Θέματα Δ

11.Δ.1

α. Από την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ βρίσκουμε ότι τα δύο κύματα φθάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Μ τη χρονική στιγμή 2s άρα η απόσταση $ΜΠ_1$ είναι ίση με

$$(ΜΠ_1) = υt = 2m/s \cdot 2s \Rightarrow (ΜΠ_1) = 4m$$

β. Από την εξίσωση ταλάντωσης του Μ προκύπτει ότι ω=10π rad/s.

Η φάση ταλάντωσης του σημείου Μ είναι

$$φ_Μ = 10π(t-2)(S.I.)$$

Αν t_0 είναι ο χρόνος που χρειάζονται τα κύματα να φτάσουν στο Ο, τότε η φάση ταλάντωσης του σημείου Ο είναι

$$φ_O = ω(t-t_O) = 10π(t-t_O) = 10π(t-\frac{d/2}{υ}) \Rightarrow φ_O = 10π(t-0,25) \quad (S.I.)$$

Άρα η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Ο και Μ είναι

$$φ_O - φ_M = 10π(t-0,25) - 10π(t-2) \Rightarrow φ_O - φ_M = 20π - 2,5π(rad) = 17,5π\,rad$$

γ. Το μήκος κύματος είναι

$$λ = \frac{υ}{f} = \frac{υ}{ω}2π \Rightarrow λ = \frac{2}{10π}2π\,m \Rightarrow λ = 0,4m$$

Για τα σημεία στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα από τις δύο πηγές ισχύει ότι

$$\left.\begin{aligned} r_1 - r_2 = Nλ \\ r_1 + r_2 = d \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2r_1 = Nλ + d \Rightarrow r_1 = \frac{Nλ + d}{2} \Rightarrow r_1 = (0,2N + 0,5)\ m$$
$$0m < r_1 < 1m \Rightarrow 0m < (0,2N + 0,5)m < 1m \Rightarrow -0,5 < 0,2N < 0,5 \Rightarrow -2,5 < N < 2,5$$
$$N = -2, -1, 0, 1, 2$$

Άρα έχουμε 5 σημεία ενισχυτικής συμβολής.

δ. Από 0s έως 2s κανένα κύμα δεν έχει φθάσει στο σημείο Μ, επομένως η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι μηδενική. Στο χρονικό διάστημα από 2s έως 2,5s το υλικό σημείο έχει εκτελέσει

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2,5s - 2s}{0,2s} = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}$$

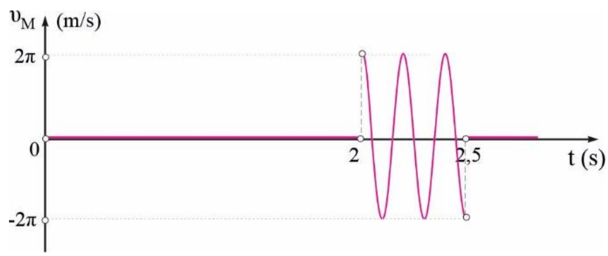
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ είναι

$$\upsilon_{max} = \omega A'_M \Rightarrow \upsilon_{max} = 10\pi \cdot 0,2(m/s) \Rightarrow \upsilon_{max} = 2\pi m/s$$

Η ταχύτητα του σημείου Μ περιγράφεται από τη σχέση

$$\upsilon = 2\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi(t-2) \text{ (S.I.)}, \ 2s \le t \le 2,5s$$

και η γραφική της παράσταση δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



11.Δ.2

α. Από τις εξισώσεις ταλάντωσης παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

$$A = 0,02m$$
$$\omega = 20\pi \, rad/s$$
$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{\upsilon}{\omega}2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{0,2}{20\pi}2\pi(SI) \Rightarrow \lambda = 0,02m$$
$$2\pi\frac{r_1}{\lambda} = 14,5\pi \Rightarrow r_1 = \frac{14,5\pi \cdot 0,02}{2\pi}(SI) \Rightarrow r_1 = 0,145m$$
$$2\pi\frac{r_2}{\lambda} = 10,5\pi \Rightarrow r_2 = \frac{10,5\pi \cdot 0,02}{2\pi}(SI) \Rightarrow r_2 = 0,105m$$

β. Το κύμα φθάνει από την Π_1 στο Μ τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{0,145m}{0,2m/s} = 0,725s$$

Την ίδια στιγμή η απομάκρυνση της πηγής Π_1 θα είναι

$$y_1 = A\eta\mu\omega t_1 = 0,02\eta\mu(20\pi \cdot 0,725)(SI) = 0,02\eta\mu 14,5\pi(m) \Rightarrow y_1 = 0,02m$$

γ. Βρίσκουμε τη στιγμή που φθάνει το κύμα στο σημείο Μ από την πηγή Π_2

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{0,105m}{0,2m/s} = 0,525s$$

Βρίσκουμε το είδος της συμβολής που συμβαίνει στο σημείο Μ

$$r_1 - r_2 = 0,145m - 0,105m = 0,04m = 2\lambda = N\lambda$$

Άρα έχουμε ενισχυτική συμβολή για N=2, επομένως το πλάτος ταλάντωσης μετά τη συμβολή θα είναι 0,04m.

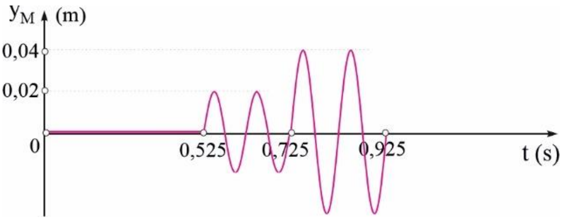
Ο αριθμός των ταλαντώσεων στο διάστημα $0,525s \le t \le 0,725s$ είναι

$$N_1 = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N_1 = \frac{0,725s - 0,525s}{0,1s} = 2$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων στο διάστημα $0,725s < t \le 0,925s$ είναι

$$N_2 = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N_2 = \frac{0,925s - 0,725s}{0,1s} = 2$$

Η γραφική παράσταση απομάκρυνσης - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι οι εξισώσεις ταλάντωσης σε κάθε ένα χρονικό διάστημα είναι

$$y = \begin{cases} 0m & \text{για} \quad 0s \le t < 0,525s \\ 0,02\eta\mu 2\pi\left(10t - \frac{10,5}{2}\right) \ (S.I.) & \text{για} \quad 0,525s \le t \le 0,725s \\ 0,04\eta\mu 20\pi\left(t - 0,725\right) \ (S.I.) & \text{για} \quad 0,725s < t \le 0,925s \end{cases}$$

δ. Εάν το σημείο Μ είναι συνευθειακό με τις πηγές Π_1 και Π_2, τότε η απόσταση μεταξύ των πηγών θα είναι η μέγιστη δυνατή, άρα θα έχουμε τον μέγιστο αριθμό ενισχυτικών υπερβολών ανάμεσα από τις δύο πηγές. Στην περίπτωση αυτή η απόσταση ανάμεσα στις δύο πηγές θα είναι

$$d = r_1 + r_2 = 0,25m$$

Για τα σημεία στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα από τις δύο πηγές ισχύει ότι

$$\left.\begin{aligned} r_1 - r_2 &= N\lambda \\ r_1 + r_2 &= d \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2r_1 = N\lambda + d \Rightarrow r_1 = \frac{N\lambda + d}{2} \Rightarrow r_1 = (0,01N + 0,125)m$$

$$0m < r_1 < 0,25m \Rightarrow 0m < (0,01N + 0,125)m < 0,25m \Rightarrow -0,125 < 0,01N < 0,125 \Rightarrow -12,5 < N < 12,5$$

Άρα έχουμε 25 σημεία ενισχυτικής συμβολής για N=-12 έως N=12.

11.Δ.3

α. Από την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Κ βρίσκουμε:

$$2A = 0,2m \Rightarrow A = 0,1m$$
$$\omega = \frac{5\pi}{3} rad/s$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} s \Rightarrow T = 1,2s$$
$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{\upsilon}{\omega}2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{0,5}{\frac{5\pi}{3}}2\pi\, m \Rightarrow \lambda = 0,6m$$

β. Από την εξίσωση βλέπουμε ότι η συμβολή ξεκινάει τη στιγμή 2s, άρα η απόσταση της πιο απομακρυσμένης πηγής από το σημείο θα είναι

$$r_1 = \upsilon t_1 = 0,5 \cdot 2m = 1m$$

Το σημείο Κ είναι το πλησιέστερο προς το μέσο Μ του ΑΒ που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος επομένως στο σημείο αυτό θα έχουμε ενισχυτική συμβολή για Ν=1 άρα

$$r_1 - r_2 = \lambda \Rightarrow r_2 = r_1 - \lambda \Rightarrow r_2 = 1m - 0,6m = 0,4m$$

γ. Το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που λόγω της συμβολής έχουν πλάτος ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ είναι ίσο με το πλήθος των σημείων στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή.

Η απόσταση ανάμεσα στις δύο πηγές είναι

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow d = 1,4m$$

Για τα σημεία στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα από τις δύο πηγές ισχύει ότι

$$\left.\begin{aligned} r_1 - r_2 = N\lambda \\ r_1 + r_2 = d \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2r_1 = N\lambda + d \Rightarrow r_1 = \frac{N\lambda + d}{2} \Rightarrow r_1 = (0,3N + 0,7)m$$
$$0m < r_1 < 1,4m \Rightarrow 0m < (0,3N + 0,7)m < 1,4m \Rightarrow -0,7 < 0,3N < 0,7 \Rightarrow -7/3 < N < 7/3$$
$$N = -2, -1, 0, 1, 2$$

Άρα έχουμε συνολικά 5 σημεία ενισχυτικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

δ. Το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΚΒ στα οποία συμβαίνει αναιρετική συμβολή είναι

$$\left.\begin{array}{l} r_1 - r_2 = (2N+1)\dfrac{\lambda}{2} \\ r_1 + r_2 = d \Rightarrow r_2 = d - r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 - (d - r_1) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d \Rightarrow$$

$$r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow r_1 = (2N+1)\cdot 0{,}15 + 0{,}7 (S.I.)$$

$$1m \le r_1 < 1{,}4m \Rightarrow 1 \le (2N+1)\cdot 0{,}15 + 0{,}7 < 1{,}4 \Rightarrow 0{,}3 \le (2N+1)\cdot 0{,}15 < 0{,}7 \Rightarrow 0{,}5 \le N < 11/6$$

$$N = 1$$

Άρα έχουμε 1 σημείο αναιρετικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ.

11.Δ.4

α. Για το σημείο Β ισχύει ότι

$$t_2 - t_1 = \frac{r_2}{\upsilon} - \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t = \frac{r_2 - r_1}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = \frac{0{,}3m}{0{,}6s} = 0{,}5m/s$$

β. Αφού το σημείο Β βρίσκεται στη δεύτερη μετά τη μεσοκάθετο υπερβολή απόσβεσης θα έχουμε N=-2 άρα

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = (-4+1)\frac{\lambda}{2} = -3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{-0{,}6}{-3}m = 0{,}2m$$

Η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{0{,}5m/s}{0{,}2m} = 2{,}5Hz$$

Από τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης των πηγών

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2\pi\cdot 2{,}5}(SI) \Rightarrow A = 0{,}2m$$

Άρα η εξίσωση ταλάντωσης κάθε πηγής είναι

$$y = A\eta\mu\omega t \Rightarrow y = 0{,}2\eta\mu 5\pi t\,(S.I.)$$

γ. Για το σημείο Α ισχύει ότι

$$r_1 = \upsilon t_A \Rightarrow r_1 = 0{,}5\frac{m}{s}\cdot 0{,}8s \Rightarrow r_1 = 0{,}4m$$

Αφού το σημείο Α βρίσκεται στην πρώτη ενισχυτική υπερβολή αριστερά από τη μεσοκάθετο θα έχουμε N=-1 άρα

$$r_1 - r_2 = N\lambda = -\lambda \Rightarrow r_2 = r_1 + \lambda \Rightarrow r_2 = 0,4m + 0,2m = 0,6m$$

δ. Η χρονική στιγμή στην οποία το κύμα από την $Π_2$ φθάνει στο σημείο Α είναι

$$t'_A = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t'_A = \frac{0,6}{0,5}s \Rightarrow t'_A = 1,2s$$

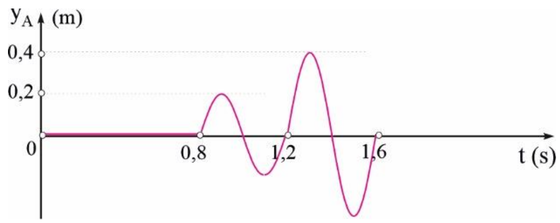
Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα της απομάκρυνσης του σημείου Α σε σχέση με τον χρόνο για το χρονικό διάστημα $0s \le t \le 1,6s$ βρίσκουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων με πλάτος ίσο με Α που κάνει στο διάστημα από 0,8s, που ξεκινάει να ταλαντώνεται, έως 1,2s

$$N_1 = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1,2s - 0,8s}{0,4s} = 1$$

και τον αριθμό των ταλαντώσεων λόγω συμβολής των δύο κυμάτων με πλάτος ίσο με 2 Α στο διάστημα από 1,2s έως 1,6s

$$N_2 = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1,6s - 1,2s}{0,4s} = 1$$

Η γραφική παράσταση απομάκρυνσης - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Οι εξισώσεις απομάκρυνσης - χρόνου με βάση το παραπάνω διάγραμμα είναι

$$\begin{cases} y = 0m, & 0s \le t < 0,8s \\ y = 0,2\eta\mu 5\pi(t - 0,8)(S.I.), & 0,8s \le t < 1,2s \\ y = 0,4\eta\mu 5\pi(t - 1,2)(S.I.), & 1,2s \le t < 1,6s \end{cases}$$

11.Δ.5

α. Για τα σημεία που βρίσκονται στη μεσοκάθετο ισχύει ότι

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow 0 = N\lambda \Rightarrow N = 0$$

Άρα, αφού επαληθεύεται η συνθήκη ενίσχυσης θα έχουν πλάτος ταλάντωσης ίσο με 4mm.

β. Η υπερβολή (α) είναι η $2^η$ υπερβολή αριστερά της μεσοκαθέτου, για την οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή, άρα θα έχουμε Ν=-2. Επομένως από τις αποστάσεις του σημείου Μ από τις πηγές θα έχουμε

$$r_1 - r_2 = -2\lambda \Rightarrow 36cm - 48cm = -2\lambda \Rightarrow \lambda = 6cm = 0,06m$$

Άρα η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{0,48m/s}{0,06m} \Rightarrow f = 8Hz$$

γ. Η χρονική στιγμή που το κύμα φθάνει από την πηγή O_1 στο σημείο συμβολής Μ είναι

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{0,36m}{0,48m/s} = 0,75s$$

Η χρονική στιγμή που το κύμα φθάνει από την O_2 στο σημείο συμβολής Μ είναι

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{0,48m}{0,48m/s} = 1s$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων στο παραπάνω διάστημα είναι

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1s - 0,75s}{\frac{1}{8}s} = 2$$

Μετά την ενισχυτική συμβολή ο αριθμός των ταλαντώσεων στο χρονικό διάστημα από 1s έως 1,125s θα είναι

$$N' = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1,125s - 1s}{\frac{1}{8}s} = 1$$

Η απομάκρυνση του σημείου Μ περιγράφεται από τη σχέση

$$y = \begin{cases} 0m & , \quad 0s \le t < 0,75s \\ 0,002\eta\mu 16\pi(t - 0,75) \ (S.I.) & , \quad 0,75s \le t \le 1s \\ 0,004\eta\mu 16\pi(t - 1) \ (S.I.) & , \quad 1s < t \le 1,125s \end{cases}$$

και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

δ. Βρίσκουμε τις αποστάσεις του σημείου Γ, για το οποίο έχουμε ενισχυτική συμβολή, από τις δύο πηγές

$$\left.\begin{cases} r_1' - r_2' = -2\cdot 0{,}06\text{m} \Rightarrow r_1' - r_2' = -0{,}12\text{m} \\ r_1' + r_2' = 0{,}24\text{m} \end{cases}\right\} \Rightarrow 2r_1' = 0{,}12\text{m} \Rightarrow r_1' = 0{,}06\text{m},\ r_2' = 0{,}18\text{m}$$

Οι χρονικές στιγμές στις οποίες τα δύο κύματα φθάνουν στο σημείο Γ είναι

$$t_1' = \frac{r_1'}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{0{,}06\text{m}}{0{,}48\text{m/s}} = 0{,}125\text{s}$$
$$t_2' = \frac{r_2'}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{0{,}18\text{m}}{0{,}48\text{m/s}} = 0{,}375\text{s}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων στο διάστημα από 0,125s έως 0,375s είναι

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{0{,}375\text{s} - 0{,}125\text{s}}{\frac{1}{8}\text{s}} = 2$$

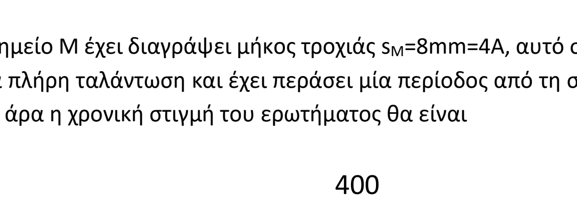
Ο αριθμός των ταλαντώσεων στο διάστημα από 0,375s έως 1,125s είναι

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1{,}125\text{s} - 0{,}375\text{s}}{\frac{1}{8}\text{s}} = 6$$

Η απομάκρυνση του σημείου Γ περιγράφεται από τη σχέση

$$y_\Gamma = \left\{\begin{array}{ll} 0\text{m} & ,\ 0\text{s} \le t < 0{,}125\text{s} \\ 0{,}002\eta\mu 16\pi(t - 0{,}125)\ \text{(S.I.)} & ,\ 0{,}125\text{s} \le t \le 0{,}375\text{s} \\ 0{,}004\eta\mu 16\pi(t - 0{,}375)\ \text{(S.I.)} & ,\ 0{,}375\text{s} < t \le 1{,}125\text{s} \end{array}\right\}$$

και η γραφική παράσταση δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



ε. Όταν το σημείο Μ έχει διαγράψει μήκος τροχιάς s_M=8mm=4A, αυτό σημαίνει ότι έχει εκτελέσει ακριβώς μία πλήρη ταλάντωση και έχει περάσει μία περίοδος από τη στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται, άρα η χρονική στιγμή του ερωτήματος θα είναι

$$t = 0,75s + 0,125s = 0,875s$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το σημείο Γ θα έχει εκτελέσει αριθμό ταλαντώσεων

$$N = \frac{0,875 - 0,125s}{0,125s} = 6$$

Στις δύο πρώτες από αυτές τις ταλαντώσεις το μήκος διαδρομής είναι $8A\left(2\cdot 4A\right)$ και στις υπόλοιπες τέσσερεις ταλαντώσεις το μήκος διαδρομής είναι $32A\left(4\cdot 8A\right)$, άρα το συνολικό μήκος διαδρομής είναι

$$s = 40A = 40\cdot 2mm = 80mm$$

11.Δ.6

α. Η υπερβολή απόσβεσης που διέρχεται από το M_2 είναι πλησιέστερη στη μεσοκάθετο από ότι η υπερβολή που διέρχεται από το M_1, άρα εάν στην πρώτη αποδώσουμε την τιμή Ν στη δεύτερη θα αποδώσουμε την τιμή Ν+1. Οι σχέσεις που ισχύουν για τις διαφορές των αποστάσεων των σημείων M_1 και M_2 από τις δύο πηγές σε συνάρτηση με το μήκος κύματος είναι:

$$M_2 : \left(O_1M_2\right) - \left(O_2M_2\right) = \left(2N+1\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

$$M_1 : \left(O_1M_1\right) - \left(O_2M_1\right) = \left[2\left(N+1\right)+1\right]\frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

β. Για τις αποστάσεις ισχύει ότι

$$\left(O_1M_1\right) = \sqrt{\left(O_1O_2\right)^2 + \left(O_2M_1\right)^2} = 10cm$$
$$\left(O_1M_2\right) = \sqrt{\left(O_1O_2\right)^2 + \left(O_2M_2\right)^2} = 10,53cm$$

Με αντικατάσταση στις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$3,68cm = \left(2N+1\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$
$$4cm = \left(2N+3\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (4)$$

Αφαιρώντας τις (2) και (1) κατά μέλη έχουμε

$$\lambda = 0,32cm$$

γ. Η συχνότητα του διαπασών είναι

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}=\frac{64cm/s}{0,32cm}=200Hz$$

δ. Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε ότι

$$3,68cm=(2N+1)\frac{0,32cm}{2}\Rightarrow 23=2N+1\Rightarrow N=11,\quad N+1=12$$

ε. Καθώς κινούμαστε από το M_2 στο M_1 η διαφορά των αποστάσεων αυξάνεται. Για το σημείο M_2 ισχύει ότι

$$O_1M_2-O_2M_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

Άρα για το σημείο Λ η διαφορά θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη της ποσότητας $(2N+1)\frac{\lambda}{2}$ και επιπλέον επειδή το σημείο Λ είναι ενισχυτικό θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του λ άρα θα έχουμε

$$r_1-r_2=(2N+2)\frac{\lambda}{2}=(N+1)\lambda\Rightarrow r_1-r_2=12\cdot 0,32cm=3,84cm$$

11.Δ.7

Α. α. Η συχνότητα των κυμάτων είναι

$$f=\frac{N}{\Delta t}\Rightarrow f=\frac{9}{18}Hz=0,5Hz$$

β. Από τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης του φελλού όταν εκτελεί σύνθετη ταλάντωση

$$|\Sigma F_{max}|=m\omega^2A'\Rightarrow A'=\frac{|\Sigma F_{max}|}{m\omega^2}\Rightarrow A'=\frac{12\pi^2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 10^{-3}\pi^2}m\Rightarrow A'=6\cdot 10^{-3}m$$

γ. Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι

$$\upsilon_{max}=\frac{\pi}{10}\upsilon\Rightarrow \omega A'=\frac{\pi}{10}\lambda\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow \lambda=20A'=0,12m$$

δ. Στο σημείο που ταλαντώνεται ο φελλός έχουμε ενισχυτική συμβολή διότι

$$r_1-r_2=24cm=2\lambda$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης των πηγών είναι το μισό του πλάτους ταλάντωσης του φελλού μετά τη συμβολή

$$A = \frac{A'}{2} = 3 \cdot 10^{-3} m$$

Β. α. Αν η απόσταση του φελλού από την πηγή O_2 είναι r_2=31,5cm, τότε η απόσταση από την O_1 θα είναι

$$r_1 - r_2 = 24cm \Rightarrow r_1 = 55,5cm$$

Άρα η χρονική στιγμή που ξεκινάει η συμβολή θα είναι

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{0,555m}{0,12 \cdot 0,5m/s} = 9,25s$$

β. Ο φελλός ξεκινά να ταλαντώνεται τη στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{0,315m}{0,12 \cdot 0,5m/s} = 5,25s$$

Η στιγμή που μηδενίζει για $1^{η}$ φορά την ταχύτητά του κάνοντας σύνθετη ταλάντωση είναι

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{4} = 9,25s + 0,5s = 9,75s$$

Στο διάστημα από 5,25s μέχρι 9,25s ο φελλός ταλαντώνεται με πλάτος Α και έχει εκτελέσει αριθμό ταλαντώσεων

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{9,25s - 5,25s}{2s} = 2$$

Άρα στο διάστημα αυτό ο φελλός έχει κάνει

$$S_1 = 8A = 24 \cdot 10^{-3} m$$

Στο διάστημα από 9,25s μέχρι τη στιγμή 9,75s ο φελλός ταλαντώνεται με πλάτος 2Α και έχει εκτελέσει αριθμό ταλαντώσεων

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{9,75s - 9,25s}{2s} = \frac{1}{4}$$

Άρα στο διάστημα αυτό ο φελλός έχει κάνει $S_2 = 2A = 6 \cdot 10^{-3} m$

Άρα το συνολικό διάστημα θα είναι

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 = 30mm$$

11.Δ. 8

α. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει λ=υ/f=0,8m.
Στο Σ συμβαίνει απόσβεση για N=2, καθώς βρίσκεται πάνω στην 3η υπερβολή μετά τη μεσοκάθετο του $\Pi_1\Pi_2$, άρα

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}r_2 - r_2 = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}r_2 = \frac{5\cdot 0{,}8m}{2} \Rightarrow \ r_2 = 6m \ \ , \ \ r_1 = \frac{4}{3}r_2 = 8m$$

β. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει η απόσταση d των δύο πηγών

$$d = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2} = \sqrt{(6m)^2 + (8m)^2} \Rightarrow d = 10m$$

γ. Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που ενώνει τις πηγές και στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει

$$r_1' - r_2' = N\lambda = N\cdot 0{,}8m$$

$$r_1' + r_2' = 10m$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1' = 10m + N\cdot 0{,}8m \Rightarrow r_1' = 5m + N\cdot 0{,}4m$$

Για την απόσταση r_1' ισχύει

$$0m \le r_1' \le 10m \Rightarrow 0m \le 5m + N\cdot 0{,}4m \le 10m \Rightarrow -5m \le N\cdot 0{,}4 \le 5m \Rightarrow -12{,}5 \le N \le 12{,}5$$

Άρα, τα σημεία ενίσχυσης που βρίσκονται μεταξύ των πηγών Π_1, Π_2 είναι 25, για N=-12 έως N=12.

Το σημείο Σ βρίσκεται στην 3η υπερβολή απόσβεσης για N=2, άρα οι υπερβολές ενίσχυσης που είναι δεξιά του Σ_2 προκύπτουν για N>2, δηλαδή για N= 3, 4 ... έως και N=12. Άρα, συνολικά είναι 10 υπερβολές ενίσχυσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma\Pi_2$.

δ. Το σημείο Λ απέχει r_1=d-r_2=9,8m και r_2=0,2m αντίστοιχα από τις δύο πηγές.

Είναι r_1- r_2=9,6m=N·0,8m για N=12, άρα το σημείο Λ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Το σημείο Λ ξεκινάει να ταλαντώνεται από το κύμα της πηγής Π_2 τη στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{0{,}2m}{0{,}8m/s} \Rightarrow t_2 = 0{,}25s$$

και από το κύμα της πηγής Π_1 τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} = \frac{9{,}8m}{0{,}8m/s} \Rightarrow t_1 = 12{,}25s$$

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=12,25s που φτάνει το κύμα από την πηγή Π_1, περνούν Δt=12,25s-0,25s=12s που αντιστοιχούν σε 12 περιόδους στις οποίες το σημείο Λ ταλαντώνεται με πλάτος Α και διανύει μήκος διαδρομής ίσο με

$$s_1 = 12\cdot 4A \Rightarrow s_1 = 0{,}24m$$

11.Δ.9

α. Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο Σ εξαιτίας του $1^{ου}$ κύματος έχει $υ_1<0$ και $α_1<0$, άρα βρίσκεται στο $2^ο$ τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς με $y_1>0$ που υπολογίζεται από την ΑΔΕΤ

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dy_1{}^2 + \frac{1}{2}mυ_1{}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mω^2A^2 = \frac{1}{2}mω^2y_1{}^2 + \frac{1}{2}mυ_1{}^2 \Rightarrow$$

$$y_1 = \pm\sqrt{A^2 - \frac{υ_1^2}{ω^2}} = \pm 2\sqrt{3}\cdot 10^{-3}\,m \Rightarrow y_1 = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-3}\,m$$

β. Την ίδια στιγμή t_1 το σημείο Σ εξαιτίας του $2^{ου}$ κύματος έχει $υ_2<0$ και $α_2>0$, άρα βρίσκεται στο $3^ο$ τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς με $y_2<0$ που υπολογίζεται από την ΑΔΕΤ. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει $y_2 = -2\sqrt{3}\cdot 10^{-3}\,m$.

γ. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας είναι

$$y = y_1 + y_2 = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-3}\,m - 2\sqrt{3}\cdot 10^{-3}\,m = 0\,m$$

Η ταχύτητα του Σ τη στιγμή t_1 εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων είναι σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας

$$υ = υ_1 + υ_2 = -16π\cdot 10^{-3}\,m/s + \left(-16π\cdot 10^{-3}\,m/s\right) \Rightarrow υ = -32π\cdot 10^{-3}\,m/s$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1, το σημείο Σ έχει y=0m, άρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και η ταχύτητα $υ = -32π\cdot 10^{-3}\,m/s$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι η $-υ_{max}$, άρα $υ_{max} = 32π\cdot 10^{-3}\,m/s$.

Από τη $υ_{max}$, του σημείου Σ βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό

$$υ_{max} = ωA' = 32π\cdot 10^{-3}\,m/s \Rightarrow A' = \frac{32π\cdot 10^{-3}\,m/s}{8π\,rad/s} \Rightarrow A' = 4\cdot 10^{-3}\,m$$

Άρα, $α_{max} = ω^2A' = (8π)^2\cdot 4\cdot 10^{-3}\,m/s^2 \Rightarrow α_{max} = 2{,}56\,m/s^2$

11.Δ.10

α. Οι αποστάσεις του σημείου Λ από τις δύο πηγές είναι:

$$r_1 = υt_1 = 5\cdot 1{,}4\,m = 7\,m$$
$$r_2 = υt_2 = 5\cdot 0{,}8\,m = 4\,m$$

Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι

$$λ = \frac{υ}{f} = \frac{υ}{ω}2π \Rightarrow λ = \frac{5}{10π}2π \Rightarrow λ = 1\,m$$

Άρα στο σημείο Λ έχουμε ενισχυτική συμβολή διότι

$$r_1 - r_2 = 3m = 3\lambda$$

Επομένως το πλάτος μετά τη συμβολή θα είναι

$$A' = 2A = 0,02m$$

β. Στο χρονικό διάστημα από 0,8s μέχρι 1,4s το σημείο Λ ταλαντώνεται με πλάτος Α και εκτελεί αριθμό ταλαντώσεων ίσο με

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1,4s - 0,8s}{0,2s} = 3$$

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς σε αυτό το χρονικό διάστημα έχει μέτρο

$$\Sigma F_{max} = m\omega^2 A \Rightarrow \Sigma F_{max} = 10^{-6} \cdot 100\pi^2 \cdot 10^{-2} N = 10^{-5} N$$

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς στο διάστημα αυτό θα είναι

$$\Sigma F = -Dy \Rightarrow \Sigma F = -m\omega^2 A\eta\mu\omega(t - t_2) \Rightarrow \Sigma F = -10^{-5}\eta\mu 10\pi(t - 0,8)\,(S.I.)$$

Στο χρονικό διάστημα από 1,4s μέχρι 1,8s το σημείο Λ ταλαντώνεται με πλάτος 2Α και εκτελεί αριθμό ταλαντώσεων ίσο με

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1,8s - 1,4s}{0,2s} = 2$$

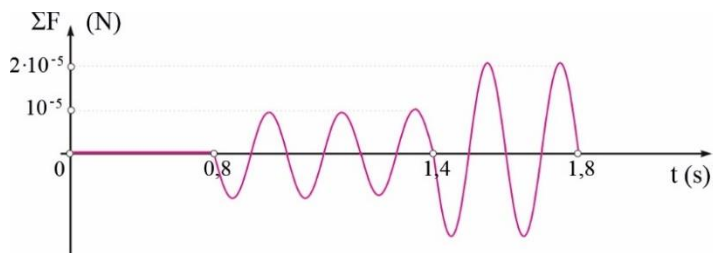
Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς σε αυτό το χρονικό διάστημα έχει μέτρο

$$\Sigma F_{max} = m\omega^2 2A \Rightarrow \Sigma F_{max} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100\pi^2 \cdot 10^{-2} N \Rightarrow \Sigma F_{max} = 2 \cdot 10^{-5} N$$

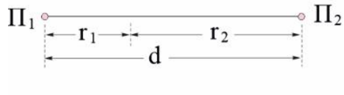
Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς στο διάστημα αυτό θα είναι

$$\Sigma F = -Dy \Rightarrow$$
$$\Sigma F = -m\omega^2 2A\eta\mu\omega(t - t_1) \Rightarrow$$
$$\Sigma F = -2 \cdot 10^{-5}\eta\mu 10\pi(t - 1,4)\ (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Για τα σημεία που συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές ισχύει

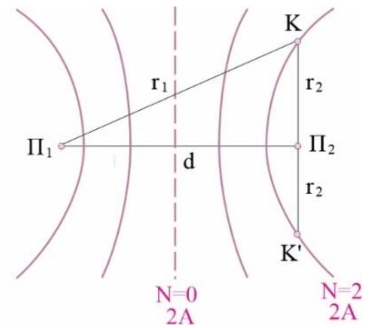


$$\left.\begin{array}{l} r_1 - r_2 = N\lambda \\ r_1 + r_2 = d \end{array}\right\} \Rightarrow 2r_1 = N\lambda + d \Rightarrow r_1 = \frac{N\lambda + d}{2} \Rightarrow r_1 = (0,5N + 1,5)m$$

$$0m < r_1 < 3m \Rightarrow 0m < (0,5N + 1,5)m < 3m \Rightarrow -1,5 < 0,5N < 1,5 \Rightarrow$$
$$-3 < N < 3 \quad , \qquad N = -2, -1, 0, 1, 2$$

Άρα έχουμε 5 σημεία ενισχυτικής συμβολής ανάμεσα από τις δύο πηγές.

δ. Η δεύτερη υπερβολή ενίσχυσης που βρίσκεται δεξιά της μεσοκαθέτου έχει Ν=2. Τα σημεία αυτά δημιουργούν ορθογώνια τρίγωνα με τις δύο πηγές άρα για τα σημεία αυτά ισχύει ότι



$$\left.\begin{cases} r_1 - r_2 = 2\lambda = 2m \\ r_1^2 = r_2^2 + 3^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow (r_2 + 2)^2 = r_2^2 + 9 \Rightarrow$$
$$r_2^2 + 4 + 4r_2 = r_2^2 + 9 \Rightarrow r_2 = 1,25m$$

Άρα η απόσταση των σημείων Κ και Κ΄ είναι

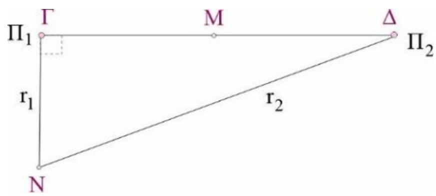
$$d = 2r_2 = 2,5m$$

11.Δ.11

α. Στο μέσο Μ του τμήματος ΓΔ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων έχουμε ενισχυτική συμβολή

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow 0 = N\lambda \Rightarrow N = 0$$

Αφού το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ είναι 4cm, άρα το πλάτος ταλάντωσης του κάθε κύματος είναι 2cm. Το σημείο Ν σχηματίζει ορθογώνιο τρίγωνο με τις δύο πηγές άρα θα έχουμε



$$r_2^2 = r_1^2 + d^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2} \Rightarrow r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2}m \Rightarrow r_2 = 5m$$

Από τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής για το σημείο Ν έχουμε ότι

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow 3m - 5m = -2\lambda$$

Άρα έχουμε ενισχυτική συμβολή για Ν=-2. Συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης του φελλού μετά τη συμβολή θα είναι $A' = 2A = 4cm$.

β. Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$\upsilon = \lambda f = 1 \cdot 1m/s = 1m/s$$

Βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές στις οποίες τα δύο κύματα φθάνουν στο σημείο Ν:

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{1}s = 3s$$
$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{1}s = 5s$$

Στο χρονικό διάστημα από 3s έως 5s ο φελλός ταλαντώνεται με πλάτος 2cm και εκτελεί αριθμό ταλαντώσεων

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{5s - 3s}{1s} = 2$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου του φελλού στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι

$$y = A\eta\mu\omega(t - t_1) \Rightarrow y = 0{,}02\eta\mu 2\pi(t-3)(S.I.),\ 3s \le t < 5s$$

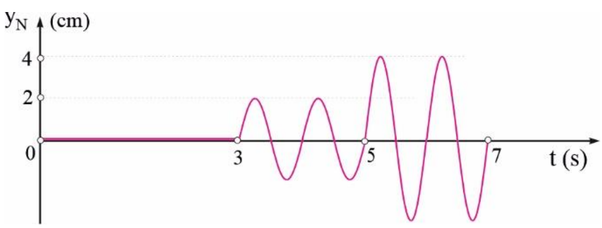
Στο χρονικό διάστημα από 5s έως 7s ο φελλός ταλαντώνεται με πλάτος 4cm λόγω της ενισχυτικής συμβολής και εκτελεί αριθμό ταλαντώσεων

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{7s - 5s}{1s} = 2$$

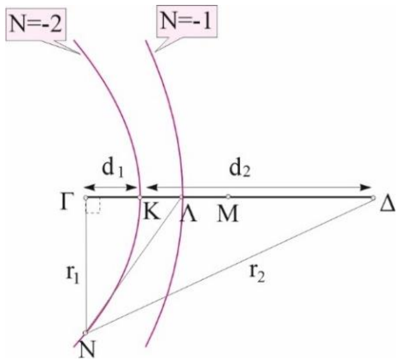
Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου του φελλού στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι

$$y = 2A\eta\mu\omega(t - t_2) \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu 2\pi(t-5)(S.I.),\quad 5s \le t < 7s$$

Άρα, η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του σε σχέση με τον χρόνο θα είναι όπως στο σχήμα.



γ. Το σημείο Λ βρίσκεται στην πρώτη ενισχυτική υπερβολή αριστερά από τη μεσοκάθετο, άρα απέχει από αυτή λ/2=0,5m οπότε η απόσταση ΓΛ=1,5m. Από το πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε



$$(N\Lambda)=\sqrt{\Gamma\Lambda^2+r_1^2}=\sqrt{1,5^2+3^2}m\Rightarrow(N\Lambda)=1,5\sqrt{5}m$$

δ. Όσες υπερβολές απόσβεσης διέρχονται μεταξύ των Γ και Ν διέρχονται και μεταξύ των Γ και Κ. Για το σημείο Κ ισχύει ότι

$$\left\{\begin{matrix} d_1-d_2=-2\lambda \\ d_1+d_2=4m \end{matrix}\right\}\Rightarrow d_1=1m$$

Ζητάμε τις υπερβολές που διέρχονται από το ΓΚ=1m. Για οποιοδήποτε σημείο απόσβεσης πάνω στο ΓΔ που απέχει x από το σημείο Γ θα ισχύει

$$(\Gamma\Delta-x)-x=(2N+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow x=\frac{\Gamma\Delta}{2}-(2N+1)\frac{\lambda}{4}=2,25-0,5N\,(S.I.)$$
$$0m<x<1m\Rightarrow 0<2,25-0,5N<1\Rightarrow -2,25<-0,5N<-1,25\Rightarrow 4,5>N>2,5$$
$$N=3,\,4$$

Άρα θα υπάρχουν δύο αποσβεστικές υπερβολές που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΓΝ.

11.Δ.12

α. Για το σημείο Λ που βρίσκεται στη δεύτερη ενισχυτική υπερβολή δεξιά από τη μεσοκάθετο έχουμε ότι

$$r_1-r_2=N\lambda\Rightarrow r_1-r_2=2\lambda \qquad (1)$$

Από τη χρονική διαφορά βρίσκουμε τη διαφορά δρόμου

$$\Delta t=t_1-t_2\Rightarrow\Delta t=\frac{r_1-r_2}{\upsilon}\Rightarrow r_1-r_2=\upsilon\Delta t\Rightarrow r_1-r_2=0,4\cdot0,8m\Rightarrow r_1-r_2=0,32m \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$0,32m=2\lambda\Rightarrow\lambda=0,16m$$

Η συχνότητα f των δύο πηγών είναι

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{0,4}{0,16}Hz=2,5Hz$$

β. Βρίσκουμε την απόσταση του σημείου Λ από τη δεύτερη πηγή

$$r_1 - r_2 = 2\lambda \Rightarrow r_2 = r_1 - 2\lambda \Rightarrow r_2 = 1m - 0,32m = 0,68m$$

Βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές στις οποίες τα δύο κύματα φθάνουν στο σημείο Λ:

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{0,4}s = 2,5s$$
$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{0,68}{0,4}s = 1,7s$$

Στο χρονικό διάστημα από 1,7s έως 2,5s το σημείο Λ ταλαντώνεται με πλάτος 2mm και εκτελεί αριθμό ταλαντώσεων

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2,5s - 1,7s}{0,4s} = 2$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου του φελλού στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι

$$y = A\eta\mu\omega(t - t_2) \Rightarrow y = 0,002\eta\mu 5\pi(t - 1,7) \text{ (S.I.)}, \quad 1,7s \le t < 2,5s$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του φελλού στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$U = \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}10^{-3} \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}\eta\mu^2 5\pi(t - 1,7) \Rightarrow$$
$$U = 5 \cdot 10^{-7}\eta\mu^2 5\pi(t - 1,7) \text{ (S.I.)}, \quad 1,7s \le t < 2,5s$$

Στο χρονικό διάστημα από 2,5s έως 3,3s ο φελλός ταλαντώνεται με πλάτος 4mm λόγω της ενισχυτικής συμβολής και εκτελεί αριθμό ταλαντώσεων

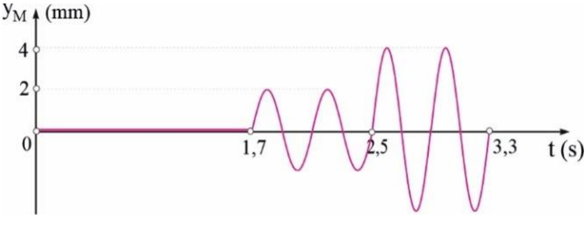
$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{3,3s - 2,5s}{0,4s} = 2$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου του φελλού στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι

$$y = 2A\eta\mu\omega(t - t_2) \Rightarrow y = 0,004\eta\mu 5\pi(t - 2,5) \text{ (S.I.)}, \quad 2,5s \le t < 3,3s$$

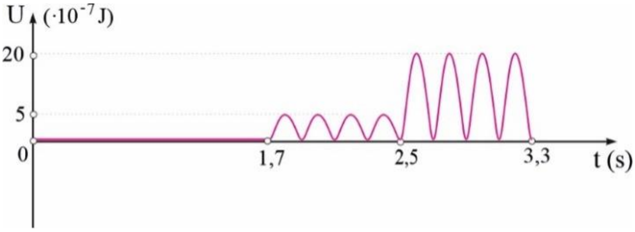
Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του φελλού στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$U = \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \Rightarrow$$
$$U = \frac{1}{2}10^{-3} \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot 16 \cdot 10^{-6}\eta\mu^2 5\pi(t - 2,5) \Rightarrow$$
$$U = 20 \cdot 10^{-7}\eta\mu^2 5\pi(t - 2,5) \text{ (S.I.)}, \; 2,5s \le t < 3,3s$$

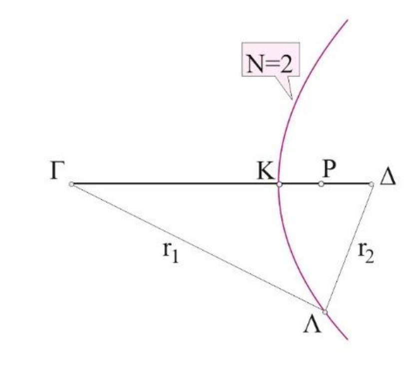


Άρα η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του σε σχέση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



γ. Οι υπερβολές απόσβεσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΛΔ είναι αυτές που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΔ. Το σημείο Κ, όπως και το σημείο Λ βρίσκεται στη δεύτερη ενισχυτική υπερβολή δεξιά από τη μεσοκάθετο και απέχει από αυτήν 2λ/2=0,16m, δ ηλαδή από το Γ, d/2+λ=0,46m.



Έστω Ρ ένα σημείο που έχουμε αναιρετική συμβολή και απέχει x από την πηγή $Π_2$. Θα ισχύει

$$x-(d-x)=(2N+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow x=(2N+1)\frac{\lambda}{4}+\frac{d}{2}\Rightarrow$$
$$x=0,08N+0,34(\text{S.I.})$$
$$0,46m\le x\le 0,6m\Rightarrow 0,46\le 0,08N+0,34\le 0,6\Rightarrow$$
$$0,12\le 0,08N\le 0,26\Rightarrow 1,5\le N\le 3,25 \quad , \ N=2,3$$

Άρα δύο αποσβεστικές υπερβολές τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΛΔ.

δ. Για να μένει ακίνητος ο φελλός μετά τη συμβολή σημαίνει ότι θα βρίσκεται πάνω σε υπερβολή απόσβεσης οπότε θα ισχύει

$$r_1-r_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow r_1-r_2=(2N+1)\frac{\upsilon}{2f}\Rightarrow f=\frac{(2N+1)\upsilon}{2(r_1-r_2)}\Rightarrow f=0,625(2N+1)\text{Hz}$$

Η ελάχιστη τιμή της συχνότητας είναι αυτή για Ν=0 οπότε θα έχουμε

$$f_{min}=0,625(2\cdot 0+1)\text{Hz}=0,625\text{Hz}$$

11.Δ.13

α. Από το πυθαγόρειο θεώρημα, η απόσταση r_2 του Σ από την $Π_2$ είναι

$$r_2=\sqrt{(0,3m)^2+(0,4m)^2}\Rightarrow r_2=0,5m \quad (1)$$

Στο Σ συμβαίνει απόσβεση για Ν=0, καθώς βρίσκεται πάνω στην υπερβολή που είναι η κοντινότερη στη μεσοκάθετο του ΚΛ, άρα

$$r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 0,5m - 0,4m = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 0,2m$$

β. Η εξίσωση της φάσης του 1ου κύματος για μια στιγμή t, στο σημείο Σ, είναι

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \ (1)$$

και η εξίσωση της φάσης του 2ου κύματος την ίδια στιγμή t, στο σημείο Σ, είναι

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) (2)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (2) από την (1) προκύπτει

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2\pi\frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \pi\,\mathrm{rad}$$

γ. Οι υπερβολές ενίσχυσης που τέμνουν την ευθεία που ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα $ΣΠ_1$ είναι όσες διέρχονται από το ευθύγραμμο τμήμα $ΜΠ_1$, όπου Μ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$.

Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει:

$$r_1' - r_2' = N\lambda$$

$$r_1' + r_2' = L$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1' = L + N\lambda \Rightarrow r_1' = 0,15m + N \cdot 0,1m$$

Για την απόσταση r_1' ισχύει

$$0m \le r_1' \le 0,3m \Rightarrow 0m < 0,15m + N \cdot 0,1m < 0,3m \Rightarrow -0,15 < N \cdot 0,1 < 0,15 \Rightarrow -1,5 < N < 1,5$$

Άρα, υπάρχουν 3 υπερβολές ενίσχυσης ανάμεσα στις πηγές, για N=0, ±1 και την ευθεία που ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα $ΣΠ_1$ την τέμνει μόνο μία υπερβολή ενίσχυσης σε δύο σημεία, Λ, Λ΄, συμμετρικά ως προς το $Π_1$.

Για τις αποστάσεις του σημείου Λ ισχύει

$$r_{2Λ} - r_{1Λ} = \lambda \Rightarrow r_{2Λ} - r_{1Λ} = 0,2m \ (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$r_{2Λ}^2 = (0,3m)^2 + r_{1Λ}^2 \Rightarrow r_{2Λ}^2 - r_{1Λ}^2 = (0,3m)^2 \ (2)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει

$$r_{1Λ} + r_{2Λ} = 0,45m \ \ (3)$$

Από την επίλυση του συστήματος των (2) και (3) προκύπτει

$r_{1\Lambda} = 0,125\text{m}$ και $r_{2\Lambda} = 0,325\text{m}$

Το σημείο Λ απέχει από το σημείο Σ

(ΛΣ)=0,4m - 0,125m=0,275m και το σημείο Λ΄

(Λ΄Σ)= 0,4m + 0,125m=0,525m

δ. Το κύμα από την πηγή Π_1 φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή

$t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon} = \dfrac{0,4\text{m}}{0,8\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = 0,5\text{s}$ και από την πηγή Π_2 τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{0,5\text{m}}{0,8\text{m/s}} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{8}\text{s} = 0,625\text{s}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ με τον χρόνο είναι

$$y_\Sigma = \left\{\begin{array}{lll} 0\text{m} & & \text{για} \quad 0\text{s} \le t < 0,5\text{s} \\ 0,001\eta\mu 8\pi(t-0,5) & (\text{S.I.}) & \text{για} \quad 0,5\text{s} \le t < 0,625\text{s} \\ 0\text{m} & & \text{για} \quad 0,625\text{s} \le t \end{array}\right\}$$

11.Δ.14

α. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon = \lambda f = 2\text{m/s}$

η γωνιακή συχνότητα ω=2πf=π rad/s και η περίοδος T=1/f=2s.

Αφού το Σ ανήκει στη μεσοκάθετο, τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα και συμβάλλουν ενισχυτικά. Η χρονική στιγμή t_1=8s είναι ίση με τον χρόνο άφιξης των κυμάτων t_Σ και 2 περιόδους. Άρα

$$t_1 = t_\Sigma + 2T \Rightarrow t_\Sigma = 4\text{s}$$

Η απόσταση του Σ από τις πηγές είναι

$$r_1 = r_2 = \upsilon t_\Sigma = 8\text{m}$$

Η γωνία $\Pi_1\Sigma\Pi_2$ είναι ορθή, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε την απόσταση L των πηγών

$r_1^2 + r_2^2 = L^2 \Rightarrow L = 8\sqrt{2}\text{m}$ (2)

β. Τα σημεία μεταξύ των πηγών Π_1, Π_2 που ταλαντώνονται με ίδια μέγιστη ταχύτητα με το Σ είναι όλα τα σημεία ενίσχυσης του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$. Θα βρούμε πόσα είναι. Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις πηγές και στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει

$r_1 - r_2 = N\lambda$, $r_1 + r_2 = L$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1 = L + N\lambda \Rightarrow r_1 = \frac{8\sqrt{2}m}{2} + N\frac{4m}{2} \Rightarrow r_1 = 4\sqrt{2}m + N\cdot 2m$$

Για την απόσταση r_1, έχουμε

$$0m < r_1 < L \Rightarrow 0m < 4\sqrt{2}m + N\cdot 2m < 8\sqrt{2}m \Rightarrow$$
$$-4\sqrt{2}m < N\cdot 2m < 4\sqrt{2}m \Rightarrow -2\sqrt{2} < N < 2\sqrt{2} \Rightarrow -2,8 < N < 2,8$$

Άρα, τα σημεία ενίσχυσης που βρίσκονται μεταξύ των πηγών $Π_1$, $Π_2$ είναι συνολικά 5, για N=-2, -1 ,0, 1, 2.

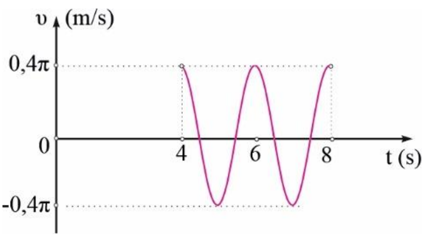
γ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ με τον χρόνο είναι

$$y_\Sigma = \begin{cases} 0m & \text{για} \quad 0s \le t < 4s \\ 0,4\eta\mu\pi(t-4) \quad (S.I.) & \text{για} \quad 4s \le t \end{cases}$$

Η μέγιστη ταχύτητα του Σ είναι $\upsilon_{max}=\omega 2A=0,4\pi m/s$.

Η ταχύτητα σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$\upsilon_\Sigma = \begin{cases} 0m/s & \text{για} \quad 0s \le t < 4s \\ 0,4\pi\sigma\upsilon\nu\pi(t-4) \quad (S.I.) & \text{για} \quad 4s \le t \end{cases}$$



και το διάγραμμά της σε συνάρτηση με τον χρόνο για χρονικό διάστημα $0s \le t \le 8s$, δείχνεται στο σχήμα.

δ. Η απόσταση του Λ από τη μία πηγή είναι $r_{1\Lambda} = \upsilon t_\Lambda = 8m$.

Η εξίσωση της φάσης του 1ου κύματος για μια στιγμή t, στο σημείο Λ, είναι

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_{1\Lambda}}{\lambda}\right) \quad (1)$$

και η εξίσωση της φάσης του 2ου κύματος την ίδια στιγμή t, στο σημείο Λ, είναι

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_{2\Lambda}}{\lambda}\right) \quad (2)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (2) από την (1) προκύπτει

$$\varphi_1-\varphi_2=2\pi\frac{r_{2\Lambda}-r_{1\Lambda}}{\lambda}\Rightarrow 2\pi=2\pi\frac{r_{2\Lambda}-6m}{4m}\Rightarrow r_{2\Lambda}=12m$$

Για να φτάσει το 2ο κύμα στο Λ χρειάζεται χρόνο

$$t_{2\Lambda}=\frac{r_{2\Lambda}}{\upsilon}=6s$$

Τη χρονική στιγμή t_2=5s το σημείο Σ έχει εκτελέσει μισή ταλάντωση, διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα ίση με υ_Σ=-ω2A=-0,4πm/s.

Τη χρονική στιγμή t_2=5s στο σημείο Λ έχει φτάσει μόνο το ένα κύμα και το σημείο έχει εκτελέσει μισή ταλάντωση, οπότε διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα ίση με υ_Λ=-ωA=-0,2πm/s.

Ο λόγος τους είναι ίσος με $\upsilon_\Sigma/\upsilon_\Lambda$=2.

11.Δ.15

α. Η γωνιακή συχνότητα και η περίοδος των κυμάτων προκύπτουν από τη συχνότητα

$\omega=2\pi f=0,2\pi\,rad/s$ και T=1/f=10s

και η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon=\lambda f=0,5m/s$.

Η διαφορά των αποστάσεων του Σ από τις δύο πηγές είναι

$r_2-r_1=\upsilon t_2-\upsilon t_1=\upsilon\left(t_2-t_1\right)=\upsilon\Delta t=10m=2\lambda=N\lambda$, για N=2,

άρα το Σ είναι σημείο ενίσχυσης με πλάτος Α΄=2Α=0,1m και μέγιστη επιτάχυνση

$\alpha_{max}=\omega^2 2A=0,04m/s^2$

β. Έστω ότι το Λ απέχει από την κοντινότερη πηγή κατά x. Η διαφορά των αποστάσεων του Λ από τις δύο πηγές είναι

$r_2'-r_1'=\left(L+x\right)-x=L=20m=4\lambda=N\lambda$, για N=4,

άρα το Λ είναι σημείο ενίσχυσης με πλάτος Α΄=2Α=0,1m και ο λόγος της ενέργειάς του, πριν και μετά τη συμβολή των κυμάτων είναι

$$\frac{E}{E'}=\frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA'^2}=\frac{A^2}{\left(2A\right)^2}\Rightarrow\frac{E}{E'}=1/4$$

γ. Αφού το Λ ξεκινάει να ταλαντώνεται τη στιγμή t_1=10s απέχει από την κοντινότερη πηγή κατά x=υt_1=5m και από τη μακρινότερη πηγή κατά L+x=25m. Η συμβολή θα ξεκινήσει τη στιγμή

$$t_2 = \frac{L+x}{\upsilon} = \frac{25m}{0,5m/s} \Rightarrow t_2 = 50s$$

δ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι

$$y_\Lambda = \begin{Bmatrix} 0m & & \gamma\iota\alpha\ \ 0s \le t < 10s \\ 0,05 \cdot \eta\mu 0,2\pi(t-10) & (S.I.) & \gamma\iota\alpha\ 10s \le t < 50s \\ 0,1 \cdot \eta\mu 0,2\pi(t-50) & (S.I.) & \gamma\iota\alpha\ \ 50s \le t \end{Bmatrix}$$

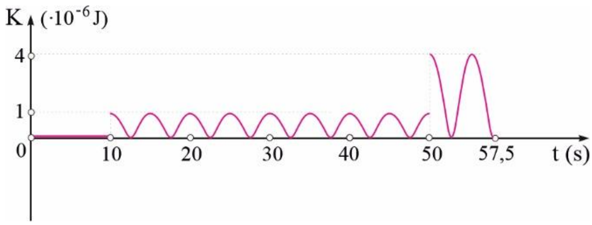
Η εξίσωση της ταχύτητας με τον χρόνο είναι

$$\upsilon_\Lambda = \begin{Bmatrix} 0m/s & & \gamma\iota\alpha\ \ 0s \le t < 10s \\ 0,01\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 0,2\pi(t-10) & (S.I.) & \gamma\iota\alpha\ 10s \le t < 50s \\ 0,02\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 0,2\pi(t-50) & (S.I.) & \gamma\iota\alpha\ \ 50s \le t \end{Bmatrix}$$

Η εξίσωσης της κινητικής ενέργειας $K=0,5\Delta m\upsilon^2$ με τον χρόνο είναι

$$K = \begin{Bmatrix} 0J & & \gamma\iota\alpha\ \ 0s \le t < 10s \\ 10^{-6}\sigma\upsilon\nu^2 0,2\pi(t-10) & (S.I.) & \gamma\iota\alpha\ 10s \le t < 50s \\ 4 \cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu^2 0,2\pi(t-50) & (S.I.) & \gamma\iota\alpha\ \ 50s \le t \end{Bmatrix}$$

και το διάγραμμα της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με τον χρόνο για το χρονικό διάστημα Δt=57,5s, δείχνεται στο σχήμα.



ε. Για να συμβάλλουν τα κύματα στο σημείο Λ ενισχυτικά θα ισχύει

$$r_2 - r_1 = N\lambda = N\upsilon T \Rightarrow L = N\upsilon T \Rightarrow$$

$$20m = NT0,5m/s \Rightarrow T = \frac{40}{N}s \Rightarrow T_{max} = \frac{40}{1}s = 40s$$

11.Δ.16

α. Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις πηγές και στο οποίο συμβαίνει αποσβεστική συμβολή και για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad , \quad r_1 + r_2 = L$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1 = L + (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{4,4m}{2} + (2N+1)\frac{2m}{4} \Rightarrow r_1 = (2,7+N)m \ \ (1)$$

Για την απόσταση r_1, έχουμε

$$0\text{m} < r_1 < L \Rightarrow 0\text{m} < 2{,}7\text{m} + N\,\text{m} < 4{,}4\text{m} \Rightarrow$$
$$-2{,}7\text{m} < N\,\text{m} < 1{,}7\text{m} \Rightarrow -2{,}7 < N < 1{,}7$$

Άρα, τα σημεία απόσβεσης που βρίσκονται μεταξύ των πηγών $Π_1$, $Π_2$ είναι 4, για N=-2, -1 ,0 και N=1 και απέχουν από την πηγή $Π_1$ αποστάσεις που προκύπτουν από την (1): 0,7m, 1,7m, 2,7m, 3,7m.

β. Τα σημεία ενίσχυσης έχουν πλάτος 2A=20cm και μέγιστη ταχύτητα

$$\upsilon_{max} = \omega 2A = 2\pi f 2A = 0{,}4\pi \text{m/s}$$

γ. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon = \lambda f = 2\text{m/s}$.

Για να αποκατασταθεί το φαινόμενο της συμβολής σε όλο το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ πρέπει το κύμα από κάθε πηγή να διατρέξει όλη την απόσταση των δύο πηγών. Άρα απαιτείται χρόνος ίσος με

$$t = \frac{L}{\upsilon} = \frac{4{,}4\text{m}}{2\text{m/s}} \Rightarrow t = 2{,}2\text{s}$$

δ. Το κύμα από την πηγή $Π_1$ φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή

$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} = \frac{1\text{m}}{2\text{m/s}} \Rightarrow t_1 = 0{,}5\text{s}$ και από την πηγή $Π_2$ τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{L - r_1}{\upsilon} = \frac{3{,}4\text{m}}{2\text{m/s}} \Rightarrow t_2 = 1{,}7\text{s}$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_α=1s έχει φτάσει μόνο το πρώτο κύμα στο σημείο Σ και για την ταχύτητά του ισχύει

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_\alpha}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = 2\pi f A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(f t_\alpha - \frac{r_1}{\lambda}\right) = 0{,}2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(1 - \frac{1\text{m}}{2\text{m}}\right) \Rightarrow$$
$$\upsilon = 0{,}2\pi\sigma\upsilon\nu\pi = -0{,}2\pi \text{m/s}$$

ε. Για να συμβάλλουν τα κύματα στο σημείο Σ αποσβεστικά θα ισχύει

$$r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = (2N+1)\frac{\upsilon}{2f} \Rightarrow 3{,}4\text{m} - 1\text{m} = (2N+1)\frac{2\text{m/s}}{2f} \Rightarrow$$
$$2{,}4\text{m} = (2N+1)\frac{1}{f}\text{m/s} \Rightarrow f = \frac{2N+1}{2{,}4}\text{Hz}$$

Άρα η ελάχιστη συχνότητα είναι για N=0

$$f_{min} = \frac{1}{2{,}4}\text{Hz} = \frac{5}{12}\text{Hz}$$

11.Δ.17

α. Η συχνότητα και η περίοδος των κυμάτων προκύπτουν από τη γωνιακή τους συχνότητα

$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 1Hz$ και T=1/f=1s

και η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon = \lambda f = 0,2m/s$.

Για να αρχίσουν να ταλαντώνονται τα σημεία Σ και Μ απαιτείται χρόνος

$$t_1 = \frac{L/2}{\upsilon} = \frac{0,3m}{0,2m/s} \Rightarrow t_1 = 1,5s$$

β. Το σημείο Σ για να αρχίσει να ταλαντώνεται ταυτόχρονα με το μέσο Μ θα βρίσκεται έξω από το ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ και θα απέχει r_1= L/2=0,3m από τη μία πηγή και r_2= L/2+L=0,9m από την άλλη πηγή.
Η διαφορά των αποστάσεων του Σ από τις δύο πηγές είναι

$r_2 - r_1 = 0,6m = 3\lambda = N\lambda$, για Ν=3,

άρα το Σ είναι σημείο ενίσχυσης με πλάτος 2Α=0,4m.

Το σημείο Μ είναι επίσης σημείο ενίσχυσης με πλάτος 2Α=0,4m και για να διανύσει διαδρομή ίση με s_M=6,4m σημαίνει ότι ταλαντώθηκε για χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{s_M}{s_T} = \frac{6,4m}{1,6m/T} = 4T \Rightarrow \Delta t = 4s$,

δηλαδή για 4 δευτερόλεπτα μετά τη στιγμή t_1=1,5 s, που ξεκίνησε να ταλαντώνεται.
Θα βρούμε πόση διαδρομή διάνυσε το σημείο Σ μέχρι τη στιγμή t_3= t_1+Δt=5,5s.
Το Σ ξεκινάει να ταλαντώνεται τη στιγμή t_1=1,5s, που φτάνει το κύμα από την πηγή Π_1. Μέχρι τη χρονική στιγμή t_2=r_2/υ=0,9/0,2m/s=4,5s, που φτάνει το κύμα από την πηγή Π_2, περνάνε τρεις περίοδοι που ταλαντώνεται με πλάτος Α και το σημείο Σ διανύει μήκος διαδρομής ίσο με
$s_1 = 3 \cdot 4A \Rightarrow s_1 = 2,4m$
Από τη στιγμή t_2=4,5s που αρχίζει η συμβολή, μέχρι τη στιγμή t_3=5,5s, περνάει 1 περίοδος που το Σ ταλαντώνεται με πλάτος 2Α και διανύει μήκος διαδρομής ίσο με
$s_2 = 1 \cdot 4 \cdot 2A \Rightarrow s_2 = 1,6m$
Άρα, συνολικά το Σ διανύει μήκος διαδρομής ίσο με
$s = s_1 + s_2 = 4m$
γ. Τη στιγμή t_3=3,75s=t_1+2T+T/4 το σημείο Μ βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση, δηλαδή σε απομάκρυνση y_M=2Α=0,4m.

Το σημείο Σ ταλαντώνεται εξαιτίας του ενός κύματος και βρίσκεται σε απομάκρυνση y_Σ=Α=0,2m.

Η κατακόρυφη απόσταση των δύο σημείων είναι Δy=0,2m, η οριζόντια απόστασή τους είναι Δx=L/2+L/2=L=0,6m και από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι η απόστασή τους d ισούται με

$$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\Rightarrow d=\sqrt{0,4}\,m$$

δ. Μετά τη στιγμή t_4=4,5s έχουν αποκατασταθεί φαινόμενα συμβολής σε όλο το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$. Τα σημεία που διατηρούν σταθερή απόσταση με το Μ ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με αυτό και είναι συμφασικά με αυτό, δηλαδή είναι όλα τα σημεία ενίσχυσης, του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$. Θα βρούμε πόσα είναι. Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις πηγές και στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει

$$r_1-r_2=N\lambda \quad , \quad r_1+r_2=L$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1=L+N\lambda\Rightarrow r_1=\frac{0,6m}{2}+N\frac{0,2m}{2}\Rightarrow r_1=0,3m+N\cdot 0,1m$$

Για την απόσταση r_1, έχουμε

$$0m<r_1<L\Rightarrow 0m<0,3m+N\cdot 0,1m<0,6m\Rightarrow$$
$$-0,3m<N\cdot 0,1m<0,3m\Rightarrow -3<N<3$$

Άρα, τα σημεία ενίσχυσης που βρίσκονται μεταξύ των πηγών $Π_1$, $Π_2$ είναι 5, για N=-2, -1 ,0, 1, 2. και αυτά που διατηρούν σταθερή απόσταση από το Μ είναι 4.

11.Δ.18

α. Όλες οι υπερβολές απόσβεσης που βρίσκονται από τη μεριά της μεσοκαθέτου που είναι η πηγή $Π_2$ τέμνουν την ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$, σε δύο σημεία η καθεμιά. Θα βρούμε πόσες είναι αυτές οι υπερβολές. Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις πηγές και στο οποίο συμβαίνει αποσβεστική συμβολή και για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει

$$r_1-r_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad , \quad r_1+r_2=L$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1=L+(2N+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow r_1=\frac{4m}{2}+(2N+1)\frac{2m}{4}\Rightarrow r_1=2,5m+N\,m \quad (1)$$

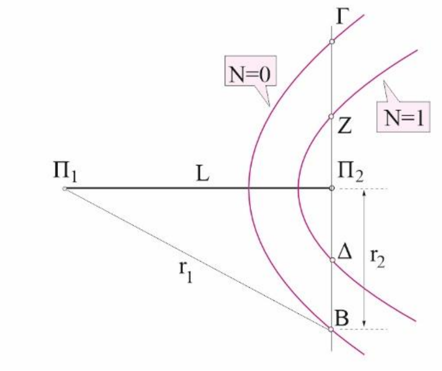
Για την απόσταση r_1, έχουμε

$$0m<r_1<L\Rightarrow 0m<2,5m+N\,m<4m\Rightarrow$$
$$-2,5m<N\,m<1,5m\Rightarrow -2,5<N<1,5$$

Άρα, τα σημεία απόσβεσης που βρίσκονται μεταξύ της μεσοκαθέτου και της πηγής $Π_2$ είναι 2, για N=0 και N=1 και οι αποστάσεις τους από την πηγή $Π_1$ προκύπτουν από τη σχέση (1): 2,5m, 3,5m.

Οι δύο υπερβολές τέμνουν την ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$, σε τέσσερα σημεία.

β. Η μεγαλύτερη απόσταση είναι για τα δύο σημεία που αντιστοιχούν στην υπερβολή N=0, ενώ η μικρότερη για την υπερβολή N=1. Θα βρούμε σε πόση απόσταση από την πηγή Π_2 βρίσκονται αυτά τα σημεία Β και Γ.



Στο Β συμβαίνει απόσβεση για N=0, άρα

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 + 1\text{m} \quad (2)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει

$$r_1^2 = L^2 + r_2^2 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

$$r_2 = 7{,}5\text{m}, \quad r_1 = 8{,}5\text{m}$$

άρα η μέγιστη απόσταση είναι ίση με $2r_2$=15m.

Ομοίως θα βρούμε και τα σημεία Δ και Ζ για την άλλη υπερβολή.

Στο Δ συμβαίνει απόσβεση για N=1, άρα

$$r_1' - r_2' = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow r_1' = r_2' + \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow r_1' = r_2' + 3\text{m} \quad (4)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει $r_1'^2 = L^2 + r_2'^2 \quad (5)$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε $r_2' = 7/6\ \text{m}, \quad r_1' = 25/6\ \text{m}$

άρα η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με $2r_2'$=7/3 m.

γ. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon = \lambda f = 1\text{m/s}$.

Τα σημεία αυτά ταλαντώθηκαν από τη χρονική στιγμή που έφτασε το 1ο κύμα μέχρι την άφιξη του 2ου, οπότε λόγω της αποσβεστικής συμβολής ακινητοποιήθηκαν. Άρα

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{r_1}{\upsilon} - \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t = 1\text{s}$$

δ. Η περίοδος των κυμάτων προκύπτει από τη συχνότητα $T = \frac{1}{f} = 2\text{s}$

και η γωνιακή συχνότητα είναι ω=2π/T=π rad/s.

Η εξίσωση της φάσης του 1ου κύματος για μια στιγμή t, στο σημείο Δ, είναι

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1'}{\lambda}\right) \ (1)$$

και η εξίσωση της φάσης του 2ου κύματος την ίδια στιγμή t, στο σημείο Δ, είναι

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2'}{\lambda}\right) \ (2)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (1) από τη (2) προκύπτει

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{r_1' - r_2'}{\lambda} = 2\pi\frac{\frac{25}{6}m - \frac{7}{6}m}{2m} \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi\,\text{rad}$$

ε. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι

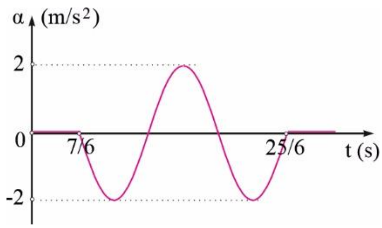
$$y_\Delta = \begin{Bmatrix} 0m & \gamma\iota\alpha \quad 0s \le t < 7/6 \ s \\ 0{,}2\eta\mu\pi(t - 7/6) \quad (S.I.) & \gamma\iota\alpha \quad 7/6 s \le t < 25/6 \ s \\ 0m & \gamma\iota\alpha \quad 25/6 \ s \le t \end{Bmatrix}$$

Η μέγιστη επιτάχυνση των σημείων εξαιτίας του ενός μόνο κύματος είναι

α_{max}=ω^2A=2m/s^2.

Η επιτάχυνση δίνεται σε σχέση με την απομάκρυνση με τη σχέση α=- ω^2y και σε συνάρτηση με τον χρόνο

$$\alpha_\Delta = \begin{Bmatrix} 0m/s^2 & \gamma\iota\alpha \quad 0s \le t < 7/6 \ s \\ -2\eta\mu\pi(t - 7/6) \quad (S.I.) & \gamma\iota\alpha \quad 7/6 s \le t < 25/6 \ s \\ 0m/s^2 & \gamma\iota\alpha \quad 25/6 \ s \le t \end{Bmatrix}$$



και το διάγραμμά της σε συνάρτηση με τον χρόνο για το χρονικό διάστημα $0s \le t \le 6s$, δείχνεται στο σχήμα.

11.Δ.19

α. Η συχνότητα των κυμάτων και το μήκος κύματος προκύπτουν από την εξίσωση του κύματος

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 0{,}25Hz$$

T=4s, λ=2m και η ταχύτητα διάδοσης είναι

$$\upsilon = \lambda f = 0{,}5m/s$$

Η απόσταση του Λ από την πηγή Π_1 προκύπτει από το πυθαγόρειο θεώρημα

$$r_1^2 = L^2 + r_2^2 \Rightarrow r_1 = 5m$$

Η διαφορά των αποστάσεων του Λ από τις δύο πηγές είναι

$r_1 - r_2 = 2m = 1\lambda = N\lambda$, για N=1,

άρα το Λ είναι σημείο ενίσχυσης και η μέγιστη ταχύτητά του είναι

$$\upsilon_{max} = \omega 2A = 2\pi f 2A = 0,2\pi m/s$$

β. Όλες οι υπερβολές απόσβεσης που βρίσκονται από τη μεριά της μεσοκαθέτου που είναι η πηγή $П_2$ τέμνουν την ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα $П_1П_2$. Θα βρούμε πόσες είναι αυτές οι υπερβολές. Για ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις πηγές και στο οποίο συμβαίνει αποσβεστική συμβολή και για τις αποστάσεις του από τις πηγές ισχύει

$r_1 - r_2 = (2N+1)\dfrac{\lambda}{2}$, $r_1 + r_2 = L$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$2r_1 = L + (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{4m}{2} + (2N+1)\frac{2m}{4} \Rightarrow r_1 = 2,5m + N m \quad (1)$$

Για την απόσταση r_1, έχουμε

$$0m < r_1 < L \Rightarrow 0m < 2,5m + N m < 4m \Rightarrow$$
$$-2,5m < N m < 1,5m \Rightarrow -2,5 < N < 1,5$$

Άρα, οι υπερβολές απόσβεσης που βρίσκονται μεταξύ της μεσοκαθέτου και της πηγής $П_2$ είναι 2, για N=0 και N=1. Αφού από το σημείο Λ διέρχεται η υπερβολή ενίσχυσης για N=1, υπάρχει μία υπερβολή απόσβεσης που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $ΛП_2$, αυτή που αντιστοιχεί στον ακέραιο N=1.

γ. Το κύμα από την πηγή $П_1$ φτάνει στο σημείο Λ τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} = \frac{5m}{0,5m/s} \Rightarrow t_1 = 10s$$

και από την πηγή $П_2$ τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{3m}{0,5m/s} \Rightarrow t_2 = 6s$$

Από τη χρονική στιγμή t_2=6s μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=10s, περνάει μία περίοδος που ταλαντώ-νεται με πλάτος Α και το σημείο Λ διανύει μήκος διαδρομής ίσο με

$$s_1 = 1 \cdot 4A \Rightarrow s_1 = 0,8m$$

Από τη στιγμή t_1=10s που αρχίζει η συμβολή, μέχρι τη στιγμή t_3=14s, περνάει 1 περίοδος που το Σ ταλαντώνεται με πλάτος 2Α και διανύει μήκος διαδρομής ίσο με

$$s_2 = 1 \cdot 4 \cdot 2A \Rightarrow s_2 = 1,6m$$

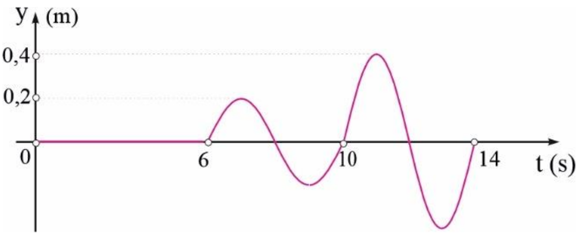
Άρα, συνολικά το Σ διανύει μήκος διαδρομής ίσο με

$$s = s_1 + s_2 = 12A = 2,4m$$

δ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι

$$y_\Lambda = \begin{cases} 0\text{m} & \gamma\iota\alpha \quad 0\text{s} \le t < 6\text{s} \\ 0{,}2\eta\mu\dfrac{\pi}{2}(t-6) \quad (\text{S.I.}) & \gamma\iota\alpha \quad 6\text{s} \le t < 10\text{s} \\ 0{,}4\eta\mu\dfrac{\pi}{2}(t-10) \quad (\text{S.I.}) & \gamma\iota\alpha \quad 10\text{s} \le t \end{cases}$$

Το διάγραμμα της απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο δείχνεται στο σχήμα.



ε. Το σημείο Σ, αφού ανήκει στη μεσοκάθετο, είναι σημείο ενίσχυσης και τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα, οπότε αρχίζει να ταλαντώνεται με πλάτος Α΄=2Α=0,4m. Για να διανύσει μήκος διαδρομής 12Α χρειάζεται να κάνει Ν=12Α/4·2Α=1,5 πλήρη ταλάντωση. Θα πρέπει μέχρι τη στιγμή t_3=14s να ταλαντωθεί για 1,5 περίοδο, δηλαδή για χρόνο 6s, δηλαδή τα κύματα πρέπει να φτάσουν στο Σ τη στιγμή t_Σ=8s και η απόσταση του Σ από τις πηγές θα είναι

$$r_\Sigma = \upsilon t_\Sigma = 0{,}5\text{m/s}\cdot 8\text{s} \Rightarrow r_\Sigma = 4\text{m}$$