Θέματα Γ

5.Γ.1

α. $\upsilon_{max} = \omega A = 0,72\pi \ m/s$

β. $\alpha_{max} = \omega^2 A = 12,96\pi^2 \ m/s^2$

γ. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1/9 \ s$

δ. $d = 2A = 8cm$

ε. $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2} rad$

5.Γ.2

α. $\upsilon_{max} = \omega A \ \Rightarrow \ A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = \frac{40m/s}{10\pi rad/s} \ \Rightarrow \ A = \frac{4}{\pi} m$

β. Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \ \Rightarrow \ x = \frac{4}{\pi} \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$

Τη χρονική στιγμή t=0s έχουμε

$$x = \frac{4}{\pi} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2} \ (SI) \ = \frac{4}{\pi} m$$

γ. $\alpha_{max} = \omega^2 A = (10\pi rad/s)^2 \cdot \frac{4}{\pi} m \ \Rightarrow \ \alpha_{max} = 400\pi \ m/s^2$

δ. $\alpha = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) = -100\pi^2 \cdot \frac{4}{\pi} \eta\mu\left(10\pi\frac{1}{20} + \frac{\pi}{2}\right) \ (SI) \Rightarrow$

$$\alpha = 100\pi^2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \eta\mu\pi \ (SI) \ \Rightarrow \ \alpha = 0\frac{m}{s^2}$$

5.Γ.3

α. $\alpha_{max} = \omega^2 A \ \Rightarrow \ A = \frac{\alpha_{max}}{\omega^2} = \frac{7,2m/s^2}{(6rad/s)^2} \ \Rightarrow \ A = 0,2m$

β. $\alpha = -\omega^2 x = -(6rad/s)^2 \cdot 0,05m \ \Rightarrow \ \alpha = -1,8\frac{m}{s^2}$

γ. Η εξίσωση ταχύτητας είναι

$$\upsilon = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \ \Rightarrow \ \upsilon = 1,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 6t \ (S.I.)$$

Τη στιγμή t=0s , υ=1,2 m/s.

δ. Το σώμα ξεκινά τη στιγμή t=0s από τη Θ.Ι. και η ταχύτητά του μηδενίζεται για πρώτη φορά όταν αυτό φτάσει στην ακραία θέση της ταλάντωσης +Α μετά από χρόνο Δt=T/4

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{12}s$$

5.Γ.4

α. $\upsilon = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t = 40\pi \cdot 16 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu 40\pi t$ (S.I.)

Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t=0s είναι

$$\upsilon = 40\pi \cdot 16 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu 0 \quad (SI) \Rightarrow \upsilon = 6{,}4\pi \frac{m}{s}$$

β. $\alpha_{max} = \omega^2 A = (40\pi rad/s)^2 \cdot 16 \cdot 10^{-2} m \Rightarrow \alpha_{max} = 256\pi^2 \frac{m}{s^2}$

γ. $|\alpha| < 64\pi^2 \Rightarrow \omega^2|x| < 64\pi^2 \Rightarrow |x| < 4cm$, $-4cm < x < 4cm$

δ. Η φάση της ταλάντωσης τη στιγμή t είναι

$$\varphi = \omega t = 40\pi \frac{5}{48} rad \Rightarrow \varphi = \frac{25\pi}{6} rad = \left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) rad$$

Άρα το σώμα εκτέλεσε 2 πλήρεις ταλαντώσεις (σε κάθε ταλάντωση η φάση αυξάνεται κατά 2π rad και το σώμα έχει διανύσει διάστημα 4Α) και βρίσκεται σε θέση η οποία θα βρεθεί από την εξίσωση απομάκρυνσης

$$x = A\eta\mu\omega t = A\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{A}{2}$$

Το διάστημα που διένυσε το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή t= $\frac{5}{48}s$ είναι

d = 4A+4A+A/2 = 17A/2 ή d = 1,36m

5.Γ.5

α. $A = 0{,}1m$, $\omega = 20 rad/s$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}1\pi s$

β. $\upsilon_{max} = \omega A = 2m/s$

γ. $\upsilon = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ S.I.

$$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha = -40\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) (S.I.)$$

δ. $x=0{,}1\eta\mu\left(20\cdot\frac{2\cdot 0{,}1\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)m=0{,}1\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)m \Rightarrow$

$x=0{,}1\eta\mu\frac{11\pi}{6}m \Rightarrow x=-0{,}05m$

5.Γ.6

α. Τη χρονική στιγμή t=0s το σώμα βρίσκεται στη θέση x=+A, επομένως η αρχική του φάση είναι φο=π/2 rad και η εξίσωση απομάκρυνσης είναι

$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ με $A=0{,}2m$,

$\omega=\frac{2\pi}{T}=20\frac{rad}{s}$

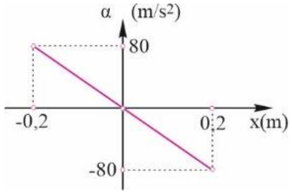
Επομένως $x=0{,}2\eta\mu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

β. $\alpha=-\omega^2 A\eta\mu(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \alpha=-(20)^2\cdot 0{,}2\eta\mu\left(20\cdot 0{,}35\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.) $\Rightarrow$

$\alpha=-80\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=80\frac{m}{s^2}$

γ. $\alpha=-\omega^2 x \Rightarrow \alpha=-400x$ (S.I.), $-0{,}2m\le x\le 0{,}2m$

και το διάγραμμα δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Η ταχύτητα του σώματος δίνεται από τη σχέση

$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \upsilon=4\sigma\upsilon\nu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

$2=4\sigma\upsilon\nu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)$

Υπάρχουν δύο λύσεις:

$2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}=20t+\frac{\pi}{2}$ (1) , $2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}=20t+\frac{\pi}{2}$ (2)

Η 1η φορά δίνεται για κ=1 από τη σχέση (2) και η δεύτερη φορά για κ=1 από τη σχέση (1)

$2\pi+\frac{\pi}{3}=20t+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{7\pi}{3}=20t+\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{11\pi}{120}s$

5.Γ.7

α. Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\alpha = \kappa \cdot x \Rightarrow 200\pi^2 = \kappa \cdot (-0{,}5) \Rightarrow \kappa = -400\pi^2 \frac{1}{s^2}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης από το διάγραμμα προκύπτει ίσο με 0,5m.

γ. Σε μία απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση και η επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση $\alpha = -\omega^2 x$, οπότε $-\omega^2 = -400\pi^2 \Rightarrow \omega = 20\pi\, rad/s$

Επομένως η συχνότητα είναι $f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 10Hz$.

Σε κάθε περίοδο η ταχύτητα μηδενίζεται δύο φορές, άρα η συχνότητα μηδενισμού της ταχύτητας είναι 20Hz.

δ. Το πλάτος της ταχύτητας του σώματος είναι

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{max} = 20\pi \frac{rad}{s} \cdot 0{,}5m \Rightarrow \upsilon_{max} = 10\pi\, m/s$$

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x_1^2} = \pm\omega\sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \Rightarrow \upsilon = \pm\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\pi\frac{rad}{s} \cdot 0{,}5m\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \pm 5\pi\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

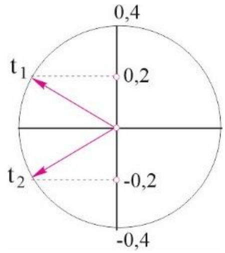
Επειδή το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας βρισκόμαστε στο 2ο τεταρτημόριο, η ταχύτητα είναι αρνητική, άρα $\upsilon = -5\pi\sqrt{3}\frac{m}{s}$.

5.Γ.8

α. Επειδή το σώμα τη χρονική στιγμή t=0s διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, δεν έχουμε αρχική φάση.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\, rad/s, \quad x = 0{,}4\eta\mu 4t \quad (S.I.)$$

β. Χρησιμοποιούμε τον κύκλο αναφοράς για να εντοπίσουμε τις δύο διελεύσεις. Η μετατόπιση είναι από το 2ο τεταρτημόριο στο 3ο.



$$x = 0,4\eta\mu 4t \quad (S.I.)$$

$$0,2 = 0,4\eta\mu 4t \Rightarrow \eta\mu 4t = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4t_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4t_1 = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow t_1 = \dfrac{5\pi}{24}s \end{cases}$$

$$-0,2 = 0,4\eta\mu 4t \Rightarrow \eta\mu 4t = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4t_2 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4t_2 = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow t_2 = \dfrac{7\pi}{24}s \end{cases}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{12}s$$

γ. $p = m\upsilon \quad (1)$

Θα βρούμε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό διέρχεται από τη θέση x=-0,2m.

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$\upsilon = \pm 4\sqrt{0,4^2 - 0,2^2}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = \pm 0,8\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$p = m\upsilon = \pm 0,08\sqrt{3}\ kgm/s$$

δ. $\alpha = \dfrac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -3,2m/s^2$

5.Γ.9

α. Επειδή το σώμα τη χρονική στιγμή t=0s διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, δεν έχουμε αρχική φάση και η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$$x = 0,2\eta\mu 6\pi t \quad (S.I.)$$

β. $\upsilon_{max} = \omega A = 1{,}2\pi\, m/s$, $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3} s$

Συμβαίνει όταν περνά από τη θέση ισορροπίας για $1^η$ φορά, δηλαδή μετά από
$\Delta t = T/2$ ή $\Delta t = 1/6$ s.

γ. $\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{max} = 7{,}2\pi^2\, m/s^2$

Συμβαίνει όταν περνά από ακραία θέση για $1^η$ φορά, δηλαδή μετά από
$\Delta t = T/4$ ή $\Delta t = 1/12$ s.

δ. Η αντικατάσταση της χρονικής στιγμής t_1 στην εξίσωση της απομάκρυνσης -χρόνου δίνει

$$x = 0{,}2\,\eta\mu 6\pi\frac{5}{12} m = 0{,}2\,\eta\mu\frac{30\pi}{12} m \Rightarrow x = 0{,}2\,\eta\mu\left(\frac{24\pi}{12} + \frac{6\pi}{12}\right) m \Rightarrow$$

$$x = 0{,}2\,\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) m$$

Η φάση της ταλάντωσης είναι $(2\pi+\pi/2)$ rad. Δηλαδή το σώμα έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση και το ¼ της ταλάντωσης, δηλαδή βρίσκεται στη θέση x=+A. Άρα

$\Delta s = 4A + A = 5A$ ή $\Delta s = 1$m.

5.Γ.10

α. $\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{5 m/s^2}{0{,}2 m}} \Rightarrow \omega = 5 rad/s$

β. $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow 0{,}1\sqrt{3} m = 0{,}2\,\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6} + \varphi_o\right) m \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{3} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \varphi_o\right)$

Επειδή το σώμα διέρχεται από τη θέση x για $1^η$ φορά με θετική ταχύτητα,

$\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi = \frac{\pi}{3} + \varphi_o$ με κ=0, επομένως $\varphi_o = 0$ rad.

γ. Η εξίσωση της φάσης είναι

$\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = 5t$ (S.I.)

δ. $\alpha = -\omega^2 x$ (1)

Θα βρούμε σε ποια απομάκρυνση x το σώμα έχει την ταχύτητα αυτή.

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$x = A\eta\mu\omega t$

$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{\upsilon^2}{\omega^2}} \Rightarrow x = \pm 0{,}1\text{m}$$

Δεκτή είναι η αρνητική απομάκρυνση, αφού το σώμα κατευθύνεται προς τη Θ.Ι. , $x = -0{,}1\text{m}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε $\alpha = 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

5.Γ.11

α. Το σώμα τη στιγμή t=0s έχει μηδενική ταχύτητα άρα βρίσκεται σε μια από τις δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Επειδή η επιτάχυνση είναι αρνητική, βρίσκεται στη θέση +A και η αρχική του φάση είναι $\varphi_o = \pi/2$ rad.

β. $\upsilon = \upsilon_{max} = 1{,}2\text{m/s}$, $\upsilon_{max} = \omega A$ ή $1{,}2 = \omega A$ (1)

$\alpha_{max} = \omega^2 A$ ή $7{,}2 = \omega^2 A$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε: $\omega = 6\text{rad/s}$, $A = 0{,}2\text{m}$.

γ. $x = 0{,}2\,\eta\mu\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$ S.I

δ. $\alpha = -\omega^2 x = -36(-0{,}1)\,\text{m/s}^2 \Rightarrow \alpha = 3{,}6\,\text{m/s}^2$

Αφού το σώμα έχει $x<0$ και απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας έχει $\upsilon<0$.

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0{,}6\sqrt{3}\,\text{m/s}$$

Άρα $\upsilon = -0{,}6\sqrt{3}\,\text{m/s}$.

5.Γ.12

α. $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\text{s}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\,rad/s$

Αφού την t=0s , $\upsilon=\upsilon_{max}$ άρα $\varphi_o=0$ rad.

β. Η ταχύτητα μηδενίζεται για 1η φορά μετά από

$t_1=T/4=\pi/20s$

$\upsilon_{max} = \omega A \;\Rightarrow\; A = 0,5m$

γ. $x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow -0,5 = 0,5\eta\mu\omega t \Rightarrow -1 = \eta\mu\omega t \Rightarrow$

$\eta\mu\frac{3\pi}{2} = \eta\mu 10t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = 10t \xrightarrow{k=0} t_2 = \frac{3\pi}{20}s$

δ. Η επιτάχυνση γίνεται θετική με μέγιστο μέτρο όταν το σώμα βρίσκεται στην ακραία αρνητική απομάκρυνση, δηλαδή όταν x= -A= -0,5m. Άρα $t_3=3\pi/20s$.

5.Γ.13

α. $x = A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$. Από το διάγραμμα προκύπτει:

A=4/π m , T=0,2s ή ω=10π rad/s.

Την t=0s x=A, επομένως η αρχική φάση είναι π/2 rad.

β. $x = \frac{4}{\pi}\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$, (S.I.)

γ. $\upsilon = 10\pi\cdot\frac{4}{\pi}\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$, (S.I.) ή $\upsilon = 40\cdot\sigma\upsilon\nu(10\pi t+\frac{\pi}{2})$, (S.I.)

δ. Σε κάθε περίοδο το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο 2 φορές. Σε χρόνο 10 s γίνονται 10/0,2=50 επαναλήψεις, άρα σε 10 δευτερόλεπτα το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο 100 φορές.

5.Γ.14

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι της μορφής

$x = A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ (1) με $\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,5\,rad/s$

Επειδή την t=0s το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση είναι φ_o=0 rad και η (1) γράφεται

$x = 6\cdot10^{-2}\cdot\eta\mu 0,5t$ (S.I.)

β. $\upsilon_{max} = \omega A = 3\cdot10^{-2}m/s$

γ. Οι αναμενόμενες ταχύτητες είναι δύο, αφού το σώμα όταν διέρχεται από τη θέση x=A/2, μπορεί είτε να απομακρύνεται είτε να πλησιάζει στη Θ.Ι.

Από τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση έχουμε

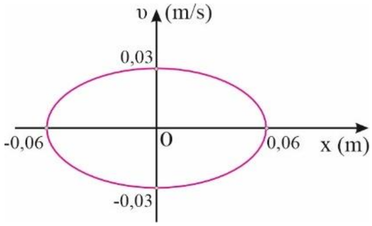
$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega\sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \pm\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \upsilon = \pm 1{,}5\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

δ. Η ταχύτητα σε συνάρτηση με τον χρόνο συνδέονται με τη σχέση

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0{,}5\sqrt{0{,}06^2 - x^2} \quad (\mathrm{S.I.})$$

Το διάγραμμα υ=f(t) δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



5.Γ.15

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι της μορφής

$$x = A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \qquad (1)$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές που μας δίνονται από την εκφώνηση

$$A\frac{\sqrt{3}}{2} = A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12} + \varphi_o\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{3} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_o\right)$$

Η παραπάνω τριγωνομετρική εξίσωση δίνει δύο λύσεις

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \varphi_o \;\; (1) \quad \text{και} \quad 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \varphi_o \;\; (2)$$

Το σώμα την t=0s βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και πλησιάζει στη Θ.Ι. άρα έχει αρνητική ταχύτητα. Επομένως ικανοποιείται η σχέση (2) για κ=0.

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \varphi_o \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

β. Από την εκφώνηση έχουμε A=0,4m και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi\ \mathrm{rad/s}$.

Η σχέση (1) γίνεται

$$x = 0{,}4\cdot\eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \; (\mathrm{S.I.})$$

γ. Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι

$$\alpha = -\omega^2 A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \alpha = -(20\pi)^2\, 0{,}4\cdot\eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \; (\mathrm{S.I.}) \Rightarrow \alpha = -1600\cdot\eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (\mathrm{S.I.})$$

Την t=0,55s έχουμε

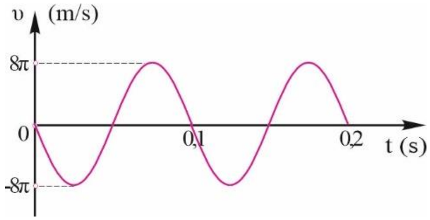
$$\alpha = -1600\cdot\eta\mu\left(20\pi 0.55 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{m}{s^2} = -1600\cdot\eta\mu\left(11\pi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{m}{s^2} = -1600\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)\frac{m}{s^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 1600\frac{m}{s^2}$$

δ. Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

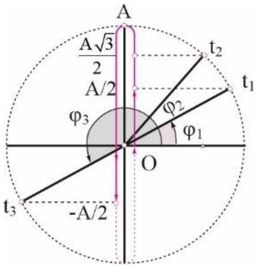
$$\upsilon=\omega A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)=8\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ \ (S.I.)$$

Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



5.Γ.16

α. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι η αρχική φάση είναι μηδέν, επομένως τη στιγμή t=0s το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. με θετική ταχύτητα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς.



Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από τη θέση A/2 για πρώτη φορά

$$\eta\mu\varphi_1=\frac{A/2}{A}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \varphi_1=\frac{\pi}{6}\ rad,$$

$$\varphi_1=\omega t_1\ \Rightarrow\ t_1=\frac{\pi}{6\cdot16\pi}s=\frac{1}{96}s$$

Τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα διέρχεται από τη θέση $A\sqrt{3}/2$ για πρώτη φορά

$$\eta\mu\varphi_2=\frac{A\sqrt{3}/2}{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \varphi_2=\frac{\pi}{3}\ rad,$$

$$\varphi_2=\omega t_2\ \Rightarrow\ t_2=\frac{\pi}{3\cdot16\pi}s=\frac{1}{48}s$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{1}{48}s-\frac{1}{96}s\ \Rightarrow\ \Delta t=\frac{1}{96}s$$

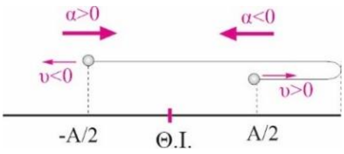
β. Τη χρονική στιγμή t_3 το σώμα διέρχεται από τη θέση -A/2 για πρώτη φορά.

$$\varphi_3=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}rad,$$

$$\varphi_3=\omega t_3\ \Rightarrow\ t_3=\frac{7\pi}{6\cdot16\pi}s=\frac{7}{96}s$$

$$\Delta t=t_3-t_2=\frac{7}{96}s-\frac{1}{48}s\ \Rightarrow\ \Delta t=\frac{5}{96}s$$

γ. Στις θέσεις που ισαπέχουν από τη Θ.Ι. το μέτρο της ταχύτητας υ είναι το ίδιο. Από τη σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης έχουμε



$$\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm\omega\sqrt{A^2-\frac{A^2}{4}}\ \Rightarrow\ \upsilon=\pm\omega A\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta\upsilon = -\upsilon - \upsilon = -2\upsilon \Rightarrow \Delta\upsilon = -\omega A\sqrt{3} \Rightarrow \Delta\upsilon = -4\pi\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

δ. Στις θέσεις που ισαπέχουν από τη Θ.Ι. το μέτρο της επιτάχυνσης α είναι το ίδιο

$$\alpha = \omega^2 x = \omega^2 \frac{A}{2}$$

$$\Delta\alpha = \alpha - (-\alpha) \Rightarrow \Delta\alpha = 2\alpha = \omega^2 A \Rightarrow \Delta\alpha = 64\pi^2\,\frac{m}{s^2}$$

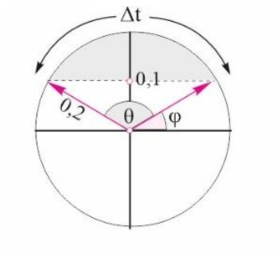
5.Γ.17

α. 2A=0,4m άρα A=0,2m.

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow 5s = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 10s \;,\; \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,2\pi \text{ rad/s}$$

β. Την t=0s , x=0m , υ>0 άρα φ_o=0rad.

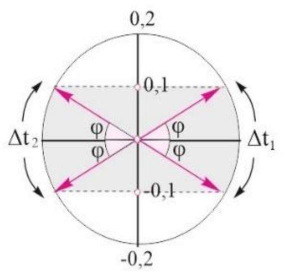
γ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς



$$\eta\mu\varphi = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}\text{rad} \Rightarrow \theta = \pi - 2\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$$

$$\theta = \omega\cdot\Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 0,2\pi\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{10}{3}s$$

δ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς



$$\varphi = \frac{\pi}{6}\text{rad} \;,\; 2\varphi = \omega\cdot\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{5}{3}s$$

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_{o\lambda} = \frac{10}{3}s$$

5.Γ.18

α. Την t=0s η απομάκρυνση είναι θετική και μειώνεται. Επειδή είναι θετική το σώμα βρίσκεται στο 1ο ή 2ο τεταρτημόριο και επειδή μειώνεται, το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, οπότε θα βρίσκεται στο 2ο.

β. Από το διάγραμμα $T/2 = 3s \Rightarrow T = 6s$

$$\upsilon_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\pi\cdot 10^{-2}\text{m/s}$$

γ. Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi_0\right) \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη

$$\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Η αριθμητική αντικατάσταση δίνει $\upsilon = \pm 0,02\pi\sqrt{3}\,m/s$ και επειδή το σώμα βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας επιλέγουμε την ταχύτητα με το αρνητικό πρόσημο, άρα $\upsilon = -0,02\pi\sqrt{3}\,m/s$

δ. Η στιγμή t=3s αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, οπότε το σώμα θα βρίσκεται στην αντίθετη απομάκρυνση ,

x=-6cm, οπότε

$$\alpha = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{6s}\right)^2 \left(-0,06m\right) \Rightarrow \alpha = \frac{4}{60}m/s^2$$

5.Γ.19

α. Επειδή $\eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\varphi$ η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$x = 0,4\sigma\upsilon\nu 40\pi t = 0,4\eta\mu(40\pi t + \frac{\pi}{2})\ (S.I.)$$

Άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_o = \frac{\pi}{2}rad$.

β. Η απομάκρυνση του σώματος όταν η φάση θα έχει αυξηθεί κατά π/3 rad είναι

$$x_{\tau\varepsilon\lambda} = 0,4\eta\mu(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x_{\tau\varepsilon\lambda} = 0,4\eta\mu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_{\tau\varepsilon\lambda} = 0,2m$$

Άρα η μετατόπιση θα είναι

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_o = 0,2m - 0,4m \Rightarrow \Delta x = -0,2m$$

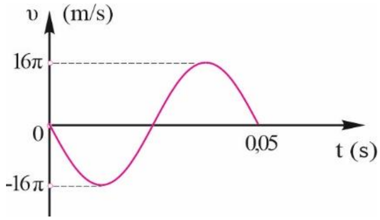
γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \upsilon = 16\pi\sigma\upsilon\nu(40\pi t + \frac{\pi}{2})\ (S.I.)$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} \Rightarrow T = 0,05s$$

και η γραφική παράσταση αυτής δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Για να γίνει διπλάσια η μέγιστη ταχύτητα, διατηρώντας σταθερό το πλάτος, θα πρέπει να διπλασιαστεί η συχνότητα της ταλάντωσης και η περίοδος να υποδιπλασιαστεί

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon'_{max}} = \frac{2\pi f A}{2\pi f' A} \Rightarrow \frac{\upsilon_{max}}{2\upsilon_{max}} = \frac{2\pi f}{2\pi f'} \Rightarrow f' = 2f \Rightarrow T' = \frac{T}{2}$$

Άρα η επί τοις εκατό μεταβολή της περιόδου είναι

$$\pi\% = \frac{T' - T}{T} 100\% = \frac{T/2 - T}{T} 100\% \Rightarrow \pi\% = -50\%$$

5.Γ.20

α. Από το διάγραμμα έχουμε

$$\upsilon^2 = \alpha - \beta x^2$$

$$x = 0m \Rightarrow \upsilon^2 = \alpha = 1m^2/s^2$$

$$\upsilon = 0m/s \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{x^2} = 100s^{-2}$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$\upsilon^2 = 1 - 100x^2 (S.I.)\ \ 0m^2 \le x^2 \le 0,01m^2$$

β. Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_o) = \dfrac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) = \dfrac{x^2}{A^2}\ (1) \\ \upsilon = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) = \dfrac{\upsilon}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) = \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}\ (2) \end{array}\right\}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2\ (3)$$

Από τη γραφική παράσταση και την εξίσωση (3) προκύπτει ότι

$$x = 0m \Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2 A^2 = 1m^2/s^2 \Rightarrow \omega A = 1m/s \quad (4)$$

$$\upsilon = 0m/s \Rightarrow A^2 = 0{,}01m^2 \Rightarrow A = 0{,}1m$$

Από τη εξίσωση (4) προκύπτει ο ρυθμός μεταβολής της φάσης

$$\omega A = 1m/s \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 10rad/s$$

γ. Από την εξίσωση επιτάχυνσης - απομάκρυνσης έχουμε

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow x = -\frac{\alpha}{\omega^2} \Rightarrow x = -0{,}04m$$

δ. Βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στην επιτάχυνση και στην ταχύτητα

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_o) = -\frac{\alpha}{\omega^2 A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} \\ &\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) = \frac{\upsilon}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \pm\omega\sqrt{\omega^2 A^2 - \upsilon^2} \Rightarrow \alpha = \pm 5\sqrt{3}m/s^2$$

και επειδή το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του, η απομάκρυνσή του είναι θετική και η επιτάχυνσή του θα είναι αρνητική, άρα θα έχουμε

$$\alpha = -5\sqrt{3}m/s^2$$

5.Γ.21

α. Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη μέγιστη απομάκρυνση και τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος

$$x_{max} = A = 0{,}1m$$

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = 100rad/s$$

Άρα η απόσταση ανάμεσα στις ακραίες θέσεις είναι

$$d = 2A = 0{,}2m$$

β. Βρίσκουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων του σώματος στο χρονικό διάστημα $5\pi\cdot 10^{-2}\mathrm{s}$ από την έναρξη της ταλάντωσης

$$N=\frac{\Delta t}{T}\Rightarrow N=\frac{5\pi\cdot 10^{-2}\mathrm{s}}{2\pi\cdot 10^{-2}\mathrm{s}/\tau\alpha\lambda.}\Rightarrow N=2{,}5 \text{ ταλαντώσεις}$$

Σε κάθε ταλάντωση το σώμα διανύει μήκος διαδρομής ίσο με 4Α, άρα σε 2,5 ταλαντώσεις το μήκος διαδρομής θα είναι

$$S=N\cdot 4A\Rightarrow S=10A=1\mathrm{m}$$

γ. Η ταλάντωση έχει μηδενική αρχική φάση, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x=A\eta\mu\omega t\Rightarrow x=0{,}1\eta\mu 100t\ \text{(S.I.)}$$

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το σώμα από τη θέση x_1=0,05m στη θέση x_2=-0,05m βρίσκεται αν αφαιρέσουμε από τη στιγμή που το σώμα περνά για 1η φορά από τη θέση x_2=-0,05m τη στιγμή που περνά για 2η φορά από τη θέση x_1=0,05m.

Βρίσκουμε τη 2η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα περνάει από τη θέση x_1=0,05m

$$0{,}05=0{,}1\eta\mu 100t\Rightarrow \eta\mu 100t=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}100t=2k\pi+\dfrac{\pi}{6} & (1)\\ 100t=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6} & (2)\end{array}\right\}(2),k=0:\ 100t=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow t_1=\frac{5\pi}{600}\mathrm{s}$$

Βρίσκουμε την 1η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα περνάει από τη θέση x_2=-0,05m

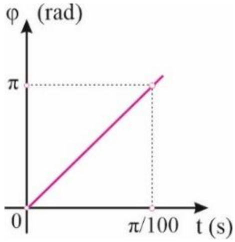
$$-0{,}05=0{,}1\eta\mu 100t\Rightarrow \eta\mu 100t=\eta\mu(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}100t=2k\pi-\dfrac{\pi}{6} & (3)\\ 100t=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6} & (4)\end{array}\right\}(4),k=0:\ 100t=\frac{7\pi}{6}\Rightarrow t_2=\frac{7\pi}{600}\mathrm{s}$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{7\pi}{600}\mathrm{s}-\frac{5\pi}{600}\mathrm{s}\Rightarrow \Delta t=\frac{\pi}{300}\mathrm{s}$$

δ. Η φάση της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$\varphi=\omega t=100t\ \text{(S.I.)}$$

Για $t=\dfrac{\pi}{100}\mathrm{s}\Rightarrow\varphi=\pi\mathrm{rad}$, άρα η γραφική παράσταση φ - t είναι όπως στο σχήμα.



5.Γ.22

α. Από τη γραφική παράσταση που μας δίνεται συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση επιτάχυνσης - χρόνου είναι

$$\alpha = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{0,4}t \Rightarrow \alpha = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi t \text{ (S.I.)}$$

Επειδή $\eta\mu(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu\varphi$ η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$\alpha = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi t = -6 \cdot \eta\mu(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$.

β. Ο αριθμός των ταλαντώσεων σε χρονικό διάστημα Δt=1s είναι

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1s}{0,4s/\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta} \Rightarrow N = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}$$

Το σώμα ξεκινάει από την ακραία θετική θέση την t=0s και καταλήγει στην ακραία αρνητική θέση. Σε κάθε ταλάντωση περνάει από τη θέση ισορροπίας του δύο φορές. Άρα ο αριθμός των διελεύσεων από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι συνολικά 5.

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι

$$\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \upsilon = \frac{\alpha_{max}}{\omega} \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \upsilon = \frac{1,2}{\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Άρα η ταχύτητα τη ζητούμενη στιγμή είναι

$$\upsilon = \frac{1,2}{\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \upsilon = \frac{1,2}{\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \upsilon = -\frac{1,2}{\pi} m/s$$

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$\upsilon_{max} = \frac{1,2}{\pi} m/s = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{\frac{1,2}{\pi}\frac{m}{s}}{5\pi\frac{rad}{s}} \Rightarrow A = \frac{1,2}{5\pi^2} m \Rightarrow A = 0,024m$$

Βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος με το τετράγωνο της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του

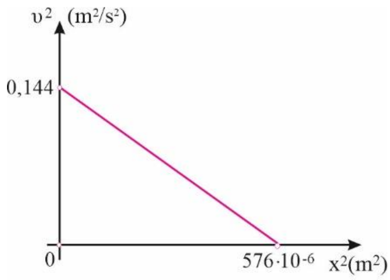
$$\left\{\begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \eta\mu(\omega t+\varphi_o) = \dfrac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t+\varphi_o) = \dfrac{x^2}{A^2} (1) \\ \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) = \dfrac{\upsilon}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_o) = \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} (2) \end{array}\right\}$$

$$(1)+(2):\ \eta\mu^2(\omega t+\varphi_o)+\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_o) = \frac{x^2}{A^2}+\frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 25\pi^2 \cdot 0{,}024^2 - 25\pi^2 \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = 0{,}144 - 250x^2 \text{ (S.I.)}$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



5.Γ.23

α. Το σώμα ξεκινάει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t=0s με μηδενική ταχύτητα, άρα βρίσκεται σε ακραία θέση. Επειδή η επιτάχυνση έχει αρνητικό πρόσημο, το σώμα θα βρίσκεται στη θέση της ακραίας θετικής απομάκρυνσης, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσής του είναι $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$rad .

β. Το μέγεθος z της γραφικής παράστασης έχει τη στιγμή t=0s μηδενική τιμή, άρα δεν μπορεί να είναι x=f(t) ή α=f(t).

Η συνάρτηση που περιγράφει τη γραφική παράσταση για το μέγεθος z είναι

$$z = -z_o \eta\mu\omega t \Rightarrow z = z_o \sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα, το φυσικό μέγεθος z είναι η ταχύτητα που είναι ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

γ. Το σημείο Γ αντιστοιχεί σε μισή περίοδο της α.α.τ.

Σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου το σώμα διανύει διάστημα ίσο με 1,2m, άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$s = 4A \Rightarrow A = \frac{s}{4} = 0{,}3\text{m}$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας είναι 3m/s, οπότε

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow T = \frac{2\pi A}{\upsilon_{max}} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 0,3m}{3m/s} s \Rightarrow T = 0,2\pi s$$

Άρα το σημείο Γ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_\Gamma = 0,1\pi\ s$.

δ. Βρίσκουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων σε χρονικό διάστημα ίσο με 0,55π s

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{0,55\pi s}{0,2\pi s/\tau\alpha\lambda.} \Rightarrow N = 2,75 \text{ ταλαντώσεις}$$

Σε κάθε πλήρη ταλάντωση το σώμα περνάει από τη θέση x=-0,15m με αρνητική ταχύτητα μία φορά, άρα περνάει δύο φορές από τη θέση αυτή σε δύο ταλαντώσεις. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το σώμα ξεκινάει να ταλαντώνεται από την ακραία θετική θέση, άρα σε ¾ της ταλάντωσης θα περάσει πάλι από τη θέση αυτή με αρνητική ταχύτητα, οπότε συνολικά περνάει τρεις φορές.

5.Γ.24

α. Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t=0s δίνουν

$$x = A\eta\mu\varphi_o$$
$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi_o$$

Θέλουμε $x < 0,\ \upsilon > 0$, άρα θα έχουμε

$$\eta\mu\varphi_o < 0,\ \ \sigma\upsilon\nu\varphi_o > 0$$

Οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται ταυτόχρονα στο 4ο τεταρτημόριο, δηλαδή στο διάστημα

$$\frac{3\pi}{2} rad < \varphi_o < 2\pi rad$$

β. Οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση γράφονται και ως εξής

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$
$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \upsilon = \omega A\eta\mu(\omega t + \varphi_o + \frac{\pi}{2})$$
$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \alpha = \omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_o + \pi)$$

Η διαφορά φάσης της ταχύτητας και της απομάκρυνσης είναι

$$\Delta\varphi_{\upsilon,x} = \varphi_\upsilon - \varphi_x = \frac{\pi}{2} rad$$

επομένως η φάση της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\varphi_\upsilon = \varphi_x + \frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{5\pi}{2}\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad} \Rightarrow \varphi_\upsilon = 3\pi\text{rad}$$

Η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης είναι

$$\Delta\varphi_{\alpha,x} = \varphi_\alpha - \varphi_x = \pi\,\text{rad}$$

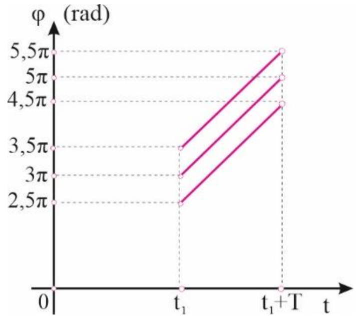
επομένως η φάση της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\varphi_\alpha = \varphi_x + \pi\text{rad} = \frac{5\pi}{2}\text{rad} + \pi\text{rad} \Rightarrow \varphi_\alpha = \frac{7\pi}{2}\text{rad}$$

γ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\alpha = \alpha_{max}\eta\mu\frac{7\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \alpha_{max}\eta\mu(2\pi + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \alpha = -\alpha_{max}$$

δ. Οι γραφικές παραστάσεις των φάσεων της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη στιγμή t_1 μέχρι να ολοκληρωθεί μία περίοδος της ταλάντωσης εί- ναι όπως στο σχήμα.



5.Γ.25

α. Από την εκφώνηση της άσκησης την t=0s το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και έχει θετική ταχύτητα, άρα η αρχική φάση της απομάκρυνσης του σώματος είναι μηδενική.

Οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση γράφο- νται και ως εξής:

$$x = A\eta\mu(\omega t)$$
$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \upsilon = \omega A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$
$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \alpha = \omega^2 A\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Άρα η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης είναι

$$\Delta\varphi_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha(o)} - \varphi_{x(o)} = \pi\text{rad} \Rightarrow \varphi_{\alpha(o)} = \pi\text{rad}$$

οπότε το φυσικό μέγεθος του οποίου παριστάνεται η φάση είναι η επιτάχυνση.

β. Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi - \pi}{1}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = 2\pi\text{rad/s}$$

οπότε το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2\pi}s \Rightarrow \Delta t = 0,5s$$

γ. Από τη μέγιστη επιτάχυνση βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{\alpha_{max}}{\omega^2} \Rightarrow A = \frac{2\pi^2}{4\pi^2}m \Rightarrow A = 0,5m$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x_1 = A\eta\mu\omega t = 0,5\eta\mu 2\pi t(S.I.)$$

δ. Όταν συναντηθούν τα δύο σώματα θα έχουν την ίδια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 0,5\eta\mu 2\pi t = 0,5\sigma\upsilon\nu 2\pi t \Rightarrow \varepsilon\varphi 2\pi t = 1 \Rightarrow$$
$$\varepsilon\varphi 2\pi t = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi t = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{8}s$$

5.Γ.26

α. Το πλάτος ταλάντωσης του Σ_2 είναι $A_2 = 0,6m - A_1 \Rightarrow A_2 = 0,4m$.

Το πηλίκο των μέγιστων ταχυτήτων των δύο σωμάτων είναι

$$\frac{\upsilon_{max,1}}{\upsilon_{max,2}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} \Rightarrow \frac{\upsilon_{max,1}}{\upsilon_{max,2}} = \frac{10\pi \cdot 0,2m/s}{7,5\pi \cdot 0,4m/s} \Rightarrow \frac{\upsilon_{max,1}}{\upsilon_{max,2}} = \frac{2}{3}$$

β. Για να συναντηθούν τα δύο σώματα ξανά θα πρέπει να έχουν κάνει ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Για να είναι η πρώτη φορά μετά την t=0s, οι ακέραιοι θα πρέπει να είναι οι ελάχιστοι

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{f_1\Delta t}{f_2\Delta t} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\omega_1}{2\pi}\Delta t}{\frac{\omega_2}{2\pi}\Delta t} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{10\pi}{7,5\pi} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{4 \cdot 2,5\pi}{3 \cdot 2,5\pi} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{4}{3}$$

Άρα, τα σώματα συναντιούνται για πρώτη φορά, μετά την t=0s, όταν το Σ_1 έχει κάνει τέσσερις ταλαντώσεις και το Σ_2 έχει κάνει τρεις. Επομένως το χρονικό διάστημα που έχει παρέλθει είναι

$$\Delta t = 4T_1 \Rightarrow \Delta t = 4\frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \Delta t = \frac{8\pi}{10\pi}s \Rightarrow \Delta t = 0,8s$$

γ. Το διάστημα που έχει διανύσει το κάθε σώμα μέχρι τη στιγμή που θα συναντηθούν για πρώτη φορά είναι:

$$S_1 = 4 \cdot 4A_1 \Rightarrow S_1 = 3,2\text{m}$$
$$S_2 = 3 \cdot 4A_2 \Rightarrow S_2 = 4,8\text{m}$$

δ. Το σώμα $Σ_2$ περνάει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{T_2}{4} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{4\omega_2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{4 \cdot 7,5\pi}\text{s} \Rightarrow t = \frac{1}{15}\text{s}$$

Την ίδια στιγμή το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση

$$x_1 = 0,2\eta\mu(10\pi\frac{1}{15} + \frac{\pi}{2})\text{m} \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})\text{m} \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu\frac{7\pi}{6}\text{m} \Rightarrow x_1 = 0,2\left(-\frac{1}{2}\right)\text{m} \Rightarrow x_1 = -0,1\text{m}$$

5.Γ.27

α. Οι χρονικές εξισώσεις x=f(t) και y=f(t) των προβολών της επιβατικής ακτίνας του σώματος στους άξονες xx΄ και yy΄ από το σχήμα είναι

$$\eta\mu\varphi = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R\eta\mu\varphi \Rightarrow y = R\eta\mu\omega t \Rightarrow y = 0,5\eta\mu 10t \ \ (\text{S.I.})$$
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow x = R\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow x = 0,5\sigma\upsilon\nu 10t \ \ (\text{S.I.})$$

β. Η διαφορά φάσης ανάμεσα στις χρονικές εξισώσεις x=f(t) και y=f(t) είναι

$$y = 0,5\eta\mu 10t(\text{S.I.})$$

$$x = 0,5\sigma\upsilon\nu 10t = 0,5\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})(\text{S.I.})$$

$$\Delta\varphi_{x,y} = \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) - 10t \Rightarrow \Delta\varphi_{x,y} = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

και προηγείται η ταλάντωση του σώματος στον άξονα x΄x.

γ. Για την πρώτη φορά στην οποία x=y, από το σχήμα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\text{rad} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4}\text{rad} \Rightarrow t = \frac{\pi}{40}\text{s}$$

δ. Όταν για πρώτη φορά το σώμα έχει $x = -0,25\text{m}$, τότε

$$-0,25 = 0,5\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\ (1) \\ \varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}\ (2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(1),\ k=0} \varphi = \frac{2\pi}{3}\mathrm{rad}$$

5.Γ.28

α. Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με 0,2m, οπότε το μήκος της διαδρομής που διανύει το σώμα σε δέκα περιόδους είναι

$$S = 10 \cdot 4A \Rightarrow S = 40 \cdot 0,2\mathrm{m} \Rightarrow S = 8\mathrm{m}$$

β. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, όταν η φάση της ταλάντωσης είναι 5π/6 rad είναι

$$x = A\eta\mu\varphi \Rightarrow x = 0,2\eta\mu\frac{5\pi}{6}\mathrm{m} \Rightarrow x = 0,2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{m} \Rightarrow x = 0,1\mathrm{m}$$

γ. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του μέτρου της επιτάχυνσής του είναι ίσο με μισή περίοδο. Άρα η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow \omega = 4\mathrm{rad/s}$$

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\upsilon^2 = \omega^2A^2 - \omega^2x^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow \upsilon = \pm4\sqrt{0,04 - 0,03}\mathrm{m/s} \Rightarrow \upsilon = \pm0,4\mathrm{m/s}$$

Επειδή το σώμα έχει αρνητική απομάκρυνση και απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του έπεται ότι η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική άρα, $\upsilon = -0,4\mathrm{m/s}$.

δ. Οι χρονικές εξισώσεις της ταλάντωσης μπορούν να γραφούν και ως εξής

$$x = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu\varphi_x$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \upsilon = \omega A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \upsilon = \omega A\eta\mu\varphi_\upsilon$$

$$\alpha = -\omega^2A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \alpha = \omega^2A\eta\mu(\omega t + \pi) \Rightarrow \alpha = \omega^2A\eta\mu\varphi_\alpha$$

η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της ταχύτητας είναι

$$\Delta\varphi_{\alpha,\upsilon} = \varphi_{\alpha} - \varphi_{\upsilon} = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Επομένως η φάση της επιτάχυνσης τη στιγμή αυτή είναι

$$\varphi_{\alpha} = \varphi_{\upsilon} + \frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος, δηλαδή η επιτάχυνσή του την ίδια στιγμή είναι

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \omega^2 A\eta\mu\varphi_{\alpha} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \left(4\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,2\text{m} \cdot \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -3,2\text{m}/\text{s}^2$$

5.Γ.29

α. Από τον πίνακα με τα δεδομένα που μας δίνεται συμπεραίνουμε ότι το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μέγιστα της στάθμης του νερού είναι ίσο με T=12h.

β. Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{12}\text{rad}/\text{h} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}\text{rad}/\text{h}$$

Η χρονική εξίσωση της απόκλισης των υδάτων από τη μέση στάθμη τους είναι

$$\Delta h = \Delta h_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$

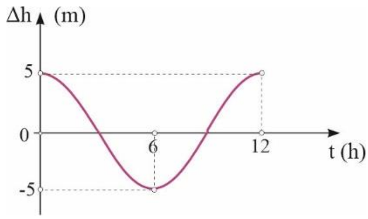
Επειδή την χρονική στιγμή t=0h η απόκλιση είναι μέγιστη θετική θα έχουμε

$$\Delta h_{max} = \Delta h_{max}\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi_o = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & (1) \\ \varphi_o = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} & (2) \end{matrix}\right\}$$

$$(1), k = 0 : \varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Με βάση τον πίνακα θα έχουμε για τη μέγιστη απόκλιση $\Delta h_{max} = 5\text{m}$. Οπότε η χρονική εξίσωση γίνεται

$$\Delta h = 5\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right), (\Delta h \to \text{m}, t \to \text{h})$$



Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι όπως στο σχήμα.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στάθμης των υδάτων (ταχύτητα ανύψωσης/ταπείνωσης της επιφάνειας) θα είναι

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \omega \Delta h_{max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{5\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\Delta h}{\Delta t} \to m/h, t \to h\right)$$

Με βάση την παραπάνω εξίσωση ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στάθμης είναι

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{max} = \frac{5\pi}{6} m/h$$

δ. Η βαρυτική ενέργεια των υδάτων είναι

$$U = mgh$$

Για ταπείνωση της επιφάνειας των υδάτων κατά h=10m ο μέσος ρυθμός που παράγεται ενέργεια θα είναι ίσος με τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της βαρυτικής ενέργειας, δηλαδή

$$P_\mu = \left|\frac{d\bar{U}}{dt}\right|$$

Εάν με dm/dt συμβολίσουμε τον μέσο ρυθμό εκροής των υδάτων τότε θα έχουμε

$$P_\mu = gh\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{P_\mu}{gh} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{3 \cdot 10^6 J/s}{10 \cdot 10 \frac{m^2}{s^2}} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 3 \cdot 10^4 Kg/s$$