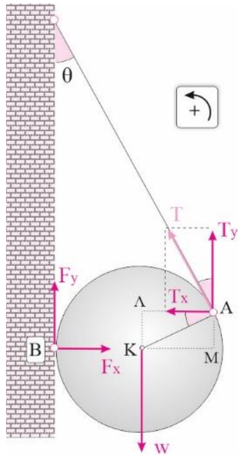
Θέματα Δ

Ροπή δύναμης

3.Δ.1



α. Στο διπλανό σχήμα δείχνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη μπάλα.

β. $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x = T\eta\mu\theta \ (1)$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y - w = 0 \Rightarrow F_y = w - T\frac{\sqrt{3}}{2} \ (2)$$

$$\Sigma\tau_{(B)} = 0 \Rightarrow -wR + T_x(K\Lambda) + T_y(R + (KM)) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{T}{4} + T\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = w \Rightarrow \frac{T}{4} + T\frac{3}{4} + T\frac{\sqrt{3}}{2} = w \Rightarrow$$

$$1{,}865T = w \Rightarrow T = 4N$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει F_x=2N.

Αντικαθιστώντας στη (2) προκύπτει

$$F_y = 7{,}46 - 2\sqrt{3} \Rightarrow F_y = 4N$$

γ. Αν η συνιστώσα F_y δημιουργείται μόνο από τη στατική τριβή, τότε

$$T_{\sigma\tau} = \mu N \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \mu F_x$$

άρα για να μην ολισθήσει πρέπει

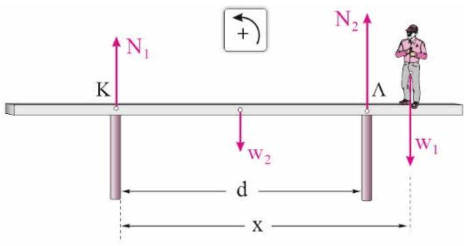
$$F_y \le \mu N \Rightarrow F_y \le \mu F_x \Rightarrow \mu \ge \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \mu \ge 2 \Rightarrow \mu_{min} = 2$$

δ. Αφού υπάρχει κολλητικό υλικό δεν υπάρχει τάση για ολίσθηση της μπάλας, οπότε δεν υπάρχει στατική τριβή και την κατακόρυφη συνιστώσα F_y τη δημιουργεί μόνο το κολλητικό υλικό

$$F_y = F_{\kappa o\lambda} \Rightarrow F_{\kappa o\lambda} = 4N$$

3.Δ.2

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα δείχνονται στο διπλανό σχήμα.



β. $\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_1 + N_2 - w_1 - w_2 = 0 \;\Rightarrow$

$N_1 + N_2 = 1050\,\text{N} \quad (1)$

$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \;\Rightarrow\; -w_2\dfrac{d}{2} + N_2 d - w_1 x = 0 \;\Rightarrow$

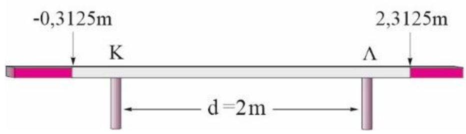
$N_2 = 125 + 400x \quad (2)$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει

$N_1 = 925 - 400x \quad (3)\,,\;\; -1\text{m} \le x \le 3\text{m}$

γ. Όταν η σανίδα θα αρχίσει να ανατρέπεται περιστρεφόμενη γύρω από το Λ, η δύναμη N_1 θα μηδενιστεί. Από την (3) έχουμε

$0 = 925 - 400x \;\Rightarrow\; x = 2{,}3125\text{m}$



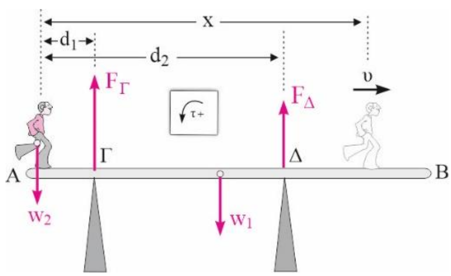
δ. Ο οικοδόμος αριστερά του Κ μπορεί να βρεθεί μέχρι εκείνη τη θέση που θα γίνει N_2=0N. Επομένως από τη (2) έχουμε

$0 = 125 + 400x \;\Rightarrow x = -0{,}3125\text{m}$

Εργάζεται με ασφάλεια στην περιοχή $-0{,}3125\text{m} < x < 2{,}3125\text{m}$.

Για την ίδια περιοχή τιμών ισχύουν και οι συναρτήσεις (2) και (3).

3.Δ.3



α. $\Sigma\tau_{(\Delta)} = w_2 \cdot d_2 + w_1\left(d_2 - \dfrac{d}{2}\right) - F_\Gamma(d_2 - d_1) = 0 \;\Rightarrow$

$F_\Gamma = \dfrac{5w_2 + w_1}{4} = 1.500\text{N}$

$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_\Gamma + F_\Delta - w_1 - w_2 = 0 \;\Rightarrow\; F_\Delta = 500\text{N}$

β. $\Sigma\tau'_{(\Delta)} = (w_1 + w_2)\cdot\left(d_2 - \dfrac{d}{2}\right) - F'_\Gamma(d_2 - d_1) = 0 \;\Rightarrow$

$F'_\Gamma = 500\text{N}$

$\Sigma F'_y = 0 \;\Rightarrow\; F_\Gamma + F_\Delta - w_1 - w_2 = 0 \;\Rightarrow\; F'_\Delta = 1.500\text{N}$

γ. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή και η εξίσωση θέσης δίνεται από τη σχέση

$x = \upsilon \cdot t = 0{,}5 \cdot t \ , \ 0s \le t \le t_{\alpha\nu\alpha\tau\rho}$

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -w_2 \cdot (x - d_2) + w_1\left(d_2 - \frac{d}{2}\right) - F_\Gamma (d_2 - d_1) = 0 \Rightarrow$$

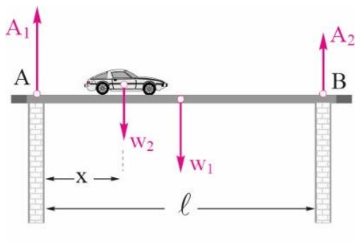
$$F_\Gamma = 1.500 - 250x \ , \ (SI) \Rightarrow F_\Gamma = 1.500 - 125t \ , \ (SI)$$

δ. Η ανατροπή γίνεται όταν F_Γ=0Ν, άρα

$$0 = 1.500 - 125t \Rightarrow t_{\alpha\nu\alpha\tau\rho} = 12s$$

3.Δ.4

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη γέφυρα δείχνονται στο διπλανό σχήμα. Η δύναμη που ασκεί το αυτοκίνητο στη γέφυρα ισούται σε μέτρο με το βάρος w_2 του αυτοκινήτου.



β. $\Sigma F = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow A_1 = w_1 + w_2 - A_2 \ (1)$

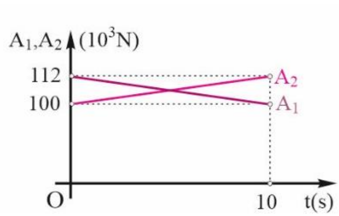
$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow A_2\ell - w_1\frac{\ell}{2} - w_2 x = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{w_1\frac{\ell}{2} + w_2 x}{\ell} \Rightarrow$$

$$A_2 = (10^5 + 120x)N$$

επειδή $x = \upsilon t = 10t \ , \ A_2 = 10^3(100 + 1{,}2t)N \ , \ 0s \le t \le 10s$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει

$$A_1 = 10^3(112 - 1{,}2t)N \quad 0s \le t \le 10s$$



γ. Οι αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων που ασκούν οι κολώνες στη γέφυρα σε συνάρτηση με τον χρόνο δείχνονται στο κοινό διάγραμμα του σχήματος.

3.Δ.5

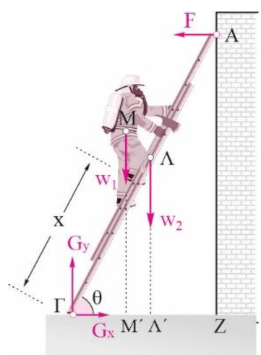
α. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow G_y - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow G_y = 1200N$

Η G_y είναι η συνηθισμένη δύναμη που συμβολίζουμε με Ν άρα G_y=N=1200N.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow G_x - F = 0 \Rightarrow G_x = F$$

Η G_x δημιουργείται από τη στατική τριβή και αφού έχει τη μέγιστη τιμή της είναι

$$G_x = T = \mu N \Rightarrow G_x = F = 480N$$



β. $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0 \;\Rightarrow\; F(AZ)-w_1(\Gamma M')-w_2(\Gamma\Lambda')=0 \;\Rightarrow$

$F\ell\eta\mu\theta - w_1 x\sigma\upsilon\nu\theta - w_2\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta=0 \Rightarrow x=3{,}6\varepsilon\varphi\theta-1{,}5$

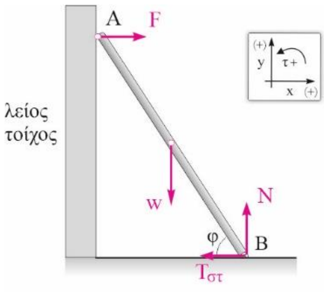
γ. $6=3{,}6\varepsilon\varphi\theta-1{,}5 \;\Rightarrow\; \varepsilon\varphi\theta=2{,}08\;,(\theta=64^{o})$

δ. Κινδυνεύει να ανατραπεί η σκάλα αν ο φορέας του βάρους του περάσει αριστερά από το Γ.

3.Δ.6

A. α. $\Sigma\tau_{(B)}=0 \;\Rightarrow -F\cdot L\cdot\eta\mu\varphi+w\cdot\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \;\Rightarrow$

$F=\frac{w}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} \;\Rightarrow\; F=20N$

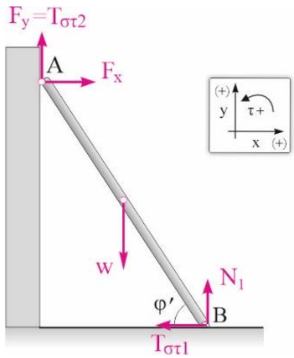


β. $T_{\sigma\tau max}=T_{o\rho}=\mu N$

$\Sigma F_y=0 \;\Rightarrow\; N-w=0 \;\Rightarrow\; N=40\sqrt{3}N$

$T_{\sigma\tau max}=0{,}5\cdot 40\sqrt{3}N=20\sqrt{3}N\;,\;(1)$

B. Ισορροπεί οριακά.



$T_{\sigma\tau 1}=T_{o\rho 1}=\mu N_1 \quad, T_{\sigma\tau 2}=F_y=T_{o\rho 2}=\mu F_x$

$\Sigma\tau_{(B)}=0 \;\Rightarrow$

$\Sigma\tau_{(B)}=0 \;\Rightarrow -F_x\cdot L\cdot\eta\mu\varphi'-F_y\cdot L\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi'+w\cdot\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi'=0 \;\Rightarrow$

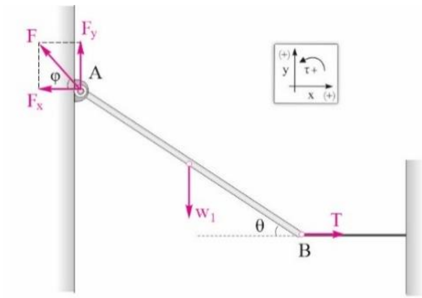
$\sigma\upsilon\nu\varphi'\left(\frac{w}{2}-F_y\right)=F_x\cdot\eta\mu\varphi' \;\Rightarrow\; \varepsilon\varphi'=\frac{\frac{w}{2}-F_y}{F_x}\;,\;(2)$

$\Sigma F_x=0 \;\Rightarrow\; F_x-T_{\sigma\tau 1}=0 \;\Rightarrow\; T_{\sigma\tau 1}=F_x=\mu N_1$

$\Sigma F_y=0 \;\Rightarrow\; N_1+F_y-w=0 \;\Rightarrow\; w=N_1+F_y=\frac{F_x}{\mu}+\mu F_x$

$$\xrightarrow{(2)}\;\varepsilon\varphi'=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{F_x}{\mu}+\mu F_x\right)-\mu F_x}{F_x}=\frac{1-\mu^2}{2\mu}\;\Rightarrow\;\varepsilon\varphi'=\frac{3}{4}$$

3.Δ.7

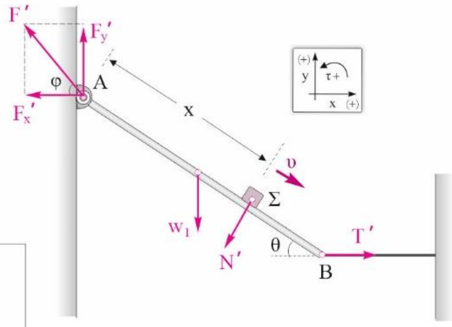


A. α. $\Sigma F_y=0 \;\Rightarrow\; F_y-w_1=0 \;\Rightarrow\; F_y=60N$

$\Sigma F_x=0 \;\Rightarrow\; T-F_x=0 \;\Rightarrow\; F_x=T$

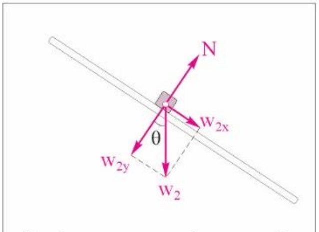
$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow T\cdot L\cdot\eta\mu\theta-w_1\cdot\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0 \;\Rightarrow$

$T=\frac{w_1}{2}=30N$

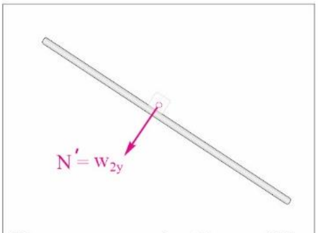


β. $F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_A = 30\sqrt{5}\,N$, $εφφ = \dfrac{F_y}{F_x} = 2$

Β. α. Η ράβδος ισορροπεί στροφικά. Η δύναμη που ασκεί το Σ σε αυτήν είναι η N′ η οποία είναι η αντίδραση της $N = w_{2y}$ που ασκείται στο Σ από τη ράβδο.



δυνάμεις που ασκούνται στο Σ



δύναμη που ασκεί το Σ στη ράβδο

$$Στ_{(A)} = 0 \Rightarrow$$
$$T' \cdot L \cdot ημθ - w_2 \cdot συνθ \cdot x - w_1 \cdot \frac{L}{2} \cdot συνθ = 0 \Rightarrow$$
$$10x + 48 = 1{,}6T' \Rightarrow$$
$$T' = 30 + 6{,}25x \text{ , (S.I), } 0m \le x \le 1{,}6m$$

β. Όταν T=37,5N, η (1) δίνει x=1,2m.

$$ΘΜΚΕ: \frac{1}{2}m_2υ^2 - 0 = m_2 g \cdot ημθ \cdot x \Rightarrow$$
$$υ = \sqrt{2gημθ \cdot x} = \sqrt{12\sqrt{2}}\,\frac{m}{s} = 2\sqrt{3\sqrt{2}}\,\frac{m}{s} \Rightarrow υ = 4\frac{m}{s}$$

3.Δ.8

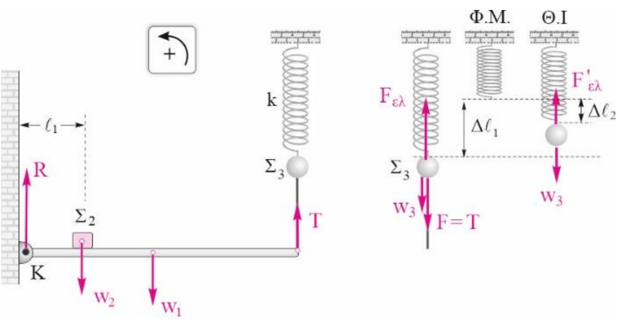
α. $Στ_{(K)} = 0 \Rightarrow$

$$-w_2\ell_1 - w_1\frac{\ell}{2} + T\ell = 0 \Rightarrow T = 15N$$

β. $Στ_{(K)} = -w_2\ell_1 - w_1\dfrac{\ell}{2} \Rightarrow$

$$Στ_{(K)} = -12Nm$$

γ. Από την ισορροπία των δυνάμεων στο σώμα $Σ_3$ βρίσκουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος στην αρχική και στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος



Αρχικά: $\Sigma F = 0 \Rightarrow m_3 g + T = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{m_3 g + T}{k} = 0{,}25m$

Νέα: $\Sigma F = 0 \Rightarrow m_3 g = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \dfrac{m_3 g}{k} = 0{,}1m$

Άρα, η νέα θέση ισορροπίας είναι 0,15m πάνω από την αρχική.

δ. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την παλιά στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος

$$\Theta MKE: K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_B + W_{F\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m_3\upsilon^2 = -m_3 g(\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2) + \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell_2^2 \Rightarrow \upsilon = 1{,}5m/s$$

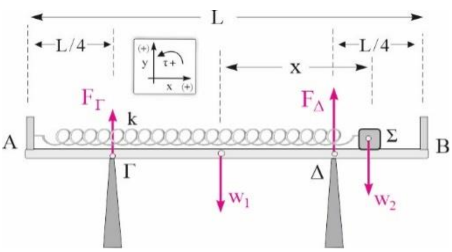
3.Δ.9

Α. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_\Gamma + F_\Delta - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow F_\Gamma + F_\Delta = 30N$, (1)

$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_\Delta \dfrac{3L}{4} - (w_1 + w_2)\cdot\dfrac{L}{2} + F_\Gamma \dfrac{L}{4} = 0 \Rightarrow F_\Gamma + 3F_\Delta = 60N$, (2)

Από τις (1) και (2) παίρνουμε F_Γ=15N, F_Δ=15N.

Β. Για να μην ανατρέπεται η σανίδα πρέπει $F_\Gamma \geq 0$.



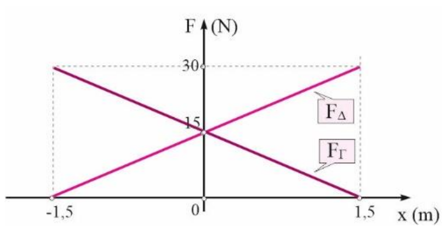
α. $\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow w_1 \dfrac{L}{4} - w_2\cdot\left(x - \dfrac{L}{4}\right) - F_\Gamma \cdot \dfrac{L}{2} = 0 \Rightarrow$

$F_\Gamma = 15 - 10x$, (S.I.) , $-1{,}5m \leq x \leq 1{,}5m$

Όταν F_Γ=0N , x_{max}=1,5m που αποτελεί και τη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σώματος.

β. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το σημείο εκτόξευσης μέχρι την ακραία θέση του σώματος

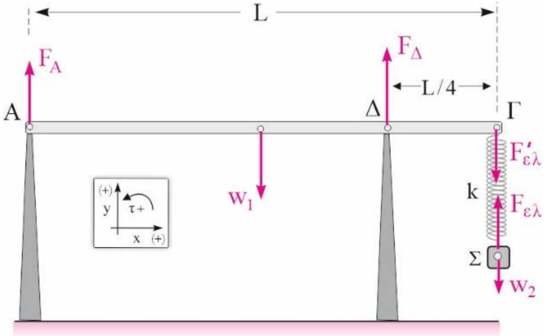
$$\Theta MKE: K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\lambda} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2\upsilon_o^2 = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow$$
$$\upsilon_o = \sqrt{\frac{k}{m_2}}x_{max} \Rightarrow \upsilon_o = 15m/s$$



γ. Από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_\Gamma + F_\Delta - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow$$
$$F_\Delta = 15 + 10x \text{ , (S.I.) , } -1{,}5m \leq x \leq 1{,}5m$$

3.Δ.10



A. $\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow w_1 \frac{L}{4} - F_A \frac{3L}{4} - w_2 \cdot \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow$

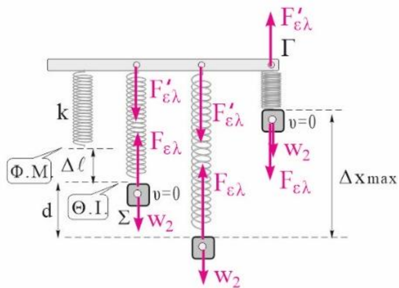
$F_A = 20N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_\Delta - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow$

$F_\Delta = 120N$

Β. α. Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ_2 βρίσκουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta\ell - m_2 g = 0 \Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_2 g}{\kappa} = 0{,}2m$$



Έστω ότι η μέγιστη μετατόπιση του σώματος είναι Δx_{max}, ε-φαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την κάτω μέχρι την πάνω ακραία θέση

$$0 = -m_2 g \Delta x_{max} + \frac{1}{2}k(d+\Delta\ell)^2 - \frac{1}{2}k\left[\Delta x_{max} - (d+\Delta\ell)\right]^2 \Rightarrow$$

$$-40\Delta x_{max} + 16 - 100\left[\Delta x_{max} - 0{,}4\right]^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-40\Delta x_{max} + 16 - 100\Delta x_{max}^2 - 16 + 80\Delta x_{max} = 0 \Rightarrow$$

$$-100\Delta x_{max}^2 + 40\Delta x_{max} = 0 \Rightarrow 40\Delta x_{max}(1 - 2{,}5\Delta x_{max}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta x_{max} = 0 (\alpha\pi o\rho.)$$

$$\Delta x_{max} = 0{,}4m$$

β. Η δύναμη από το στήριγμα Α γίνεται ελάχιστη, όταν το σώμα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση της κίνησής του, γιατί τότε η ροπή της δύναμης του ελατηρίου, που μεγιστοποιείται, τείνει να ανατρέψει τη σανίδα. Η δύναμη του ελατηρίου στη θέση αυτή είναι ίση με

$$F_{\varepsilon\lambda,max} = k(d+\Delta\ell) = 80N$$

Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας ως προς το σημείο Δ, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της δύ-ναμης από το στήριγμα Α

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -F_A \frac{3\ell}{4} + w_1 \frac{\ell}{4} - F_{\varepsilon\lambda,max} \frac{\ell}{4} = 0 \Rightarrow F_A = \frac{w_1 - F_{\varepsilon\lambda,max}}{3} = \frac{100N - 80N}{3} \Rightarrow F_A = \frac{20}{3}N$$

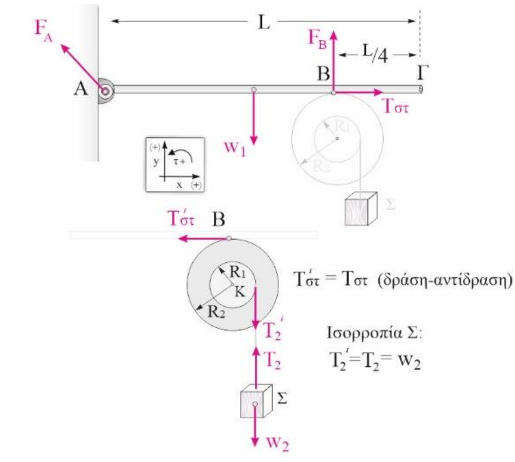
γ. Στην περίπτωση που η σανίδα οριακά δεν ανατρέπεται θα πρέπει η δύναμη F_A να γίνεται οριακά μηδενική

$$F_A = \frac{w_1 - F'_{\varepsilon\lambda,max}}{3} \Rightarrow w_1 = F'_{\varepsilon\lambda,max} \Rightarrow k(\Delta\ell + d') = w_1 \Rightarrow d' = \frac{w_1}{k} - \Delta\ell = 0{,}5m - 0{,}2m \Rightarrow d' = 0{,}3m$$

3.Δ.11

Α. α. Ράβδος:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_B \frac{3L}{4} - w_1 \frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; F_B = 20N$$



β. Τροχαλία:

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -w_2 \cdot R_1 + T'_{\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \;\Rightarrow\; T'_{\sigma\tau} = 5N$$

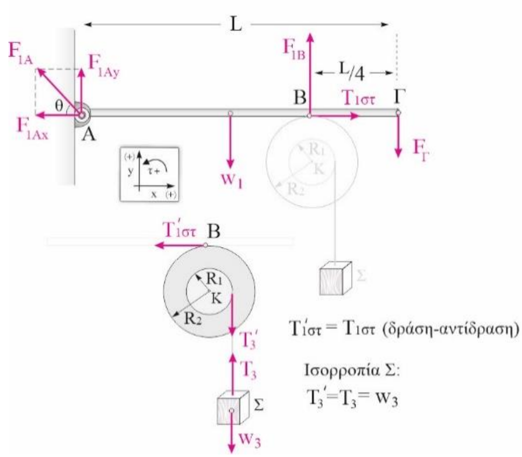
$$T_{o\rho} = T_{\sigma\tau} = \mu \cdot F_B \Rightarrow \mu = \frac{T_{\sigma\tau}}{F_B} = \frac{5N}{20N} = 0{,}25$$

Β. α. Ράβδος:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_{1B} \frac{3L}{4} - w_1 \frac{L}{2} - F_\Gamma \cdot L = 0 \;\Rightarrow$$

$$F_{1B} = 32N$$

$$T_{1\sigma\tau} = T_{1o\rho} = \mu \cdot F_{1B} \;\Rightarrow\; T_{1\sigma\tau} = 8N$$



Τροχαλία:

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \;\Rightarrow -w_3 \cdot R_1 + T'_{1\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$w_3 = 16N \;\Rightarrow\; m_3 = 1{,}6kg$$

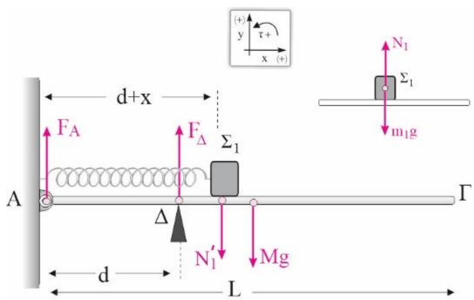
β. $\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; T_{1\sigma\tau} - F_{1Ax} = 0 \;\Rightarrow\; F_{1Ax} = 8N$

$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{1Ay} - w_1 + F_{1B} - F_\Gamma = 0 \Rightarrow F_{1Ay} = 7N$

$$F_{1A} = \sqrt{F_{1Ax}^2 + F_{1Ay}^2} = \sqrt{113}\,N \;,\; \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{1Ay}}{F_{1Ax}} = \frac{7}{8}$$

3.Δ.12

α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση ισορροπίας του σώματος μέχρι τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης

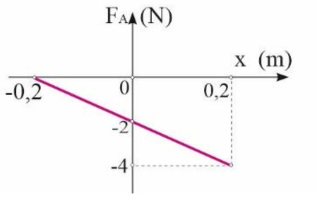


$$\text{ΘΜΚΕ}: K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_{F\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 = F \cdot s - \frac{1}{2}k \cdot x_{max}^2 = 0 \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{2F \cdot s}{k}} = 0{,}2m$$

β. Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας ως προς το σημείο Δ, που βρίσκεται το υποστήριγμα της σανίδας έχουμε

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -F_A d - Mg(\frac{\ell}{2} - d) - m_1 g x = 0 \Rightarrow$$
$$F_A = -2 - 10x \,(\text{S.I.}),\ -0,2\text{m} \le x \le 0,2\text{m}$$



Η F_A έχει φορά προς τα αρνητικά.

γ. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική μεταξύ σωμάτων με ίσες μάζες, άρα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων

$$\upsilon_1' = \upsilon_2 = -2\sqrt{3}\text{m/s}\ ,\quad \upsilon_2' = \upsilon_1$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος έχουμε

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2'$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 μετά την κρούση, K_1', είναι η μέγιστη δυνατή, αυτό συμβαίνει όταν το σώμα Σ_2 του μεταφέρει όλη την κινητική του ενέργεια, άρα

$K_2' = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = 0$ και επειδή έγινε ανταλλαγή ταχυτήτων $\upsilon_1 = 0\text{m/s}$.

Άρα, το σώμα Σ_1 πριν την κρούση είχε μηδενική ταχύτητα, συνεπώς βρισκόταν στη θέση της μέγιστης απομάκρυνσής του, $x_1 = x_{max} = 0,2\text{m}$

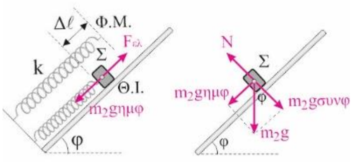
δ. Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κρούση είναι

$$\upsilon_1' = \upsilon_2 = -2\sqrt{3}\text{m/s}$$

και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_1' \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k \cdot x_1 \cdot \upsilon_1' \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 40\sqrt{3}\text{J/s}$$

3.Δ.13

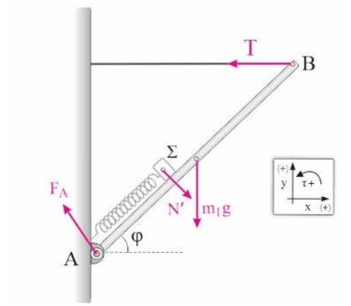


Α. Το Σ ισορροπεί συμπιέζοντας το ελατήριο

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow m_2 g \cdot ημφ = k \cdot \Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_2 g \cdot ημφ}{k} = 0{,}1\text{m}$$

Στη ράβδο ασκούνται:

- η τάση T από το νήμα,
- η δύναμη F_A από την άρθρωση (σχεδιασμένη τυχαία),
- το βάρος της ράβδου $m_1 g$,
- η δύναμη N΄από το Σ.



$$N' = N = m_2 g \cdot συνφ = 8\text{N}$$

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow$$

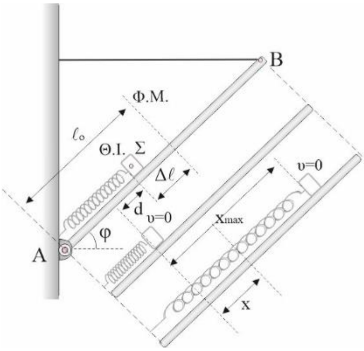
$$T \cdot L \cdot ημφ - m_1 g \frac{L}{2} \cdot συνφ - N'\left(\frac{L}{2} - \Delta\ell\right) = 0 \Rightarrow T = 75\text{N}$$

Β. α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση ελευθέρωσης του σώματος μέχρι τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης για να βρούμε το x_{max}

$$ΘΜΚΕ: K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_x} + W_{Fελ} \Rightarrow$$

$$0 = -mgημφx_{max} + \frac{1}{2}k(\Delta\ell + d)^2 - \frac{1}{2}k(x_{max} - \Delta\ell - d)^2 \Rightarrow$$

$$x_{max} = 0{,}3\text{m}$$



Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας της ράβδου ως προς το σημείο Α έχουμε

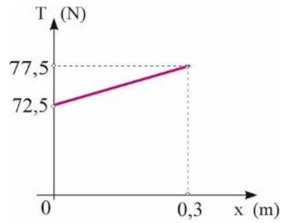
$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow$$

$$-m_2 gσυνφ(\ell_0 - \Delta\ell - d + x) - m_1 gσυνφ\frac{\ell}{2} + Tημφ\ell = 0 \Rightarrow$$

$$T = 72{,}5 + \frac{50}{3}x \text{ (S.I.)},\ 0\text{m} \le x \le 0{,}3\text{m}$$

Άρα έχουμε $T_{max} = 77{,}5\text{N}$, $T_{min} = 72{,}5\text{N}$

Επομένως η γραφική παράσταση της τάσης με το x είναι όπως στο σχήμα.



β. Η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη όταν περνά από τη θέση ισορροπίας του γιατί μέχρι εκείνη τη στιγμή εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση, ενώ αμέσως μετά η βαρυτική συνιστώσα w_x είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη του ελατηρίου με αποτέλεσμα το σώμα να ξεκινάει επιβραδυνόμενη κίνηση. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση που αφήσαμε ελεύθερο το σώμα μέχρι τη θέση ισορροπίας του

$$W_{w_x} + W_{F\varepsilon\lambda} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$$
$$-m_2 g\eta\mu\varphi d + \frac{1}{2}k(\Delta\ell + d)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$
$$-1\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}15 + \frac{1}{2}60\cdot 0{,}25^2 - \frac{1}{2}60\cdot 0{,}1^2 = \frac{1}{2}\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$
$$-0{,}9 + +1{,}875 - 0{,}3 = \frac{1}{2}\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$
$$\upsilon_{max} = \sqrt{1{,}35}\,m/s$$

γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μεγιστοποιείται στη θέση έναρξης της κίνησης του σώματος γιατί εκεί είναι μέγιστη η συσπείρωση του ελατηρίου.

$$\left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = |\Sigma F| = |F_{\varepsilon\lambda} - m_2 g\eta\mu\varphi| \Rightarrow \left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = |k(\Delta\ell + x) - m_2 g\eta\mu\varphi| \Rightarrow$$
$$\left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = |60\cdot 0{,}25N - 1\cdot 10\cdot 0{,}6N| \Rightarrow \left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = 9\frac{kgm}{s^2}$$

3.Δ.14

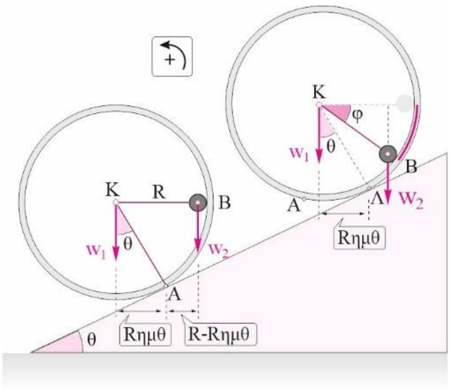
α. $\Sigma\tau_{(A)} = w_1 R\eta\mu\theta - w_2(R - R\eta\mu\theta) \Rightarrow$

$\Sigma\tau_{(A)} = w_2 R(2{,}5\eta\mu\theta - 1)$

β. Για να αρχίσει να ανέρχεται, πρέπει να στραφεί όπως οι δείκτες του ρολογιού, δηλαδή πρέπει

$$\Sigma\tau_{(A)} < 0 \Rightarrow 2{,}5\eta\mu\theta - 1 < 0 \Rightarrow \eta\mu\theta < 0{,}4$$

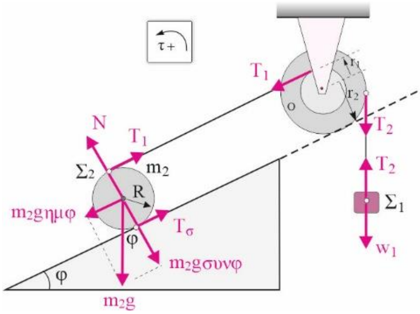
Για να αρχίσει να κατέρχεται, πρέπει να στραφεί αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, δηλαδή πρέπει $\eta\mu\theta > 0{,}4$.



γ. Επειδή 0,2<0,4 το κουτί θα αρχίσει να ανέρχεται και θα ισορροπήσει τελικά στη θέση που οι ροπές των w_1 και w_2 γίνουν ίσου μέτρου. Στη θέση αυτή το κουτί θα έχει μετατοπιστεί γωνιακά κατά φ

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow w_1 R\eta\mu\theta - w_2(R\sigma\upsilon\nu\varphi - R\eta\mu\theta) = 0 \Rightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\theta\left(\frac{w_1}{w_2} + 1\right) = 0{,}5 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}rad$$

3.Δ.15



α. Από την ισορροπία δυνάμεων για το σώμα Σ_1 έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = m_1 g = 30N$$

Από την περιστροφική ισορροπία της τροχαλίας ως προς το κέντρο της έχουμε

$$\Sigma\tau_O = 0 \Rightarrow T_1 r_1 - T_2 r_2 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{r_2}{r_1} T_2 = 60N$$

Η στατική τριβή στον κύλινδρο πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω για να εξασφαλίζει την περιστροφική ισορροπία του στερεού. Από την περιστροφική ισορροπία του κυλίνδρου ως προς το κέντρο του έχουμε

$$\Sigma\tau_K = 0 \Rightarrow -T_1 R + T_{\sigma\tau} R = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = T_1 = 60N$$

β. Από τον θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε

$$\Sigma F = m_2 \alpha_{cm} \Rightarrow m_2 g \eta\mu\varphi - T'_{\sigma\tau} = m_2 \alpha_{cm} \Rightarrow T'_{\sigma\tau} = m_2 g \eta\mu\varphi - m_2 \alpha_{cm} \Rightarrow$$
$$T'_{\sigma\tau} = 40N$$

Η ακτίνα του κυλίνδρου προκύπτει από τη γεωμετρία του σχήματος

$$2R = r_1 + r_2 \Rightarrow R = \frac{r_1 + r_2}{2} = 0{,}15m$$

Άρα η ροπή της στατικής τριβής είναι

$$\tau_T = T'_{\sigma\tau} R = 6Nm$$

γ. Το Σ_1 κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε από την κατακόρυφη μετατόπιση βρίσκουμε το χρονικό διάστημα κίνησης

$$y = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{\alpha_\Sigma}} = 1s$$

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t \Rightarrow \omega = \frac{\alpha_\Sigma}{r_2} \Delta t \Rightarrow \omega = 10 rad/s$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Σ_1 είναι

$$\frac{dK}{dt}=\Sigma F\cdot\upsilon\Rightarrow\frac{dK}{dt}=m_1\cdot\alpha_\Sigma\cdot\alpha_\Sigma\cdot t\Rightarrow\frac{dK}{dt}=24J/s$$

3.Δ.16

α. Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας της ράβδου ως προς την άρθρωση έχουμε

$$\Sigma\tau=0\Rightarrow N\frac{7\ell}{8}-Mg\sigma\upsilon\nu\vartheta\frac{\ell}{2}=0\Rightarrow N=\frac{4}{7}Mg\sigma\upsilon\nu\vartheta=6N$$

β. Από την ισορροπία του Σ_1 έχουμε

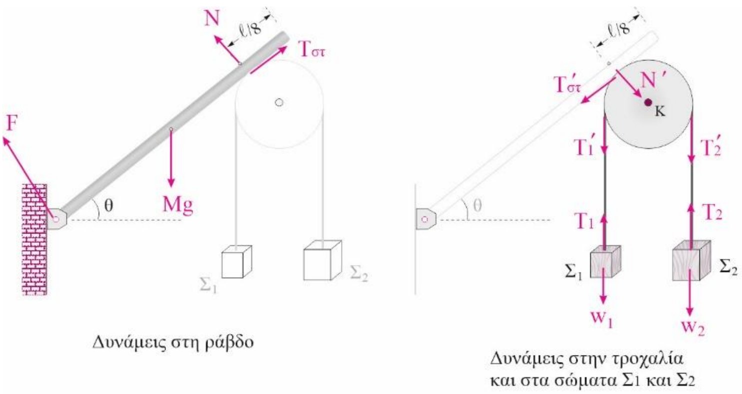
$$\Sigma F=0\Rightarrow T_1=m_1g=10N$$

Από την ισορροπία του Σ_2 έχουμε

$$\Sigma F=0\Rightarrow T_2=m_2g=12N$$

Τα σχοινιά είναι αβαρή και μη εκτατά, επομένως

$$T_1'=T_1,\ T_2'=T_2$$



Δυνάμεις στη ράβδο

Δυνάμεις στην τροχαλία και στα σώματα Σ1 και Σ2

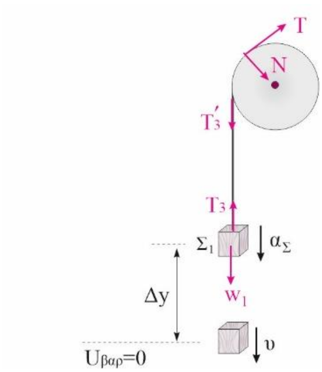
Οι $T_{\sigma\tau}$ και $T'_{\sigma\tau}$ έχουν σχέση δράσης αντίδρασης επομένως έχουν το ίδιο μέτρο.

Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας της τροχαλίας ως προς το κέντρο της έχουμε

$$\Sigma\tau_K=0\Rightarrow T'_{\sigma\tau}R+T_1'R-T_2'R=0\Rightarrow T_{\sigma\tau}=T_2-T_1=2N$$

γ. Όταν κοπεί το νήμα το σώμα Σ_1 κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, άρα έχουμε

$$\upsilon=\alpha_\Sigma\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{\upsilon}{\alpha_\Sigma}=2s$$



Από την εξίσωση της μετατόπισης

$$\Delta y=\frac{1}{2}\alpha_\Sigma\Delta t^2\Rightarrow\Delta y=4m$$

Η θερμότητα που εκλύεται είναι ίση με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολισθήσεως

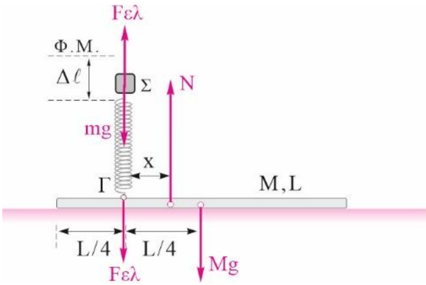
$$Q=|W_T|\Rightarrow Q=|T\cdot s|\Rightarrow Q=|\mu N\cdot \Delta y|=19,2J$$

δ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα του σώματος Σ_1 και της τροχαλίας από τη στιγμή που το νήμα κόβεται μέχρι το σώμα Σ_1 να έχει κατέλθει κατά 4m

$$Α.Δ.Ε.: U_{βαρ}=Q+K_{τροχ}+K_1\Rightarrow m_1 g\Delta y=Q+K_{τροχ}+\frac{1}{2}m_1 \upsilon^2\Rightarrow K_{τροχ}=12,8J$$

3.Δ.17

α. Από την ισορροπία του σώματος Σ_1 βρίσκουμε τη δύναμη του ελατηρίου και την αρχική συσπείρωσή του από το φυσικό του μήκος



$$\Sigma F=0\Rightarrow mg-F_{ελ}\Rightarrow F_{ελ}=10N$$
$$F_{ελ}=k\Delta\ell\Rightarrow \Delta\ell=0,1m$$

Το συμπιεσμένο ελατήριο ασκεί δυνάμεις προς τα έξω, οπότε ασκεί στη ράβδο κατακόρυφη δύναμη προς τα κάτω ίση με 10N. Από την ισορροπία δυνάμεων στη ράβδο έχουμε

$$\Sigma F_y=0\Rightarrow F_{ελ}+Mg=N\Rightarrow N=(M+m)g \quad (1)$$

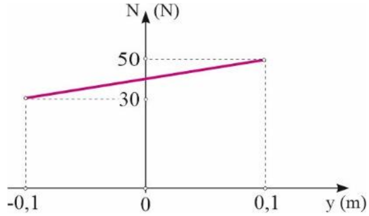
Από τη στροφική ισορροπία της ράβδου ως προς το σημείο Γ έχουμε

$$\Sigma\tau_{(Γ)}=0\Rightarrow Nx-Mg\frac{L}{4}=0\Rightarrow x=\frac{M}{4(M+m)}L\Rightarrow x=0,75m$$

β. Σε μία τυχαία απομάκρυνση y του Σ_1, κάτω από τη θέση ισορροπίας του, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο είναι

$$\Sigma F_y=0\Rightarrow F'_{ελ}+Mg-N'=0\Rightarrow N'=k(\Delta\ell+y)+Mg\Rightarrow$$
$$N'=40+100y,(SI)\quad -0,1m\le y\le 0,1m$$

Για y=0,1m έχουμε τη μέγιστη τιμή



$$N'_{max}=40N+100\cdot 0,1N\Rightarrow N'_{max}=50N$$

Για y=-0,1m έχουμε την ελάχιστη τιμή

$$N'_{min}=40N-100\cdot 0,1N\Rightarrow N'_{min}=30N$$

Η γραφική παράσταση του μέτρου της N' σε συνάρτηση με το y είναι όπως στο σχήμα.

γ. Αν συμβολίσουμε με x τον μοχλοβραχίονα της N΄ ως προς το Γ, τότε από τη στροφική ισορροπία της ράβδου ως προς το σημείο Γ έχουμε

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N'x - Mg\frac{L}{4} = 0 \Rightarrow (40+100y)x - Mg\frac{L}{4} = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{30}{40+100y} \Rightarrow x = \frac{3}{4+10y}(\text{S.I.}),\ -0{,}1\text{m} \le y \le 0{,}1\text{m}$$

Η απόσταση x γίνεται μέγιστη, όταν το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της τροχιάς του, y=-0,1m, οπότε έχουμε

$$x_{max} = \frac{3}{4-1}\text{m} = 1\text{m}$$

Η απόσταση x γίνεται ελάχιστη, όταν το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της τροχιάς του, y=0,1m, οπότε έχουμε

$$x_{min} = \frac{3}{4+1}\text{m} = 0{,}6\text{m}$$

δ. Για να χάσει η ράβδος την επαφή της με το δάπεδο, πρέπει η δύναμη της κάθετης στήριξης, N΄, να γίνει μηδενική. Για τις θέσεις του Σ_1 που η δύναμη του ελατηρίου στη ράβδο είναι προς τα κάτω, δεν μπορεί να χαθεί η επαφή της ράβδου με το έδαφος. Το χάσιμο επαφής συμβαίνει σε θέση που το Σ_1 βρίσκεται πάνω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, σε θέση που η δύναμη του ελατηρίου στη ράβδο γίνεται για πρώτη φορά αντίθετη της δύναμης του βάρους της

$$F_{\varepsilon\lambda} = Mg \Rightarrow k\Delta\ell' = Mg \Rightarrow \Delta\ell' = \frac{Mg}{k} = \frac{30}{100}\text{m} \Rightarrow \Delta\ell' = 0{,}3\text{m}$$

Άρα, το χάσιμο της επαφής της ράβδου με το δάπεδο γίνεται όταν το Σ_1 βρίσκεται σε απόσταση 0,3m πάνω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Επομένως για να χάνεται οριακά η επαφή θεωρούμε ότι σε αυτή τη θέση το σώμα Σ_1 φθάνει με μηδενική ταχύτητα.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση που έγινε η κρούση μέχρι τη θέση αυτή για να βρούμε την ταχύτητα υ_o του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση

$$\Theta.\text{M.K.E.}: K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\lambda} + W_B \Rightarrow -\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell'^2 - mg(\Delta\ell + \Delta\ell') \Rightarrow \upsilon_o = 4\text{m/s}$$

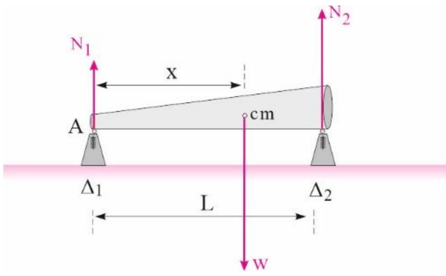
Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική μεταξύ σωμάτων με ίσες μάζες, άρα γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων, οπότε η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση είχε ταχύτητα με μέτρο $\upsilon = 4\text{m/s}$.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σώμα Σ_2 έχουμε

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow h = \frac{\upsilon^2}{2g} \Rightarrow h = 0{,}8m$$

3.Δ.18

α. Από τη μεταφορική ισορροπία του κορμού έχουμε για το βάρος w του κορμού



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = w = 3000N$$

Συμβολίζουμε με x την οριζόντια απόσταση του κέντρου μάζας από το αριστερό άκρο. Από τη στροφική ισορροπία του κορμού ως προς το αριστερό άκρο του κορμού έχουμε

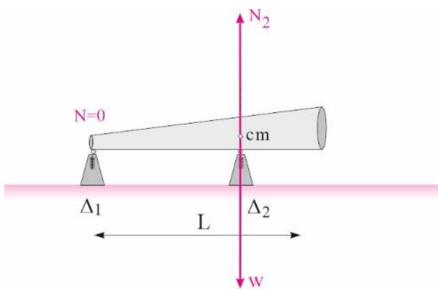
$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow w \cdot x - N_2 L = 0 \Rightarrow x = \frac{N_2 L}{w} = \frac{2L}{3} \Rightarrow x = 2m$$

β. Αν μεταφέρουμε προς τα αριστερά κατά d=0,5m το δυναμόμετρο Δ_2, τότε η στροφική ισορροπία του κορμού ως προς το αριστερό του άκρο δίνει

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow w \cdot x = N_2'(L-d) \Rightarrow N_2' = \frac{w \cdot x}{L-d} \Rightarrow N_2' = \frac{3000N \cdot 2m}{2{,}5m} N \Rightarrow N_2' = 2400N$$

Από τη μεταφορική ισορροπία παίρνουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1' + N_2' = w \Rightarrow N_1' = 600N$$

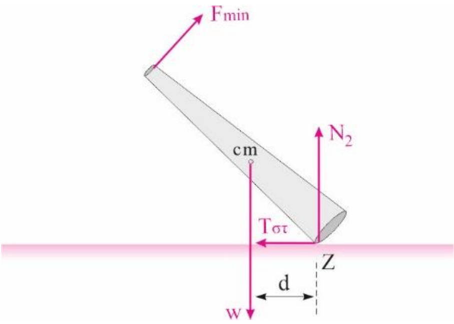


γ. Αν μεταφέρουμε το δυναμόμετρο Δ_2 κατά 1m προς τα αριστερά τότε αυτό θα τοποθετηθεί ακριβώς κάτω από το κέντρο μάζας του κορμού.

Στην περίπτωση αυτή το βάρος του κορμού το φέρει όλο το δυναμόμετρο Δ_2 και ο κορμός ισορροπεί με το δυναμόμετρο Δ_1 να έχει ένδειξη 0N.

δ. Για να είναι η δύναμη F ελάχιστη θα πρέπει να ασκείται στο άκρο του κορμού και ο φορέας της να είναι κάθετος σε αυτόν. Από τη στροφική ισορροπία του κορμού παίρνοντας τη συνισταμένη των ροπών ως προς το Z έχουμε

$$\Sigma\tau_Z = 0 \Rightarrow F_{min}\ell - w \cdot d = 0 \Rightarrow F_{min} = \frac{w \cdot d}{\ell} \quad (1)$$



Επειδή θεωρούμε τον κορμό αμελητέου πάχους έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{d}{1m} \Rightarrow d = 0{,}5m$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε

$$F_{min} = \frac{w \cdot d}{\ell} = \frac{3000 \cdot 0{,}5}{3} N \Rightarrow F_{min} = 500N$$

ε. Αναλύουμε την F σε δύο κάθετες συνιστώσες και από τις συνθήκες μεταφορικής ισορροπίας έ-χουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_{\sigma\tau} \Rightarrow F_{min}\eta\mu 60^O = T_{\sigma\tau} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 250\sqrt{3}N$$

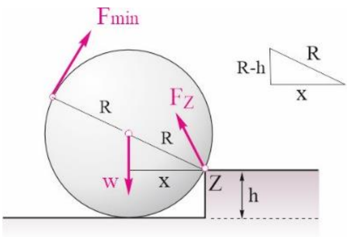
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + N_2 = w \Rightarrow N_2 = w - F\sigma\upsilon\nu 60^o \Rightarrow N_2 = 2750N$$

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής είναι

$$T_{\sigma\tau} \le \mu_s N_2 \Rightarrow \mu_{s,min} = \frac{T_{\sigma\tau}}{N_2} \Rightarrow \mu_{s,min} = \frac{\sqrt{3}}{11}$$

3.Δ.19

α. Η υπερπήδηση του σκαλοπατιού γίνεται με περιστροφή του τροχού γύρω από την αιχμή του σκα-λοπατιού (σημείο Ζ). Για να είναι ελάχιστη η δύναμη, θα πρέπει ο μοχλοβραχίονάς της να είναι μέ-γιστος, οπότε το σημείο εφαρμογής της δύναμης πρέπει να είναι αντιδιαμετρικό του σημείου Ζ κάθε χρονική στιγμή της κίνησης του τροχού. Άρα, θα ασκήσουμε τη δύναμη διαρκώς εφαπτομενικά στον τροχό και καθώς ο τροχός ανυψώνεται, ο μοχλοβραχίονας της δύναμης ως προς το σημείο Ζ θα πα-ραμένει 2R.



Τη στιγμή που ο τροχός ξεκινά να ανεβαίνει το σκαλοπάτι, η δύ-ναμη της κάθετης στήριξης από το δάπεδο μηδενίζεται και οι δυνάμεις που προκαλούν ροπή ως προς το σημείο Ζ είναι μόνο η F και το w. Άρα, η συνθήκη περιστροφής του τροχού είναι

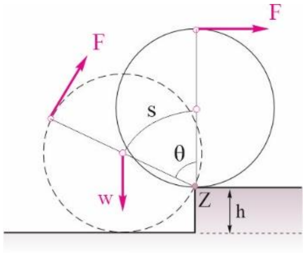
$$|\tau_{F(Z)}| \ge |\tau_{W(Z)}| \Rightarrow F \cdot 2R \ge w \cdot x \Rightarrow F \ge \frac{w \cdot x}{2R} \Rightarrow F_{min} = \frac{w \cdot x}{2R} \quad (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε τον αρχικό μοχλοβραχίονα x του βάρους του τροχού

$$R^2 = x^2 + (R-h)^2 \Rightarrow R^2 = x^2 + R^2 + h^2 - 2Rh \Rightarrow x^2 = 2Rh - h^2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{h(2R-h)} = \sqrt{0,5\cdot(2-0,5)}m = \sqrt{\frac{3}{4}}m \Rightarrow x = 0,5\sqrt{3}m$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε $F_{min} = 15\sqrt{3}N$.



β. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_B \ \ (2)$$

Για να ανέβει ο τροχός στο σκαλοπάτι πρέπει ο μοχλοβραχίονας της F να στραφεί κατά

$$συνθ = \frac{R-h}{R} \Rightarrow θ = \frac{π}{3}rad$$

Το σημείο εφαρμογής της δύναμης F διαγράφει τόξο κύκλου ακτίνας ίσης με 2R γύρω από το σημείο Z, άρα το τόξο που διαγράφει το σημείο εφαρμογής της F είναι

$$s = 2R\cdot θ = \frac{2π}{3}m$$

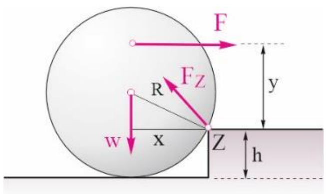
Η F είναι διαρκώς ίδιας φοράς με τη μετατόπιση, οπότε το έργο της είναι

$$W_F = F\cdot s = 15\sqrt{3}N\cdot\frac{2π}{3}m \Rightarrow W_F = 10\sqrt{3}πJ$$

Η κατακόρυφη ανύψωση του κέντρου μάζας του τροχού στο ίδιο διάστημα είναι h, άρα το έργο του βάρους του τροχού στην ίδια μετατόπιση είναι

$$W_B = -m\cdot g\cdot h = -30J$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει $K_{τελ} = 24,4J$.



γ. Τη στιγμή που ο τροχός ξεκινά να ανεβαίνει το σκαλοπάτι, η δύναμη της κάθετης στήριξης από το δάπεδο μηδενίζεται και οι δυνάμεις που προκαλούν ροπή ως προς το σημείο Z είναι μόνο η F και το w. Άρα, η συνθήκη περιστροφής του τροχού είναι

$$\left|\tau_{F(Z)}\right| \geq \left|\tau_{W(Z)}\right| \Rightarrow F\cdot(y-h) \geq w\cdot x \Rightarrow F \geq \frac{w\cdot x}{y-h} \Rightarrow$$

$$F_{min} = \frac{w\cdot x}{y-h} = \frac{60N\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m}{1,5m-0,5m} \Rightarrow F_{min} = 30\sqrt{3}N$$

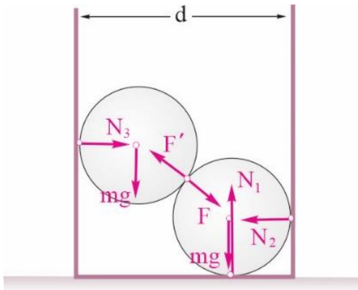
δ. Η δύναμη F είναι συνεχώς οριζόντια, άρα παράγει έργο μόνο στην αντίστοιχη οριζόντια μετατόπιση του τροχού που είναι ίση με x, οπότε έχουμε

$$W_F = F\cdot x = 30\sqrt{3}N\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m \Rightarrow W_F = 45J$$

$$\Theta.M.K.E.: K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_B \Rightarrow K_{τελ} = W_F - Bh \Rightarrow K_{τελ} = 45J - 30J = 15J$$

3.Δ.20

α. Οι δυνάμεις ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους είναι δυνάμεις δράσης - αντίδρασης και έχουν ίσα μέτρα. Αναλύουμε τη δύναμη F σε δύο κάθετες συνιστώσες. Από τη μεταφορική ισορροπία των κυλίνδρων έχουμε:



- για τον πάνω κύλινδρο:

$$N_3 = F_x \quad (1)$$
$$mg = F_y \quad (2)$$

- για τον κάτω κύλινδρο:

$$N_2 = F_x \quad (3)$$
$$N_1 = mg + F_y \quad (4)$$

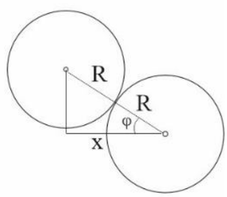
Από (2), (4) έχουμε

$$N_1 = 2mg = 20N$$

Από (1), (3) έχουμε

$$N_2 = N_3$$

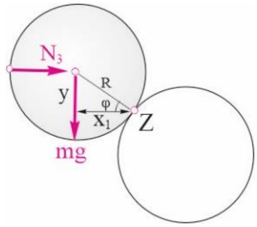
β. Από τη γεωμετρία του προβλήματος έχουμε



$$\left.\begin{cases} x + 2R = d \\ d = (0,2 + 0,1\sqrt{3})m \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 0,1\sqrt{3}m$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^{o}$$

Ο μοχλοβραχίονας του βάρους του κυλίνδρου ως προς το σημείο επαφής των κυλίνδρων είναι



$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x_1}{R} \Rightarrow x_1 = R\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,05\sqrt{3}m$$

Ο μοχλοβραχίονας της N_3 ως προς το σημείο επαφής των δύο κυλίνδρων είναι

$$R^2 = y^2 + x_1^2 \Rightarrow y = 0,05m$$

Η συνθήκη στροφικής ισορροπίας του πάνω κυλίνδρου ως προς το σημείο επαφής των δύο κυλίνδρων, Ζ, δίνει

$$\Sigma\tau_{(Z)} = 0 \Rightarrow -N_3 y + mgx_1 = 0 \Rightarrow N_3 = mg\sqrt{3} \Rightarrow N_3 = 10\sqrt{3}N$$

$$N_2 = N_3 = 10\sqrt{3}N$$

γ. Η δύναμη που ασκείται μεταξύ των κυλίνδρων έχει συνιστώσες

$$F_x = mg\sqrt{3} = 10\sqrt{3}N$$
$$F_y = mg = 10N$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 20N$$

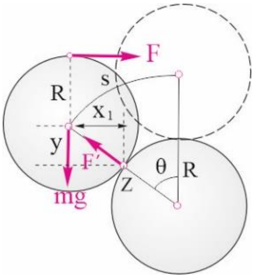
με διεύθυνση αυτή της διακέντρου των δύο κυλίνδρων.

δ. Εάν η ροπή της δύναμης που θα ασκήσουμε αρχικά είναι μεγαλύτερη από την αρχική ροπή του βάρους, τότε ο κύλινδρος θα ξεκινήσει να κινείται. Καθώς ο πάνω κύλινδρος στρέφεται ο μοχλοβραχίονας του βάρους μικραίνει, ενώ ο μοχλοβραχίονας της F μεγαλώνει, οπότε η κίνηση του κυλίνδρου θα συνεχιστεί απρόσκοπτα. Παίρνουμε τις αρχικές ροπές των δυνάμεων αυτών ως προς το σημείο επαφής των δύο κυλίνδρων, οπότε το μέτρο της ελάχιστης δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε είναι

$$\left|\tau_{F(A)}\right| \geq \left|\tau_{W(A)}\right| \Rightarrow F(R+y) \geq w \cdot x_1 \Rightarrow F_{min} = \frac{w \cdot x_1}{R+y} \Rightarrow F_{min} = \frac{10N \cdot 0,05\sqrt{3}m}{(0,1+0,05)}N \Rightarrow$$

$$F_{min} = \frac{10\sqrt{3}}{3}N$$

ε. Το κέντρο μάζας του πάνω κυλίνδρου διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας 2R και κατά τη μετακίνησή του διαγράφει γωνία θ=60°, οπότε το μήκος του τόξου που διανύει είναι



$$s = 2R \cdot \theta \Rightarrow s = 2R \cdot \frac{\pi}{3}$$

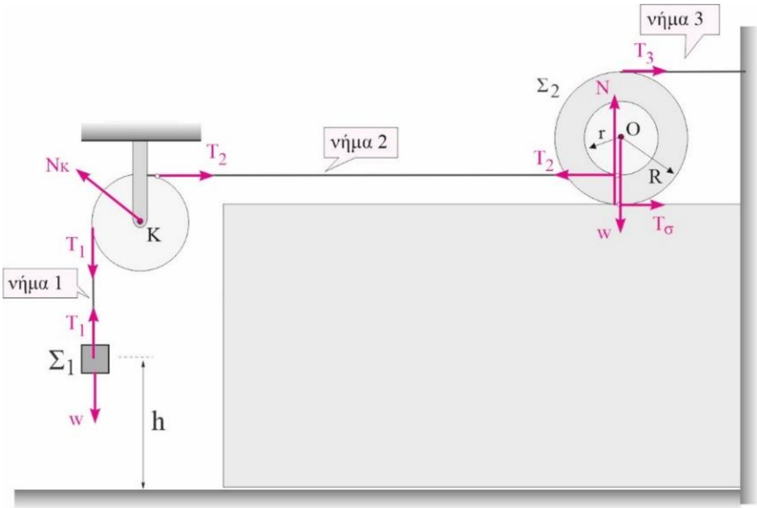
Άρα ο αριθμός των περιστροφών του είναι

$$N = \frac{s}{2\pi R} = \frac{2R \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{1}{3}$$

3.Δ.21

α. Πριν κοπεί το νήμα όλο το σύστημα ισορροπεί. Από την ισορροπία του Σ_1 βρίσκουμε την τάση T_1 του νήματος (1)

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow m_1 g = T_1 \Rightarrow$$
$$T_1 = 8N$$



Έστω ότι η τροχαλία έχει ακτίνα d. Από την ισορροπία της βρίσκουμε την τάση T_2 του νήματος (2)

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1 d = T_2 d \Rightarrow$$
$$T_2 = T_1 = 8N$$

Στο καρούλι ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της w, η δύναμη στήριξης N, η τάση T_2 του νήματος (2), η τάση T_3 του νήματος (3) και η στατική τριβή T_σ, προς τα δεξιά, για να εξασφαλιστεί η στροφική ισορροπία.

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα x είναι

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_\sigma + T_3 = T_2 \Rightarrow T_\sigma + T_3 = 8N \Rightarrow T_3 = 8N - T_\sigma \quad (1)$$

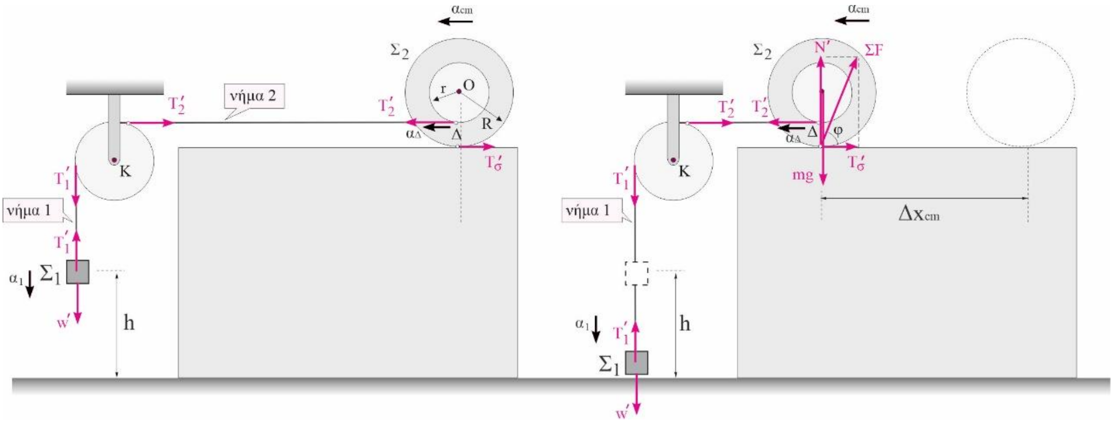
Από τη στροφική ισορροπία ως προς το κέντρο του καρουλιού και τη σχέση (1) είναι

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_\sigma R = T_2 r + T_3 R \Rightarrow 2T_\sigma = T_2 + 2T_3 \Rightarrow$$
$$2T_\sigma = 8N + 2(8N - T_\sigma) \Rightarrow T_\sigma = 6N$$

β. Η επιτάχυνση του σώματος $Σ_1$ είναι ίση με τη συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου Δ του καρουλιού, στο οποίο δένεται το νήμα (2), καθώς τα νήματα είναι αβαρή και μη ελαστικά, δηλαδή $α_1=α_Δ$ (2).

Η ταχύτητα του σημείου Δ, καθώς το καρούλι κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση, είναι

$$υ_Δ = υ_{cm} - υ_{γρ,Δ} = ωR - ωr = ω\left(R - \frac{R}{2}\right) \Rightarrow υ_Δ = ω\frac{R}{2}$$



Η επιτάχυνση του σημείου Δ είναι

$$υ_Δ = ω\frac{R}{2} \Rightarrow \frac{dυ_Δ}{dt} = \frac{R}{2}\frac{dω}{dt} \Rightarrow α_Δ = α_{γων}\frac{R}{2} \quad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) δίνουν

$$α_1 = α_Δ = α_{γων}\frac{R}{2} \Rightarrow α_{γων} = \frac{2α_1}{R} = 10 rad/s^2$$

Το σώμα $Σ_1$ για να φτάσει στο έδαφος χρειάζεται χρόνο t_1 που προκύπτει από την επιταχυνόμενη κίνησή του προς τα κάτω

$$h = \frac{1}{2}α_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{α_1}} \Rightarrow t_1 = 1s$$

Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτάει το καρούλι δίνεται από τη σχέση της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης του καρουλιού

$$ω = α_{γων} t_1 \Rightarrow ω = 10 rad/s$$

γ. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του καρουλιού είναι

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 1m/s^2$$

Η μετατόπιση του καρουλιού σε χρόνο t_1 είναι

$$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t_1^2 = 0{,}5m$$

Το σημείο Δ του νήματος διανύει απόσταση ίση με

$$\Delta x_{\Delta} = \frac{1}{2}\alpha_{\Delta} t_1^2 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_{\Delta} = 0{,}25m$$

Άρα, το μήκος του νήματος L, που τυλίχτηκε στο καρούλι είναι

$$L = \Delta x_{cm} - \Delta x_{\Delta} = 0{,}25m$$

δ. Από την επιτάχυνση του σώματος Σ_1 θα υπολογίσουμε την τάση του νήματος (1)

$$\Sigma F_1 = m_1\alpha_1 \Rightarrow m_1 g - T_1' = m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1' = m_1 g - m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1' = 7{,}6N$$

Εφόσον η συνολική ροπή των τάσεων στην τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι μηδέν, βρίσκουμε την τάση του νήματος (2)

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1' d = T_2' d \Rightarrow T_2' = T_1' = 7{,}6N$$

Από την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του καρουλιού θα υπολογίσουμε τη στατική τριβή που δέχεται

$$\Sigma F_x = m_2\alpha_{cm} \Rightarrow T_2' - T_\sigma' = m_2\alpha_{cm} \Rightarrow T_\sigma' = T_2' - m_2\alpha_{cm} \Rightarrow T_\sigma' = 4{,}6N$$

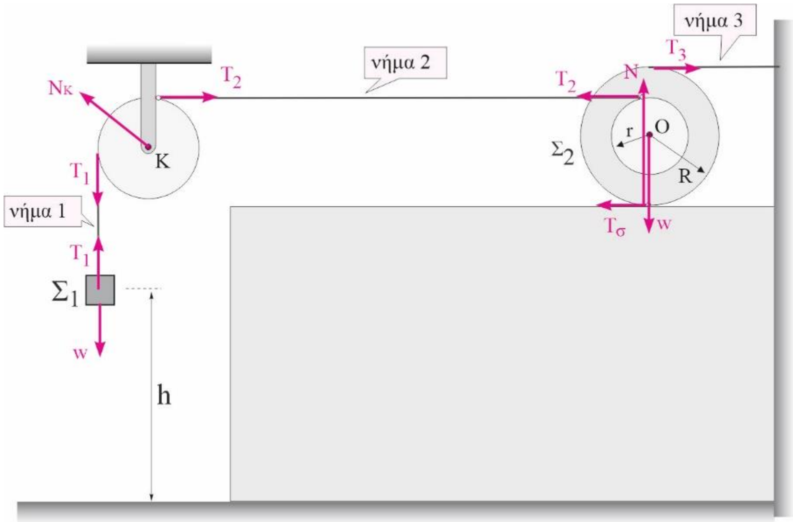
Άρα η στατική τριβή συνεχίζει να έχει φορά προς τα δεξιά και η συνολική δύναμη που δέχεται το καρούλι από το οριζόντιο δάπεδο είναι η συνισταμένη της δύναμης στήριξης και της στατικής τριβής και έχει μέτρο

$$\Sigma F = \sqrt{T_\sigma'^2 + N^2} = \sqrt{T_\sigma'^2 + (m_2 g)^2} = \sqrt{(4{,}6N)^2 + (30N)^2} \Rightarrow \Sigma F = \sqrt{921{,}16}N$$

και σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ με

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{N}{T_\sigma'} = \frac{30}{4{,}6} = \frac{150}{23}$$

3.Δ.22



α. Πριν κοπεί το νήμα όλο το σύστημα ισορροπεί. Από την ισορροπία του Σ_1 βρίσκουμε την τάση T_1 του νήματος (1)

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow m_1 g = T_1 \Rightarrow$$
$$T_1 = 10\text{N}$$

Έστω ότι η τροχαλία έχει ακτίνα d. Από την ισορροπία της βρίσκουμε την τάση T_2 του νήματος (2)

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1 d = T_2 d \Rightarrow$$
$$T_2 = T_1 = 10\text{N}$$

Στο καρούλι ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της w, η δύναμη στήριξης N, η τάση T_2 του νήματος (2), η τάση T_3 του νήματος (3) και η στατική τριβή T_σ, για να εξασφαλιστεί η στροφική ισορροπία. Θεωρούμε αυθαίρετα ότι η τριβή έχει φορά προς τα αριστερά.

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα x είναι

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_\sigma + T_2 = T_3 \Rightarrow T_3 = T_\sigma + 10\text{N} \qquad (1)$$

Από τη στροφική ισορροπία ως προς το κέντρο του καρουλιού και τη σχέση (1) είναι

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_2 r - T_3 R - T_\sigma R = 0 \Rightarrow T_2 - 2T_3 - 2T_\sigma = 0 \ \Rightarrow 2T_\sigma = T_2 - 2T_3 \Rightarrow$$
$$2T_\sigma = 10\text{N} - 2\cdot(10\text{N} + T_\sigma) \Rightarrow 4T_\sigma = -10\text{N} \Rightarrow T_\sigma = -2{,}5\text{N}$$

Άρα η στατική τριβή έχει μέτρο 2,5N και φορά προς τα δεξιά.

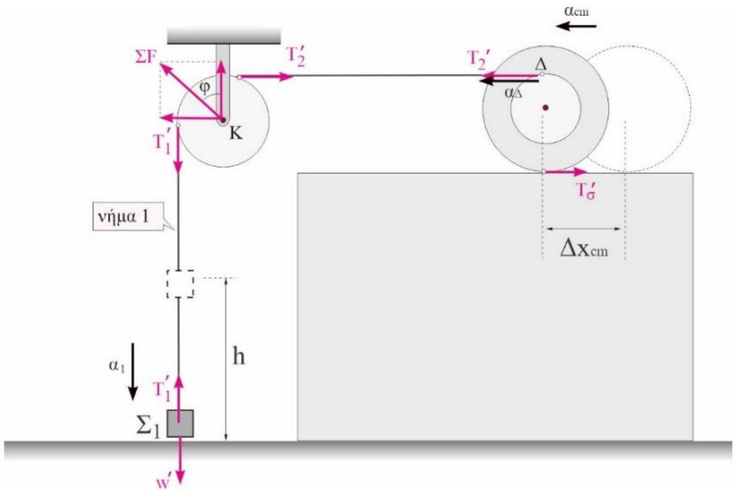
β. Η ταχύτητα του σημείου Δ, καθώς το καρούλι κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση, είναι

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega\frac{R}{2} \Rightarrow$$
$$\upsilon_\Delta = \frac{3}{2}\upsilon_{cm}$$

Η επιτάχυνση του σημείου Δ είναι

$$\upsilon_\Delta = \frac{3}{2}\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{d\upsilon_\Delta}{dt} = \frac{3}{2}\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \Rightarrow$$

$$\alpha_\Delta = \frac{3}{2}\alpha_{cm} \quad (2)$$



Η μετατόπιση του καρουλιού σε χρόνο t είναι $\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2$.

Το σημείο Δ του νήματος διανύει απόσταση ίση με $\Delta x_\Delta = \frac{1}{2}\alpha_\Delta t^2$.

Άρα, από το μήκος του νήματος L, που ξετυλίχτηκε και τη σχέση (2) υπολογίζουμε την α_{cm}

$$L = \Delta x_\Delta - \Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_\Delta t^2 - \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\alpha_{cm}t^2 - \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{4}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{4L}{t^2} = 2\mathrm{m/s^2}$$

γ. Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι ίση με τη συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου Δ του καρουλιού, στο οποίο δένεται το νήμα (2), καθώς τα νήματα είναι αβαρή και μη ελαστικά, δηλαδή

$$\alpha_1 = \alpha_\Delta = \frac{3}{2}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_1 = 3\mathrm{m/s^2}$$

Το σώμα Σ_1 απέχει h από το έδαφος, που προκύπτει από την επιταχυνόμενη κίνησή του προς τα κάτω

$$h = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \Rightarrow h = 1{,}5\mathrm{m}$$

δ. Η γωνιακή επιτάχυνση του καρουλιού είναι

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = 20\mathrm{rad/s^2}$$

Η γωνία που διαγράφει το καρούλι δίνεται από τη σχέση της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης του καρουλιού

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \Rightarrow \theta = 10\mathrm{rad}$$

και οι στροφές που διέγραψε είναι

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ στροφές}$$

ε. Από την επιτάχυνση του σώματος $Σ_1$ θα υπολογίσουμε την τάση του νήματος (1)

$$\Sigma F_1 = m_1\alpha_1 \Rightarrow m_1 g - T_1' = m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1' = m_1 g - m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1' = 7N$$

Εφόσον η συνολική ροπή των τάσεων στην τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι μηδέν, βρίσκουμε την τάση του νήματος (2)

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1'd = T_2'd \Rightarrow T_2' = T_1' = 7N$$

Άρα η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από την άρθρωσή της είναι αντίθετη από τη συνολική δύναμη των δύο τάσεων και επειδή αυτές είναι κάθετες, έχει μέτρο

$$F = \sqrt{T_1'^2 + T_2'^2} \Rightarrow F = 7\sqrt{2}N$$

και σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ ίση με

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{T_1'}{T_2'} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^0$$