Θέματα Γ

12.Γ.1

α. Από τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων βρίσκουμε το πλάτος, τη συχνότητα, την περίοδο και το μήκος κύματος:

$$A = 2\text{cm},\ f = 2\text{Hz},\ T = 0{,}5\text{s},\ \lambda = 1\text{m}$$

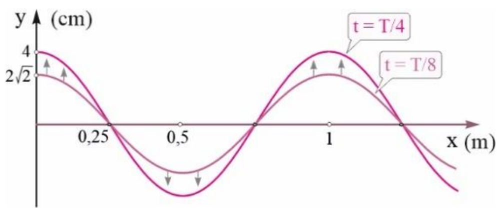
Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\cdot t \Rightarrow y = 4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi x\cdot\eta\mu 4\pi t\ \ (y\ \text{cm},\ x\ \text{cm})$$

β. Βρίσκουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης - χρόνου των διαφόρων σημείων του μέσου τις χρονικές στιγμές t=T/8 και t=T/4:

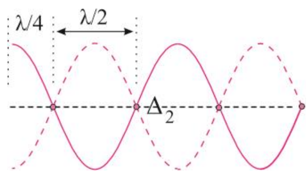
την T/8: $y = 4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi x\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi x$

την T/4: $y = 4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi x\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} \Rightarrow y = 4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi x$



Άρα η γραφική παράσταση των δύο στιγμιότυπων σε κοινό διάγραμμα θα είναι όπως στο σχήμα.

γ. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ της κοιλίας Ο και του 2ου πλησιέστερου σ' αυτήν δεσμού θα είναι



$$x = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{4} \Rightarrow x = 0{,}75\text{m}$$

δ. Το πλάτος δίνεται από τη σχέση

$$|A'_\Delta| = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 4\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\frac{8}{3}}{1}\right|\text{cm} \Rightarrow |A'_\Delta| = 2\text{cm}$$

12.Γ.2

α. Το μήκος κύματος του στάσιμου είναι

$$\frac{\pi x}{8} = \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 16\text{m}$$

Άρα η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών: $\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 8\text{m}$.

β. Οι εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν για τη δημιουργία του στάσιμου κύματος:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y_1 = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{16}\right) \text{(S.I.)}$$

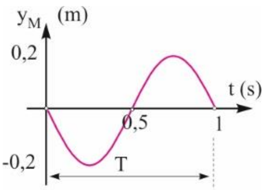
$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2 = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{16}\right) \text{(S.I.)}$$

γ. Για το σημείο Μ έχουμε

$$A' = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}8\text{m} \Rightarrow A' = -0{,}2\text{m}$$

άρα το σημείο Μ είναι κοιλία. Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για το σημείο Μ είναι

$y_M = A' \cdot \eta\mu\omega t = -0{,}2\eta\mu 2\pi t$ (S.I.)



Η γραφική παράσταση απομάκρυνσης - χρόνου για το σημείο Μ δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

δ. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Ν είναι

$$A' = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}4\text{m} \Rightarrow A' = 0\text{m}$$

άρα το Ν είναι δεσμός. Η γραφική παράσταση απομάκρυνσης - χρόνου για το σημείο Ν δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

ε. Από τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Μ βρίσκουμε ότι

$$\upsilon_M = \omega A'\sigma\upsilon\nu\omega t = -0{,}4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi t = -0{,}4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot 1{,}125)\text{m/s} \Rightarrow \upsilon_M = -0{,}2\pi\sqrt{2}\,\text{m/s}$$

12.Γ.3

α. Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος βρίσκουμε το πλάτος, το μήκος κύματος , την κυκλική συχνότητα και την περίοδο:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t \\ y &= 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3} \cdot \eta\mu 10\pi t \ \text{(cm)} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{gathered} A = 1\text{ cm},\ \lambda = 6\text{ cm}, \\ \omega = 10\pi\text{ rad/s} \end{gathered} \qquad \omega = 10\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 10\pi \Rightarrow T = 0{,}2\text{s}$$

Άρα οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων που συμβάλλουν για τη δημιουργία του στάσιμου κύματος είναι:

$$y_1 = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{6}\right)(\text{cm}),\; y_2 = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2} + \frac{x}{6}\right)(\text{cm})$$

β. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι

$$x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = 3\text{cm}$$

γ. Από το μήκος της χορδής βρίσκουμε τον αριθμό των δεσμών

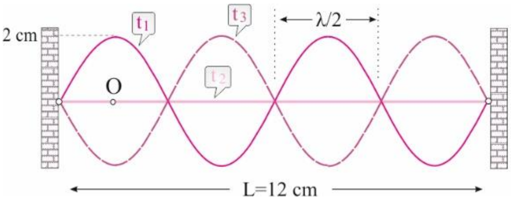
$$L = \kappa\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 12\text{cm} = N\cdot 3\text{cm} \Rightarrow N = 4$$

Άρα σχηματίζονται 4 κοιλίες και δημιουργούνται 5 δεσμοί.

δ. Βρίσκουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης - θέσης τις στιγμές t_1=1/20s , t_2=2/20s και t_3=3/20s:

$$t_1 = \frac{1}{20}\text{s}:\; y_1 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}\cdot\eta\mu\frac{10\pi}{20}(\text{cm}) \Rightarrow\; y_1 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}(\text{cm})$$
$$t_2 = \frac{2}{20}\text{s}:\; y_2 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}\cdot\eta\mu\pi\,(\text{cm}) = 0\text{cm}$$
$$t_3 = \frac{3}{20}\text{s}:\; y_3 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}\cdot\eta\mu\frac{30\pi}{20}(\text{cm}) \Rightarrow y_3 = -2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}(\text{cm})$$

Άρα τα αντίστοιχα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος σε κοινό διάγραμμα θα είναι όπως στο σχήμα.



12.Γ.4

α. Η εξίσωση του δεύτερου κύματος θα είναι

y_2=0,2ημπ(t+x) , (S.I)

Από την εξίσωση που δίνεται βρίσκουμε το πλάτος, την περίοδο και το μήκος κύματος

$$y_1 = 0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}\right)\;(\text{S.I.})$$

Άρα A=0,2m, T=2s, λ=2m.

Οπότε η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\omega t \Rightarrow\; y = 0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot\eta\mu\pi t\;\;(\text{S.I.})$$

β. Το σημείο Μ απέχει x=0,75m από την κοιλία, επομένως το πλάτος ταλάντωσής του είναι

$$A' = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 0,75\pi = -0,2\sqrt{2}\,\text{m} \;\Rightarrow\; |A'| = 0,2\sqrt{2}\,\text{m}$$

γ. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σημείου Μ είναι

$$K_{max} = \frac{1}{2} m \upsilon_{max}{}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A'^2 \Rightarrow K_{max} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{J}$$

δ. Από την εξίσωση του πλάτους βρίσκουμε τις θέσεις των συμφασικών σημείων που έχουν ίδιο πλάτος με το Μ και ίδιο πρόσημο στο Α΄

$$A' = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\,\pi x \;\Rightarrow -0,2\sqrt{2} = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\,\pi x \;\Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\pi x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \begin{cases} \pi x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi & (1) \\ \pi x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi & (2) \end{cases}$$

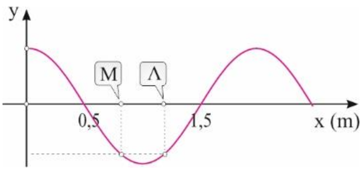
Η (1) δίνει τις τιμές: κ=0, x=0,75m

κ=1 , x=2,75m

Η (2) δίνει τις τιμές: κ=0, x=–0,75m

κ=1 , x=1,25m.

Το ζητούμενο σημείο βρίσκεται στην θέση x=1,25m, άρα Δx=0,5m όπως δείχνεται και στο διπλανό σχήμα.



12.Γ.5

α. Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία της χορδής είναι

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow f = 50\,\text{Hz}$$

β. Η εξίσωση του τρέχοντος κύματος είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(f t - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,08\eta\mu 2\pi\left(50t - \frac{x}{2}\right)\ (\text{SI})$$

γ. Η ενέργεια της ταλάντωσης ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\Delta m(2\pi f)^2 A^2 \Rightarrow \Delta E = 0,64\,\text{J}$$

δ. Για τον 11ο δεσμό θα βάλουμε κ=10 στη σχέση που δίνει τις θέσεις των δεσμών και θα έχουμε

$$x_\Delta = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} = 21\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\Delta = 10{,}5\,\text{m}$$

12.Γ.6

α. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 0{,}08 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{1{,}2}\eta\mu\frac{\pi}{3}t \text{ , (S.I.)}$$

β. Η απομάκρυνση του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_1=0,5s βρίσκεται από την εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$y_M = 0{,}08 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi \cdot 0{,}4}{1{,}2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0{,}5\right)\text{m} \Rightarrow y_M = 0{,}02\,\text{m}$$

γ. Η εξίσωση ταχύτητας - χρόνου για το σημείο Λ είναι

$$\upsilon_\Lambda = \omega A'_\Lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t_1 \quad (1)$$

ενώ ο όρος του πλάτους ταλάντωσης του Λ είναι

$$A'_\Lambda = 0{,}08 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi \cdot 3{,}2}{1{,}2}\text{m} = -0{,}04\,\text{m}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\upsilon_\Lambda = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\cdot 10^{-2}\ \text{m/s}$$

δ. Η απόσταση μίας κοιλίας σε σχέση με την κοιλία Ο(x_O=0m) βρίσκεται από τη σχέση

$$x = \kappa\frac{\lambda}{2} = \kappa \cdot 1{,}2 \text{ , } \kappa = 0,1,2....$$
$$0{,}4\,\text{m} < \kappa \cdot 1{,}2 < 3{,}2\,\text{m} \Rightarrow 0{,}33 < \kappa < 2{,}66 \text{ , } \kappa = 1,2$$

Άρα μεταξύ των σημείων Μ και Λ υπάρχουν 2 κοιλίες.

12.Γ.7

α. Από τη δοσμένη εξίσωση βρίσκουμε το πλάτος, την συχνότητα και το μήκος κύματος:

2A=10cm, f=10Hz, $\frac{\pi x}{4} = \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 8\,\text{cm}$

β. Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που παράγουν το στάσιμο κύμα είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(f\,t - \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}05\eta\mu 2\pi\left(10t - \frac{x}{0{,}08}\right)\text{(SI)}$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(f\,t + \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}05\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x}{0{,}08}\right)\text{(SI)}$$

γ. Στη χρονική εξίσωση της ταχύτητας αντικαθιστούμε τις τιμές t=0,1s και x=3cm

$$\upsilon_M = \omega\cdot 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu 2\pi f\,t \Rightarrow \upsilon_M = 2\pi\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi 3}{8}\sigma\upsilon\nu 20\pi\cdot 0{,}1\ \text{m/s} \Rightarrow \upsilon_M = -\pi\sqrt{2}\,\text{m/s} \Rightarrow$$
$$\upsilon_M = -3{,}14\sqrt{2}\,\text{m/s}$$

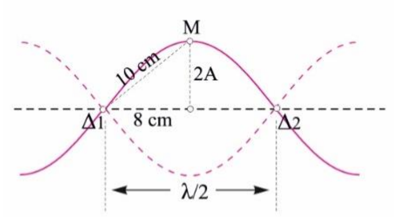
δ. Θα πρέπει η θέση των κοιλιών x να παίρνει τιμές στο διάστημα μεταξύ x_A=3cm και x_B=9cm οπότε έχουμε

$$x_\kappa = \kappa\frac{\lambda}{2}$$
$$3\text{cm} < \kappa\frac{\lambda}{2} < 9\text{cm} \Rightarrow 0{,}75\text{cm} < \kappa < 2{,}25\text{cm}$$

Άρα κ=1,2. Για κ=1: $x_1 = \frac{\lambda}{2} = 4\text{cm}$, για κ=2: $x_2 = 2\frac{\lambda}{2} = 8\text{cm}$

12.Γ.8

α. Ένα στιγμιότυπο της χορδής είναι το διπλανό.



Τα σημείο M είναι κοιλία, αφού ισαπέχει από δύο δεσμούς.

Από τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία βρίσκουμε το πλάτος

$$A'_M = 2A,\quad (2A) = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\text{cm} \text{ άρα } 2A = 6\text{cm}$$

οπότε η συχνότητα υπολογίζεται από τη μέγιστη ταχύτητα

$$\upsilon_{max} = 2\pi f\cdot 2A \Rightarrow f = \frac{\upsilon_{max}}{4\pi A} = 3\text{Hz}$$

β. Από την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς δεσμούς βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$(\Delta_1\Delta_2) = 16\text{cm} \text{ άρα } \lambda = 32\text{cm}$$

Η ταχύτητα των τρεχόντων κυμάτων είναι

$$\upsilon = \lambda f = 32 \cdot 3\,cm/s \Rightarrow \upsilon = 96\ cm/s$$

γ. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t = 0{,}06\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{0{,}32}\eta\mu 6\pi t\ (SI)$$

δ. Η εξίσωση που δίνει το πλάτος είναι

$$|A'| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right|$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση για να βρούμε τις θέσεις των σημείων

$$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = A \Rightarrow \pm\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$$

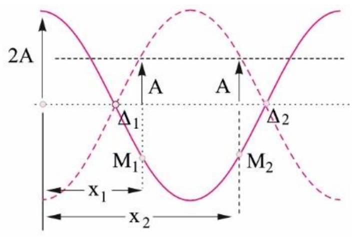
Η παραπάνω εξίσωση δίνει τις εξής λύσεις:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}, \quad \begin{matrix} 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi x}{\lambda} & (1) \\ 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi x}{\lambda} & (2) \end{matrix}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}, \quad \begin{matrix} 2\kappa\pi + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi x}{\lambda} & (3) \\ 2\kappa\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi x}{\lambda} & (4) \end{matrix}$$

Θα πρέπει η απόσταση x να ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{\lambda}{4} < x < \frac{3\lambda}{4} \Rightarrow 8\,cm < x < 24\,cm$$

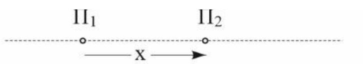


Η σχέση (3) για κ=0 δίνει $x_1=\lambda/3=10{,}66$cm(σημείο M_1).

Η σχέση (4) για κ=1 δίνει $x_2=2\lambda/3=21{,}33$cm(σημείο M_2).

12.Γ.9

α. Επειδή $\varphi_2>\varphi_1$, το κύμα κατευθύνεται από το Π_2 προς το Π_1.



β. Από την εξίσωση ταλάντωσης του Π_2 βρίσκουμε τη συχνότητα ταλάντωσης

ω=30π rad/s ή f=15Hz

Από τη διαφορά φάσης βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi \cdot (x_2 - x_1)}{\lambda} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi \cdot 6\text{cm}}{\lambda}$$

Οπότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

υ= λ·f = 0,72·15 m/s ή υ = 10,8m/s

γ. Από τη μέγιστη ταχύτητα βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$υ_{max}$ = ωA ή $A = \frac{\upsilon_{max}}{2\pi f} = \frac{10,8}{30\pi}\text{m}$ ή A=0,36/π m

δ. Τα σημεία Γ και Η έχουν μηδενική ταχύτητα. Τα σημεία Α και Ε έχουν μέγιστη ταχύτητα. Το σημείο Β έχει φορά κίνησης προς τα πάνω και τα Δ και Ζ έχουν φορά κίνησης προς τα κάτω.

ε. Η εξίσωση του κύματος που όταν συμβάλλει με το προηγούμενο, δημιουργεί στάσιμο κύμα είναι

$$y = \frac{0,36}{\pi}\eta\mu 2\pi\left(15t - \frac{x}{0,72}\right), \text{(S.I.)}$$

12.Γ.10

α. Από το μήκος της χορδής βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$L = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 0,2\,\text{m}$$

β. Η συχνότητα ταλάντωσης είναι

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} = 10\,\text{Hz}$$

Σε 5s γίνονται 50 πλήρεις ταλαντώσεις και 100 διελεύσεις από τη θέση ισορροπίας.

γ. Από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων βρίσκουμε το πλάτος των κοιλιών

4A=12mm ή $A_κ$=6mm

Επειδή την t=0s , y=+2A , υπάρχει αρχική φάση $φ_ο$=π/2rad. Η εξίσωση ταλάντωσης του Ο είναι

$$y_O = 6 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{(S.I.)}$$

Η πλησιέστερη προς το Ο κοιλία παρουσιάζει διαφορά φάσης π rad με αυτή, άρα θα έχουμε

$$y_{\Lambda} = 6 \cdot 10^{-3} \cdot ημ\left(20\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

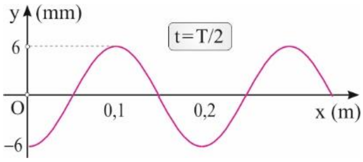
δ. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$y = 6 \cdot 10^{-3} \cdot συν10\pi x \cdot ημ\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Οπότε την t=T/2 η εξίσωση γίνεται

$$y = -6 \cdot 10^{-3} \cdot συν10\pi x$$

και η γραφική παράσταση του στιγμιότυπου θα είναι όπως στο σχήμα.



12.Γ.11

α. Από την εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$\upsilon = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8\text{cm}$$

Άρα η οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας κοιλίας και του γειτονικού της δεσμού είναι

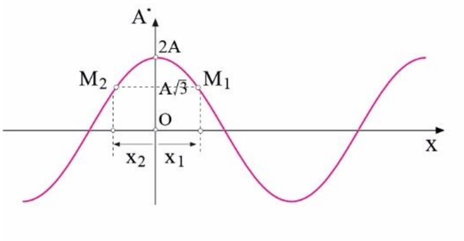
$$\Delta x = \lambda / 4 \ \Rightarrow \ \Delta x = 2\text{cm}$$

β. Η εξίσωση του πλάτους ταλάντωσης των σημείων είναι

$$|A'| = 2A \cdot \left|συν\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right|$$

Με αντικατάσταση και επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης προκύπτει

x_1=λ/12=2/3cm, x_2= -λ/12= -2/3 cm.

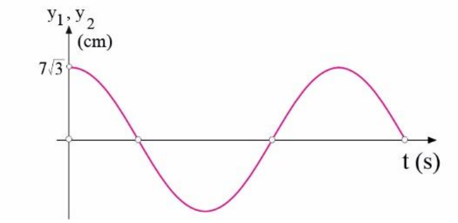


γ. Ο λόγος των μεγίστων ταχυτήτων ταλάντωσης της κοιλίας Ο και του σημείου M_1 είναι

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_{M_1 max}} = \frac{\omega \cdot 2A}{\omega \cdot A\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_{M_1 max}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

δ. Η κοιλία Ο έχει αρχική φάση π/2 rad. Την ίδια αρχική φάση έχουν και τα σημεία M_1, M_2 άρα οι εξισώσεις ταλάντωσης τους θα είναι:

$$y_1 = 7\sqrt{3}\cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)(cm)\ ,$$
$$y_2 = 7\sqrt{3}\cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)(cm)$$



Οπότε η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης τους με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

Τα δύο σημεία περιγράφονται από την ίδια συνάρτηση οπότε έχουν και την ίδια γραφική παράσταση.

12.Γ.12

α. Σε κάθε ταλάντωση το σημείο x=0m διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του, άρα εκτελεί 5 ταλαντώσεις το δευτερόλεπτο οπότε f=5Hz και T=0,2s.

β. Το μήκος κύματος είναι

$$\frac{\lambda}{4} = 0{,}1m \Rightarrow \lambda = 0{,}4m$$

Το μήκος της χορδής είναι

$$L = 4\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{9\lambda}{4} \Rightarrow L = 0{,}9m$$

γ. Από την απόσταση των ακραίων θέσεων βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης του τρέχοντος κύματος

$$2\cdot 2A = 0{,}1m \Rightarrow A = 0{,}025m$$

οπότε η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}t = 0{,}05\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{0{,}4}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{0{,}2}t \Rightarrow$$
$$y = 0{,}05\cdot\sigma\upsilon\nu 5\pi x\cdot\eta\mu 10\pi t\ \ (S.I.)$$

δ. Το σημείο με x=0m είναι κοιλία με Α΄=0,05m. Για την ταλάντωση του σημείου έχουμε από την Α.Δ.Ε.Τ.

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A'^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow |\upsilon| = \omega\sqrt{A'^2 - y^2}$$

αντικαθιστώντας y=0,03m έχουμε $|\upsilon| = 0,4\pi\,m/s$.

12.Γ.13

α. Η συχνότητα ταλάντωσης είναι η μισή της συχνότητας των περασμάτων του σημείου από τη θέση ισορροπίας του, άρα f=10Hz.

Επειδή η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο είναι ίση με 4/π της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Μ θα έχουμε

$$\upsilon = \frac{4}{\pi}\upsilon_{max} \Rightarrow \lambda f = \frac{4}{\pi}2\pi f \cdot |A'_M| \Rightarrow \lambda = 8 \cdot |A'_M| \Rightarrow |A'_M| = 0,25\,cm$$

β. Θα βρούμε το πλάτος Α των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα

$$|A'_M| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| \Rightarrow 0,25 = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi \cdot 6,75}{2}\right| \Rightarrow A = 0,125\sqrt{2}\,cm$$

Οπότε η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 0,25\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t$$ (x, y σε cm , t σε s)

γ. Η συνάρτηση συνπx για το Ο είναι θετική και για το Μ αρνητική. Άρα τα Ο και Μ έχουν διαφορά φάσης π rad.

δ. Η εξίσωση που μας δίνει τους δεσμούς είναι

$$x_\Delta = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} = (2\kappa + 1)\frac{2cm}{4} = (\kappa + 0,5)cm$$

Αντικαθιστώντας κ=0, 1, 2… βρίσκουμε 7 δεσμούς που ικανοποιούν το ζητούμενο ή λύνοντας την ανισότητα

$$0cm \le x_\Delta \le x_M \Rightarrow 0 \le \kappa + 0,5 \le 6,75 \Rightarrow -0,5 \le \kappa \le 6,25$$

12.Γ.14

α. Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος βρίσκουμε το πλάτος, το μήκος κύματος, την κυκλική συχνότητα, την περίοδο και την ταχύτητα των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο

$$A' = 6\,\text{cm} \Rightarrow A = 3\,\text{cm}\ ,\ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{10} \Rightarrow \lambda = 20\,\text{cm}$$

$$\omega = 10\pi\,\text{rad/s} \Rightarrow T = 0{,}2\,\text{s}\ ,\ \upsilon = \frac{\lambda}{T} = 1\,\text{m/s}$$

β. Οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων, τα οποία με τη συμβολή τους δημιούργησαν το στάσιμο κύμα είναι:

$$y_1 = 0{,}03\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0{,}2} - \frac{x}{0{,}2}\right)(\text{S.I.})\ ,\ y_2 = 0{,}03\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0{,}2} + \frac{x}{0{,}2}\right)(\text{S.I.})$$

γ. Το πλάτος ταλάντωσης δύο σημείων Α και Β του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται στις θέσεις x_1=-25cm και x_2=+25cm είναι:

$$x_1 = -25\text{cm},\ A'_A = 6\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(-25)}{10}\right| = 0\text{cm}\ ,$$

$$x_2 = 25\text{cm},\ A'_B = 6\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(25)}{10}\right| = 0\text{cm}$$

δ. Για κοιλίες ισχύει $x = N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = 10N\ \text{cm}$.

Επομένως, $x_1<x<x_2$ ή -25cm < 10N < 25cm ή -2,5 < N < 2,5

Άρα N=-2, -1, 0, 1, 2 και θα έχουμε συνολικά 5 κοιλίες.

ε. Η ταχύτητα του κύματος δεν αλλάζει γιατί έχουμε το ίδιο μέσο διάδοσης. Τώρα θα έχουμε

N-2=3 κοιλίες άρα

$$x = 3\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{1}{3}\text{m}$$

Η νέα περίοδος είναι $T' = \frac{\lambda'}{\upsilon} = \frac{1}{3}\text{s}$.

Η νέα εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι

$$y = 6\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{0{,}6\pi x}{10}\eta\mu 6\pi t$$ (y, x σε cm και t σε s)

12.Γ.15

α. Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος βρίσκουμε το πλάτος, την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των δύο τρεχόντων κυμάτων των οποίων η συμβολή δημιούργησε το στάσιμο κύμα:

$$y = 0,04\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{6}\eta\mu 10\pi t\ ,\ y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t$$

$$A' = 2A \Rightarrow A = 2\,cm\ ,\ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{6} \Rightarrow \lambda = 12\,cm$$

$$\omega = 10\pi\,rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2s$$

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{12}{0,2}cm/s \Rightarrow \upsilon = 60\,cm/s$$

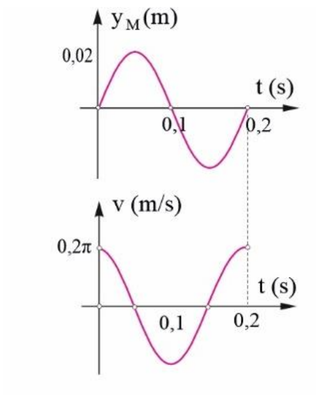
β. Οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων, τα οποία δημιούργησαν το στάσιμο κύμα είναι:

$$y_1 = 2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{12}\right)\ (y, x\ \sigma\varepsilon\ cm\ ,\ t\ \sigma\varepsilon\ s)$$

$$y_2 = 2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2} + \frac{x}{12}\right)\ (y, x\ \sigma\varepsilon\ cm,\ t\ \sigma\varepsilon\ s)$$

γ. i. Για το σημείο Μ έχουμε

$$A'_M = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda} = 4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\cdot 2}{12}cm \Rightarrow A'_M = 2cm$$



οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για το σημείο Μ είναι

y_M=0,02·ημ10πt (SI)

ii. Η εξίσωση ταχύτητας - χρόνου για το σημείο Μ είναι

$$\upsilon_M = \omega A'\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \upsilon_M = 0,2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu 10\pi t\ (S.I.)$$

δ. Η οριζόντια απόσταση των Μ και Ν είναι $x_N - x_M$=6cm.

Για το σημείο Ν έχουμε

$$A'_N = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_N}{\lambda} = 4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\cdot 6}{12}cm \Rightarrow A'_N = -4cm$$

Τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, οπότε στον άξονα της ταλάντωσης, στις μέγιστες απομακρύνσεις, τα δύο σημεία έχουν απόσταση Δy=2cm+4cm=6cm και η μέγιστη απόστασή τους είναι

$$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(4cm)^2+(6cm)^2}\Rightarrow d=2\sqrt{13}cm$$

12.Γ.16

α. Η περίοδος των κυμάτων είναι $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{10Hz}=0,1s.$

Το μήκος κύματος είναι $\lambda=\upsilon T=5m/s\cdot 0,1s=0,5m$

και η εξίσωση του στάσιμου

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}t\Rightarrow y=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu 4\pi x\cdot\eta\mu 20\pi t\quad (S.I.)\quad (1)$$

β. Το πλάτος του Μ δίνεται από τη σχέση

$$A'_M=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}=0,4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\frac{4}{3}}{0,5}m=0,4\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}m\Rightarrow A'_M=-0,2m\Rightarrow |A'_M|=0,2m$$

γ. Η απομάκρυνση του Μ προκύπτει από τη σχέση (1) και είναι

$$y=A'_M\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}t_1\Rightarrow y=-0,2\eta\mu 20\pi\frac{11}{120}=-0,2\eta\mu\pi\frac{11}{6}\Rightarrow y=0,1m$$

δ. Οι θέσεις των δεσμών είναι

$x_\Delta=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}$ κ=0, 1, 2,... και $0m\le x\le 0,875m$

$\kappa=0,\ x_0=\frac{\lambda}{4}=0,125m,\qquad \kappa=1,\ x_1=\frac{3\lambda}{4}=0,375m$

$\kappa=2,\ x_2=\frac{5\lambda}{4}=0,625m,\qquad \kappa=3,\ x_3=\frac{7\lambda}{4}=0,875m$

12.Γ.17

α. Το πλάτος των κυμάτων είναι A=d/2=0,05m,

η περίοδος των κυμάτων είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=0,4s,$

και το μήκος κύματος είναι $\lambda=\upsilon T=1m/s\cdot 0,4s=0,4m.$

Η εξίσωση του στάσιμου είναι

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow y = 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \eta\mu 5\pi t \quad (S.I.) \quad (1)$$

β. Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$\upsilon = 2A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow \upsilon = 0{,}5\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi t \quad (S.I.)$$

γ. Το πλάτος του Μ δίνεται από τη σχέση

$$|A'_M| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right| = 0{,}1\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi 0{,}2}{0{,}4}\right| m = 0{,}1|\sigma\upsilon\nu\pi| m \Rightarrow |A'_M| = 0{,}1m$$

και η μέγιστη επιτάχυνση του Μ είναι

$$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot |A'_M| = (5\pi)^2 \cdot 0{,}1 \Rightarrow \alpha_{max} = 25m/s^2$$

δ. Η 2η κοιλία έχει θέση x_{2K}=1λ/2=0,2m

ενώ ο 6ος δεσμός $x_{6\Delta}$=11λ/4=1,1m.

Η απόστασή τους είναι Δx=$x_{6\Delta}$ - x_{2K} =1,1 m-0,2m ή Δx= 0,9m.

ε. Η απόσταση των θέσεων ισορροπίας δύο διαδοχικών κοιλιών είναι Δx=λ/2=0,2m. Στον άξονα της ταλάντωσης, όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους, οι δύο κοιλίες έχουν απόσταση Δy=4A=0,2m. Άρα η απόστασή τους είναι

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0{,}2m)^2 + (0{,}2m)^2} \Rightarrow d = 2\sqrt{0{,}2}m$$

12.Γ.18

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι η περίοδος είναι

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4s$$

Το μήκος κύματος είναι $\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \Rightarrow \lambda = 1m$

και η ταχύτητας διάδοσης είναι

$$\lambda = \upsilon T \Rightarrow \upsilon = \frac{\lambda}{T} = 0,25 m/s$$

β. Το πλάτος του Μ δίνεται από τη σχέση

$$|A'_M| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right| = 0,1\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{7}{3}\right| m = 0,1\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\right| m = |-0,05| m \Rightarrow |A'_M| = 0,05m$$

και η μέγιστη δυναμική του ενέργεια είναι

$$U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2|A'_M|^2 \Rightarrow \quad U_{max} = \frac{25}{4}10^{-6} J$$

γ. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του Μ έχουμε

$$y = A'_M \eta\mu\frac{\pi t}{2} \Rightarrow \frac{2A}{4} = A'_M \eta\mu\frac{\pi t}{2} \Rightarrow \frac{0,1m}{4} = -0,05\eta\mu\frac{\pi t}{2} m \Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{\pi t}{2} = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi t}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} & (1) \\ \frac{\pi t}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} & (2) \end{array}\right\}$$

Η δεύτερη χρονικά λύση προκύπτει από την εξίσωση (1) για κ=1 και είναι

$$\frac{\pi t_2}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{11}{3}s$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dK}{dt} = F_{\varepsilon\pi} \cdot \upsilon = -m\omega^2 y \cdot \upsilon \quad (3)$$

Η ταχύτητα του Μ εκείνη τη στιγμή είναι

$$\upsilon = \omega A'_M \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}t_2 = \frac{\pi}{2}(-0,05)\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} \Rightarrow \upsilon = -\frac{\pi\sqrt{3}}{80} m/s$$

και η σχέση (3) δίνει

$$\frac{dK}{dt} = -m\omega^2 y \cdot \upsilon = \frac{\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-4}}{64} J/s$$

12.Γ.19

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου $y = 2A \cdot συν\dfrac{2\pi x}{\lambda} \cdot ημ\dfrac{2\pi}{T}t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

2A=0,5m ή A=0,25m,

η περίοδος είναι $\dfrac{2\pi}{T} = 4\pi \Rightarrow T = 0,5s$

και το μήκος κύματος είναι $\dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = 4m$.

Η ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων είναι

$\lambda = \upsilon T \Rightarrow \upsilon = \dfrac{\lambda}{T} = 8m/s$

β. Οι θέσεις των κοιλιών είναι

$x_K = \kappa\dfrac{\lambda}{2}$ κ=0, 1, 2,… και $0m \le x \le 5m$

$\kappa = 0,\ x_0 = 0m,\qquad \kappa = 1,\ x_1 = \dfrac{\lambda}{2} = 2m,\qquad \kappa = 2,\ x_2 = \dfrac{2\lambda}{2} = 4m$

Οι θέσεις των δεσμών είναι

$x_\Delta = (2\kappa + 1)\dfrac{\lambda}{4}$ κ=0, 1, 2,… και $0m \le x \le 5m$

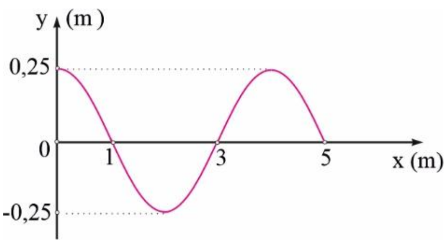
$\kappa = 0,\ x_0 = \dfrac{\lambda}{4} = 1m,\qquad \kappa = 1,\ x_1 = \dfrac{3\lambda}{4} = 3m\qquad \kappa = 2,\ x_2 = \dfrac{5\lambda}{4} = 5m$

γ. Η απομάκρυνση των σημείων του μέσου σε συνάρτηση με τη θέση τους, τη χρονική στιγμή t_1=17/24 s είναι

$$y = 0,5 \cdot συν\frac{\pi x}{2} \cdot ημ4\pi t = 0,5 \cdot συν\frac{\pi x}{2} \cdot ημ4\pi\frac{17}{24} \Rightarrow$$

$$y = 0,5 \cdot συν\frac{\pi x}{2} \cdot ημ\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = 0,25 \cdot συν\frac{\pi x}{2} \quad \text{(S.I.)}$$

και το στιγμιότυπο δίνεται στο σχήμα.



δ. Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$\upsilon = 2A\omega \cdot συν\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot συν\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow \upsilon = 0,5 \cdot 4\pi \cdot συν\frac{\pi x}{2} \cdot συν4\pi t$$

και με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει

$$\upsilon = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi 2}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 4\pi\frac{17}{24} = 2\pi \cdot (-1) \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \upsilon = \pi\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$$

12.Γ.20

α. Ανάμεσα στους 5 δεσμούς δημιουργούνται 4 άτρακτοι μισού μήκους κύματος και από την πρώτη κοιλία στον πρώτο δεσμό υπάρχει απόσταση λ/4, άρα το μήκος της χορδής ισούται με

$$d = 4\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{9\lambda}{4} = 2{,}25\mathrm{m}$$

β. Οι θέσεις των κοιλιών δίνονται από τη σχέση $x_K = \kappa\frac{\lambda}{2}$.

Για τις κοιλίες ανάμεσα στα σημεία Μ και Λ ισχύει

$$x_M < x_K < x_\Lambda \Rightarrow 0{,}5\mathrm{m} < \kappa\frac{\lambda}{2} < 1{,}75\mathrm{m} \Rightarrow 1 < \kappa < 3{,}5$$

Άρα, υπάρχουν 2 κοιλίες που αντιστοιχούν στις τιμές του κ= 2 και κ=3.

γ. Από τη σχέση του πλάτους έχουμε

$$|A'| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| \Rightarrow 0{,}2\sqrt{3} = \pm 0{,}4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma\upsilon\nu 2\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi x = \sigma\upsilon\nu\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\pi x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1,2) \\ &\sigma\upsilon\nu 2\pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi x = \sigma\upsilon\nu\left(\pm\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\pi x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (3,4) \end{aligned}\right\}$$

Από τις τέσσερις εξισώσεις, αυτή που δίνει τη ζητούμενη λύση είναι η (1) για κ=2

$$2\pi x = 4\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{25}{12}\mathrm{m}$$

δ. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, προκύπτει για το νέο μήκος κύματος λ_2

$$\upsilon = \lambda_2 f_2 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow \lambda_2 5 f_1 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda}{5} = 0{,}2\mathrm{m}$$

Αν δημιουργηθούν Ν δεσμοί θα υπάρχουν στη χορδή Ν-1 ολόκληρες άτρακτοι μισού μήκους κύματος και ακόμα μισή, οπότε το μήκος της χορδής θα ισούται με

$$d = (N-1)\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow 2{,}25\mathrm{m} = \frac{(2N-1)0{,}2\mathrm{m}}{4} \Rightarrow N = 23$$

12.Γ.21

α. Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

2A=0,06m ή A=0,03m,

η περίοδος είναι $\frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 2s$

και το μήκος κύματος είναι $\frac{2\pi}{\lambda} = 10\pi \Rightarrow \lambda = 0,2m$.

Η θέση της 2ης κοιλίας μετά την κοιλία της θέσης x=0m είναι $x_{K2} = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda = 0,2m$

και η θέση του 6ου δεσμού είναι

$$x_{\Delta 6} = (2 \cdot 5 + 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{11\lambda}{4} = 0,55m$$

Άρα η μεταξύ τους απόσταση είναι $\Delta x = x_{\Delta 6} - x_{K2} = 0,35m$.

β. Από τη σχέση των ενεργειών προκύπτει για το σημείο Λ

$$E_\Lambda = \frac{E_K}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}D|A'_\Lambda|^2 = \frac{\frac{1}{2}D|2A|^2}{4} \Rightarrow |A'_\Lambda|^2 = \frac{|2A|^2}{4} \Rightarrow |A'_\Lambda| = A = 0,03m$$

γ. Μια κοιλία για να διανύσει μήκος διαδρομής 6m πρέπει να κάνει $N = 6m/4 \cdot 2A = 25$ πλήρεις ταλαντώσεις. Το σημείο Λ όταν εκτελέσει 25 ταλαντώσεις θα έχει διανύσει μήκος διαδρομής ίσο με $s_\Lambda = 25 \cdot 4 \cdot A = 3m$.

δ. Από τη σχέση του πλάτους έχουμε

$$|A'| = 0,06 \cdot |\sigma\upsilon\nu 10\pi x| \Rightarrow 0,03 = \pm 0,06 \cdot \sigma\upsilon\nu 10\pi x \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 10\pi x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \sigma\upsilon\nu 10\pi x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} & (1) \\ \sigma\upsilon\nu 10\pi x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} & (2) \end{array} \right\}$$

Η 1η εξίσωση δίνει δύο σειρές λύσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10\pi x_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = 0,2\kappa + \frac{1}{30} & (3) \\ 10\pi x_2 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_2 = 0,2\kappa - \frac{1}{30} & (4) \end{array} \right\}$$

Η 2η εξίσωση δίνει επίσης δύο σειρές λύσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10\pi x_3 = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x_3 = 0,2\kappa + \frac{1}{15} & (5) \\ 10\pi x_4 = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x_4 = 0,2\kappa - \frac{1}{15} & (6) \end{array} \right\}$$

Η μικρότερη απόσταση είναι $\Delta x = x_3 - x_1 = x_2 - x_4 = 1/30$ m.

12.Γ.22

α. Είναι 2A=d ή A=0,2m και ο χρόνος για τη μετάβαση από τη μία στην άλλη ακραία θέση είναι T/2=1s, δηλαδή η περίοδος είναι T=2s. Η γωνιακή συχνότητα είναι ω=2π/T=πrad/s.

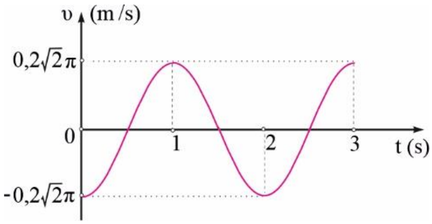
Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \upsilon T = 2m/s \cdot 2s = 4m.$

β. Η μέγιστη ταχύτητα μιας κοιλίας είναι

$$\upsilon_{max} = \omega \cdot |A'| = \frac{2\pi}{T} \cdot 2A \Rightarrow \upsilon_{max} = 0,4\pi \, m/s$$

γ. Από τη γενική εξίσωση της ταχύτητας για το σημείο Λ με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε

$$\upsilon = 2A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow$$
$$\upsilon = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_\Lambda}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{2}t \Rightarrow$$
$$\upsilon = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t \Rightarrow$$
$$\upsilon = -0,2\sqrt{2}\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t \ \ (S.I.)$$



Το αντίστοιχο διάγραμμα δίνεται στο σχήμα.

δ. Τη χρονική στιγμή t_1=4/3 s το σημείο Λ έχει ταχύτητα

$$\upsilon = -\upsilon_{max,\Lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t_1 = -\upsilon_{max,\Lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi\frac{4}{3} \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_{max,\Lambda}}{2}$$

Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου Λ είναι

$$\frac{K}{U} = \frac{K}{E-K} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_{max,\Lambda}^{\ \ 2} - \frac{1}{2}m\upsilon^2} = \frac{\left(\frac{\upsilon_{max,\Lambda}}{2}\right)^2}{\upsilon_{max,\Lambda}^{\ \ 2} - \left(\frac{\upsilon_{max,\Lambda}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = \frac{1}{3}$$

12.Γ.23

α. Από τη γενική εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = \omega 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t$

και με σύγκριση με τη δοθείσα προκύπτει ότι:

$$\omega = \frac{\pi}{8} rad/s = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 16s$$

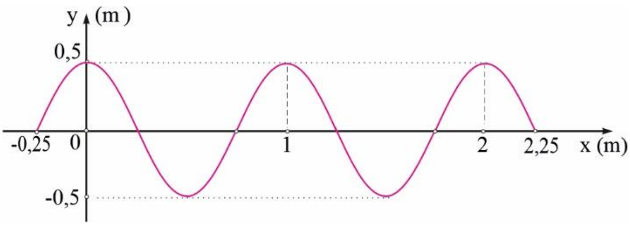
$$\upsilon_{max} = 2\omega A \Rightarrow \frac{\pi}{16} m/s = 2\frac{\pi}{8} rad/s \cdot A \Rightarrow A = 0,25m$$

β. Το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων είναι

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \Rightarrow \lambda = 1m$$

Από τη γενική εξίσωση του στάσιμου για τη χρονική στιγμή t_1=4s έχουμε

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}t =$$
$$0,5\sigma\upsilon\nu 2\pi x \eta\mu\frac{\pi t_1}{8} \Rightarrow$$
$$y = 0,5\sigma\upsilon\nu 2\pi x \quad (S.I.)$$



Το αντίστοιχο στιγμιότυπο δίνεται στο σχήμα.

Η 1η κοιλία είναι στη θέση x=0m και ο 1ος δεσμός στη θέση

x=-0,25m.

γ. Όπως βλέπουμε από το παραπάνω στιγμιότυπο η απομάκρυνση του σημείου Λ τη στιγμή t_1=4s είναι θετική, άρα οι κοιλίες που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης με το σημείο Λ είναι αυτές που έχουν αρνητική απομάκρυνση και βρίσκονται στις θέσεις x_1=λ/2=0,5m και x_2=3λ/2=1,5m.

δ. Το πλάτος του Λ είναι

$$|A'_\Lambda| = 2A \cdot |\sigma\upsilon\nu 2\pi x_\Lambda| = 0,5\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{7}{8}\right| \Rightarrow |A'_\Lambda| = \frac{\sqrt{2}}{4}m$$

και η μέγιστη κινητική του ενέργεια είναι

$$K_{max,\Lambda} = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_{max,\Lambda}^2 = \frac{1}{2}\Delta m\left(\omega|A'_\Lambda|\right)^2 = \frac{1}{2}1,6\cdot 10^{-3}\left(\frac{\pi}{8}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow \ K_{max,\Lambda} = \frac{10^{-3}}{64}J$$

12.Γ.24

α. Από την εξίσωση του τρέχοντος κύματος βρίσκουμε το πλάτος και το μήκος κύματος:

$$A = 0,2m, \ \lambda = 2m$$

Από την ταχύτητα του κύματος βρίσκουμε τη συχνότητα

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{0,5}{2}Hz=0,25Hz$$

Άρα η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι

$$y=2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t\Rightarrow y=2\cdot 0,2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{2}\eta\mu 2\pi\cdot 0,25t\Rightarrow y=0,4\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot\eta\mu 0,5\pi t\quad (S.I.)$$

β. Το πλάτος του σημείου Λ που βρίσκεται στη θέση $x_Λ$=8/3 m είναι

$$A'_{\Lambda}=0,4\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{3}m=0,4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}m=-0,2m\Rightarrow\left|A'_{\Lambda}\right|=0,2m$$

γ. Η κοιλία Ο βρίσκεται για πρώτη φορά στην ακραία αρνητική απομάκρυνσή της τη χρονική στιγμή t_1=3T/4=3s, οπότε το σημείο Λ έχει απομάκρυνση

$$y_{\Lambda}=0,4\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{3}\cdot\eta\mu\left(0,5\pi\cdot 3\right)(m)\Rightarrow y_{\Lambda}=-0,2\eta\mu 1,5\pi(m)=0,2m$$

δ. Η ταχύτητα όλων των σημείων του μέσου την t_1 είναι

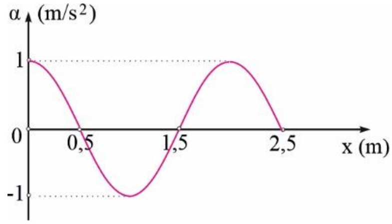
$$\upsilon=2\omega A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t\Rightarrow\upsilon=2\cdot 0,5\pi\cdot 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot 0,25\cdot 3\right)\Rightarrow$$
$$\upsilon=0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi x\right)\sigma\upsilon\nu\left(1,5\pi\right)\Rightarrow\upsilon=0m/s$$

Άρα το υλικά σημεία της χορδής βρίσκονται στις ακραίες τους απομακρύνσεις.

ε. Η εξίσωση της επιτάχυνσης των σημείων σε συνάρτηση με τη θέση τους τη στιγμή t_1 είναι

$$\alpha=-\omega^2 y=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 0,4\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot\eta\mu\left(0,5\pi\cdot 3\right)\Rightarrow$$
$$\alpha=1\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\ \ (S.I.)$$

και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



12.Γ.25

α. Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega=2\pi f=2\pi\cdot 0,5rad/s\Rightarrow\omega=\pi rad/s$$

Το μήκος κύματος είναι

$$\lambda=\frac{\upsilon}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{2}{0,5}m=4m$$

Άρα η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t \Rightarrow y = 2\cdot 0{,}1\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{4}\eta\mu\pi t \Rightarrow y = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\cdot\eta\mu\pi t \quad (\text{S.I.})$$

β. Η μέγιστη επιτάχυνση του σημείου Μ που βρίσκεται στη θέση x_M=2m είναι

$$|\alpha_{max}| = \omega^2|A'| \Rightarrow |\alpha_{max}| = 2\omega^2 A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right| = 2\pi^2\cdot 0{,}1\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\cdot 2}{4}\right| m/s^2 \Rightarrow |\alpha_{max}| = 2m/s^2$$

γ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του Ο με τον χρόνο είναι

$$y_O = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu 0\cdot\eta\mu\pi t \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow y_O = 0{,}2\eta\mu\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Σε χρονικό διάστημα 4,5s το σημείο Ο έχει εκτελέσει

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{4{,}5s}{\frac{2\pi}{\pi}s} = 2 + 1/4 \text{ αριθμό ταλαντώσεων}$$

Άρα η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με τον χρόνο του Ο είναι όπως στο σχήμα.

δ. Τη στιγμή t_1=4,5s η απομάκρυνση του Ο είναι

$$y_O = 0{,}2\eta\mu 4{,}5\pi(m) = 0{,}2m$$

Τη στιγμή t_1=4,5s η απομάκρυνση του Μ είναι

$$y_M = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\cdot 2}{2}\cdot\eta\mu 4{,}5\pi \Rightarrow y_M = -0{,}2m$$

Το σημείο Μ είναι η πρώτη αντιφασική κοιλία του Ο, επομένως η απόσταση ανάμεσα στα δύο σημεία από το πυθαγόρειο θεώρημα τη στιγμή αυτή είναι

$$d = \sqrt{\left(y_O + |y_M|\right)^2 + x_M^2} \Rightarrow d = \sqrt{(0{,}4m)^2 + (2m)^2} = \sqrt{4{,}16}m$$