχαία θέση του συστήματος κάτω από τη θέση ισορροπίας έχουμε: $\Sigma F = -k(\quad + \quad) + (\quad + \quad) \Rightarrow \Sigma \quad = -$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D=k=400N/m. Για να βρούμε τη σταθερά επαναφοράς του κάθε σώματος έχουμε:

$$\frac{D_m}{k} = \frac{m \quad ^2}{(m+M) \quad ^2} \Rightarrow D_m = \frac{\qquad}{(\quad + \quad)}k = \frac{\qquad}{\qquad} \Rightarrow D_m = 100\frac{\ }{\ }$$

$$\frac{D_M}{k} = \frac{M \quad ^2}{(m+M) \quad ^2} \Rightarrow D_M = \frac{\qquad}{(\quad + \quad)}k = \frac{\qquad}{\qquad} \Rightarrow D_M = 300\frac{\ }{\ }$$

Δ2. Το σύστημα αφήνεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με το Δl:

$$A = \frac{(m+M)g}{k} = 0{,}05m$$

Η στατική τριβή θα παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης γιατί εκεί είναι αντίρροπη της συνιστώσας της B_x και θα πρέπει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη για αρμονική ταλάντωση του σώματος m στη θέση αυτή και έχουμε: $-T_{\sigma\tau} + mg \quad = - \quad _m \Rightarrow \quad _{\sigma\tau} = \quad + \quad _m \quad (\ )$

Η στατική τριβή θα πρέπει να είναι:

$$T_{στ} \le \quad _s \quad \rightarrow \quad + \quad _m \quad \le \quad _s \quad \Rightarrow \quad + \frac{m}{(m+M)} \quad \frac{(m+M)g}{k} \le \quad _s \quad \Rightarrow$$

$$2mg \quad \le \quad _s \quad \rightarrow \quad _s \ge \quad \Rightarrow \quad _s \ge \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \quad _{s,min} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Δ3. Βρίσκουμε την εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου. Επειδή το σώμα ξεκινάει από την ακραία θετική απομάκρυνση θα είναι $φ_o=π/2$ rad άρα θα έχουμε:

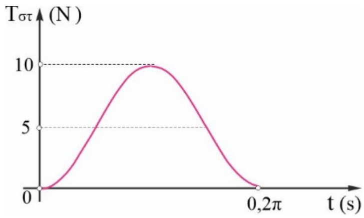
$$y = A \quad (\quad + φ_0) = \quad \left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad + φ_0\right) \Rightarrow \quad = \quad \left(\quad + \frac{}{2}\right)$$

Για το σώμα m θα ισχύει ότι:

$$ΣF = -D_m y \Rightarrow T \quad - mgημφ = -D \quad y \Rightarrow$$

$$T_{στ} = mg \quad - \quad _m \quad \Rightarrow$$

$$T_{στ} = 5 - 100 \cdot 0,05 \quad \left(\quad + \frac{π}{2}\right) \Rightarrow \quad _{στ} = \quad - \quad (\quad)$$



Η γραφική παράσταση της στατικής τριβής με τον χρόνο σε μία περίοδο είναι:

Δ4. Στη θέση ισορροπίας του το σύστημα έχει μέγιστη ταχύτητα:

$$υ = ωA = 10 \cdot 0,05m = 0,5 \ m/s$$

Με τον αποχωρισμό του σώματος μάζας m αλλάζει η θέση ισορροπίας και η νέα θέση απέχει από το φυσικό μήκος απόσταση:

$$Mg \quad = \quad ' \Rightarrow \quad ' = \frac{3}{80}$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ αμέσως μετά τον αποχωρισμό και στην ακραία θέση για να βρούμε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος M:

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}M \quad ^2 + \frac{1}{2} \quad (\quad - \quad ')^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{M \quad ^2}{k} + (Δl - Δl')^2} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{400} + \left(\frac{}{20} - \frac{}{80}\right)^2} \ m = \sqrt{\frac{}{1600} + \frac{}{6400}} \ m \Rightarrow A' = \frac{\sqrt{\ }}{80} m$$

Άρα η επί τις εκατό μεταβολή στην ενέργεια είναι:

$$π\% = \frac{\frac{1}{2}kA'^2 - \frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}kA^2} 100\% = \frac{A'^2 - A^2}{A^2} 100\% = \frac{\frac{13}{6400} - \frac{1}{400}}{\frac{1}{400}} 100\% = \frac{\frac{-3}{6400}}{\frac{1}{400}} 100\% \Rightarrow$$

$$π\% = -\frac{1200}{64}\% = -18,75\%$$