# Θέματα Δ

## 2.Δ.1

A. $\Delta\theta = N \cdot 2\pi = \frac{9}{\pi} 2\pi = 18\,\text{rad}$

$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2 \cdot \Delta\vartheta}{t_1^{\,2}} = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

B α. $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t = 6\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

β. $\upsilon_\Sigma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = 2\omega R \Rightarrow \upsilon_\Sigma = 4{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$

γ $\upsilon_{cm} = \omega R = 2{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}$

δ. $s = \theta \cdot R = 18\,\text{rad} \cdot 0{,}4\text{m} \Rightarrow s = 7{,}2\text{m}$

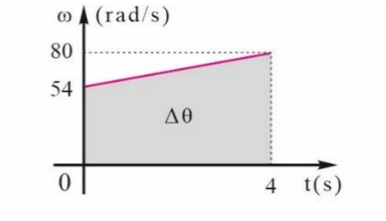
ε. $\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^{\,2} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 7{,}2\text{m}$

στ. $\Delta x_\Sigma = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma t^{\,2} = \frac{1}{2} 2\alpha_{cm} t^{\,2} \Rightarrow \Delta x_\Sigma = 14{,}4\text{m}$

## 2.Δ.2

α. $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega - \omega_o}{\Delta t} \Rightarrow \omega_o = \omega - \alpha_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega_o = 54\,\text{rad/s}$

β. $\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega = 54 + 6{,}5t$ (S.I.), $0\text{s} \le t \le 4\text{s}$




γ. $\Delta\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 268\,\text{rad}$

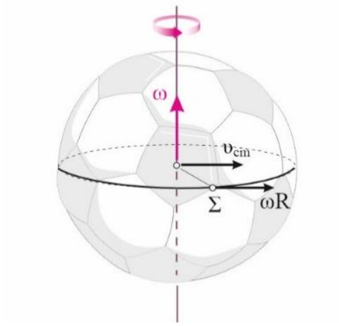
δ. $\Delta s = R\,\Delta\theta \Rightarrow \Delta s = 53{,}6\text{ m}$

## 2.Δ.3

α. $\Delta x = \upsilon_{cm}\Delta t \Rightarrow \Delta t = 0{,}6\text{ s}$

β. $\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\theta = 6\pi\text{ rad}$

Άρα $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 3$ στροφές γ. Η μπάλα εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μέγιστη ταχύτητα έχει το σημείο της μπάλας που βρίσκεται στο επίπεδο του ισημερινού της και έχει ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης ωR που είναι παράλληλη με την $\upsilon_{cm}$. Αυτό είναι το σημείο Σ για το οποίο ισχύει



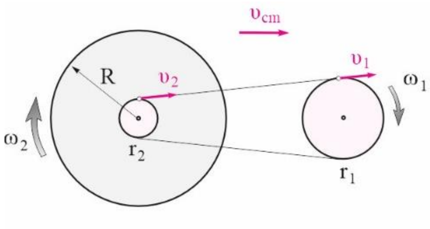

$$\upsilon_\Sigma = \upsilon_{cm} + \omega R \Rightarrow \upsilon_\Sigma = 33{,}5\ m/s$$

δ. $\alpha_\kappa = \omega^2 R = 100\pi^2 \dfrac{0{,}35}{\pi}\dfrac{m}{s^2} = 35\pi \dfrac{m}{s^2}$

## 2.Δ.4

Α α. $\omega_1 = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{1} rad/s \Rightarrow \omega_1 = 2\pi\ rad/s$

β. Οι δύο δίσκοι συνδέονται μέσω της αλυσίδας, επομένως έχουν ίδιες γραμμικές ταχύτητες λόγω στροφικής κίνησης




$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = 8\pi\ rad/s$$

γ. Η γραμμική ταχύτητα της αλυσίδας είναι

$$\upsilon_1 = \omega_1 r_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 0{,}24\pi\ m/s$$

Η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης του τροχού είναι

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega_2 R \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = 3{,}2\pi\ m/s$$

Όμως $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho}$ άρα $\upsilon_{cm} = 3{,}2\pi\ m/s$

Β. α. $f_1' = 2Hz$ , $\omega_1' = 2\pi f_1' = 4\pi\ rad/s$

$$\alpha'_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta\omega_1'}{\Delta t} = \frac{\omega_1' - \omega_1}{\Delta t} = \pi\ rad/s^2$$

β. $\upsilon_1' = \omega_1' r_1 \Rightarrow \upsilon_1' = 0{,}48\pi\ m/s$

$$\alpha_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} = \alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon_1}{\Delta t} = \frac{\upsilon_1' - \upsilon_1}{\Delta t} = 0{,}12\pi\ m/s^2$$

γ. Μετά την επιτάχυνση του ποδηλάτου, ο πίσω τροχός έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega_2' = \omega_1' \frac{r_1}{r_2} = 16\pi rad/s$$

Η γραμμική ταχύτητα του τροχού μετά την επιτάχυνση του ποδηλάτου είναι

$$\upsilon'_{\gamma\rho} = \omega'_2 R \Rightarrow \upsilon'_{\gamma\rho} = 6{,}4\pi \text{ m/s}$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του ποδηλάτου είναι ίση με αυτήν του κέντρου μάζας του τροχού, η οποία είναι ίση με τη γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του τροχού

$$\alpha_{cm} = \frac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t} = \frac{\upsilon'_{\gamma\rho} - \upsilon_{\gamma\rho}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{cm} = 1{,}6\pi \text{ m/s}^2$$

## 2.Δ.5

α. $\alpha_{\gamma\omega\nu1} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R_1} = 1\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \ \alpha_{\gamma\omega\nu2} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R_2} = 4\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

β. $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm} = 3\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

γ. $\alpha_{\kappa1} = \omega_1^2 R_1 = (\alpha_{\gamma\omega\nu1} \cdot t_1)^2 \cdot R_1 \Rightarrow \alpha_{\kappa1} = 9\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

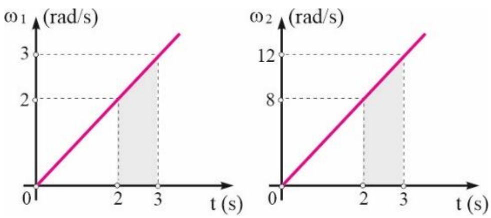
$\alpha_{\kappa2} = \omega_2^2 R_2 = (\alpha_{\gamma\omega\nu2} \cdot t_1)^2 \cdot R_2 \Rightarrow \alpha_{\kappa2} = 36\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

δ. $\Delta\theta_1 \leftrightarrow \varepsilon\mu\beta. = \left(\dfrac{2+3}{2}\right) 1 \text{ rad} = 2{,}5 \text{rad}$

$N_1 = \dfrac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \dfrac{1{,}25}{\pi} \sigma\tau\rho.$

$\Delta\theta_2 \leftrightarrow \varepsilon\mu\beta. = \left(\dfrac{8+12}{2}\right) 1 \text{ rad} = 10 \text{rad}$

$N_2 = \dfrac{\Delta\theta_2}{2\pi} = \dfrac{5}{\pi} \sigma\tau\rho.$




## 2.Δ.6

α. Ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$N = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} = \frac{60\text{rad} - 20\text{rad}}{2\pi\text{rad} / \sigma\tau\rho o\varphi\acute{\eta}} \Rightarrow N = \frac{20}{\pi} \text{ στροφές}$$

β. Στο χρονικό διάστημα από 0 - 4s το στερεό κάνει ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή του επιτάχυνση είναι

$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}\Delta t^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{2\Delta\theta_1}{\Delta t^2} = 2{,}5\text{rad/s}^2$$

Η γωνιακή του ταχύτητα στο τέλος του διαστήματος αυτού είναι

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}\Delta t = 10\text{rad/s}$$

Στο χρονικό διάστημα από 4 έως 8s η γωνιακή ταχύτητα του στερεού είναι σταθερή και ίση με 10rad/s. Βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση του στερεού στο χρονικό διάστημα από 8 έως 10s

$$\Delta\theta_3 = \frac{\omega_1^2}{2\left|\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\right|} \Rightarrow \left|\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\right| = \frac{\omega_1^2}{2\Delta\theta_3} = \frac{(10\text{rad/s})^2}{2(70\text{rad} - 60\text{rad})} \Rightarrow \left|\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\right| = 5\text{rad/s}^2$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα είναι

$$\omega = \omega_0 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\right|\Delta t = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}} - 5\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 1\text{s} \Rightarrow \omega = 5\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ. Βρίσκουμε τη γωνιακή μετατόπιση στο χρονικό διάστημα από 8 έως 9s

$$\Delta\theta_{8s\to 9s} = \omega_o\Delta t - \frac{1}{2}\left|\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\right|\Delta t^2 = 7{,}5\text{rad}$$

Από το σχήμα έχουμε τη γωνιακή μετατόπιση στο διάστημα από 8 έως 10s

$$\Delta\theta_{8s\to 10s} = 70\text{rad} - 60\text{rad} = 10\text{rad}$$

Άρα ο αριθμός των περιστροφών στο τελευταίο δευτερόλεπτο είναι

$$N = \frac{\Delta\theta_{8s\to 10s} - \Delta\theta_{8s\to 9s}}{2\pi} = \frac{1{,}25}{\pi} \text{ στροφές}$$

δ. Στο χρονικό διάστημα από 0s - 4s η γωνιακή ταχύτητα του στερεού δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}\Delta t = 2{,}5t \text{ (S.I.)}$$

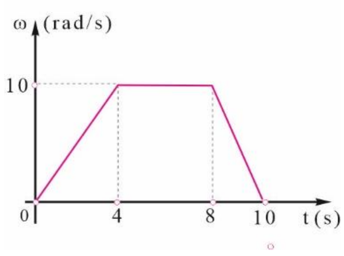
στο χρονικό διάστημα από 4s μέχρι 8s η γωνιακή ταχύτητα του στερεού είναι ω=10rad/s, ενώ στο χρονικό διάστημα από 8s έως 10s ισχύει

$$\omega = \omega_1 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\right|\Delta t = \omega_1 - 5\Delta t \Rightarrow \omega = 10 - 5(t-8)(\text{SI}) \Rightarrow \omega = 50 - 5t \quad (\text{SI})$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\begin{cases} \omega = 2{,}5t,\ 0s < t \le 4s \\ \omega = 10\text{rad/s},\ 4s < t \le 8s \\ \omega = 50 - 5t,\ 8s < t \le 10s \end{cases}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



## 2.Δ.7

α. Από το εμβαδό στο διάγραμμα γωνιακής επιτάχυνσης - χρόνου βρίσκουμε τη μεταβολή στη γωνιακή ταχύτητα του στερεού στο διάστημα από 0s έως 5s

$$\Delta\omega = 5\cdot(-10)\,\mathrm{rad/s} = -50\,\mathrm{rad/s}$$

Άρα, η γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη χρονική στιγμή $t_1$=5s είναι

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \Rightarrow \omega = 10\,\mathrm{rad/s}$$

β. Στο χρονικό διάστημα από 5s έως 8s το στερεό κάνει ομαλή στροφική κίνηση με $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$. Η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή $t_2$=9s είναι

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t \Rightarrow \omega = (10 + 2\cdot 1)\,\mathrm{rad/s} \Rightarrow \omega = 12\,\mathrm{rad/s}$$

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου είναι

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = 12^2\cdot 0{,}1\ \ (\mathrm{SI}) \Rightarrow \alpha_\kappa = 14{,}4\,\mathrm{m/s^2}$$

γ. Οι χρονικές εξισώσεις της γωνιακής ταχύτητας είναι:

στο χρονικό διάστημα από 0s - 5s

$$\omega = \omega_o - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}\right|\cdot t \Rightarrow \omega = 60 - 10t\ \ (\mathrm{SI}),\qquad 0s < t \le 5s$$

και η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού έχει μέτρο

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 6 - t\ (\mathrm{SI})$$

- στο χρονικό διάστημα από 5s μέχρι 8s η γωνιακή ταχύτητα του στερεού είναι ω=10rad/s, άρα η γραμμική ταχύτητα στα σημεία της περιφέρειας είναι $\upsilon_{\gamma\rho}$=ωR=1m/s.
- στο χρονικό διάστημα από 8s έως 10s ισχύει

$$\omega = \omega_{\alpha\rho\chi} + \alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\Delta t \Rightarrow \omega = 10 + 2(t-8)(\mathrm{SI}) \Rightarrow \omega = -6 + 2t(\mathrm{SI})$$

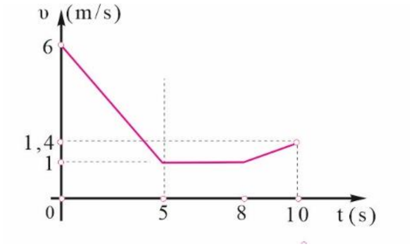
και η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού είναι

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = -0{,}6 + 0{,}2t(\mathrm{SI})$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\begin{cases} \upsilon_{\gamma\rho} = 6 - t,\ 0s < t \le 5s \\ \upsilon_{\gamma\rho} = 1m/s,\ 5s < t \le 8s \\ \upsilon_{\gamma\rho} = -0,6 + 0,2t,\ 8s < t \le 10s \end{cases}$$

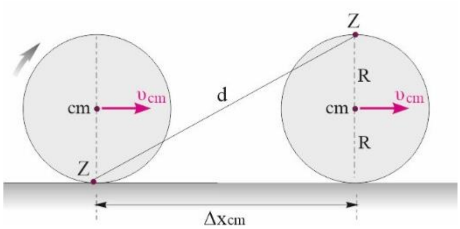
Άρα, η γραφική της παράσταση με τον χρόνο είναι η ακόλουθη.




δ. Στο χρονικό διάστημα από 5s μέχρι 8s η γωνιακή ταχύτητα του στερεού είναι σταθερή ω=10rad/s, άρα η περίοδος περιστροφής του τροχού είναι σταθερή και ίση με

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10}s$$

Σε χρονικό διάστημα $\frac{\pi}{10}s$ , που αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, ο τροχός έχει διαγράψει μισή περιστροφή και το σημείο Ζ θα βρεθεί στο αντιδιαμετρικό σημείο του τροχού δηλαδή στο ανώτερο σημείο του, όπως δείχνεται στο σχήμα.




Στο ίδιο χρονικό διάστημα η οριζόντια μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού είναι

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm}\Delta t = \omega R \Delta t \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{\pi}{10}m$$

Άρα η μετατόπιση του σημείου Ζ είναι

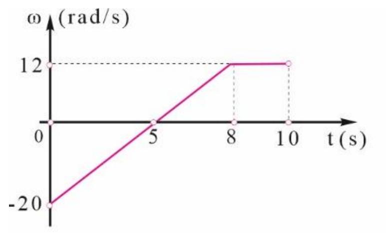
$$d = \sqrt{\Delta x_{cm}^2 + (2R)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{10}m\right)^2 + \left(\frac{2}{10}m\right)^2} \Rightarrow d = 0,1\sqrt{14}m$$

## 2.Δ.8

α. Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} \omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu} t = -20 + 4t \quad (S.I.),\ 0s \le t \le 8s \\ \omega = 12rad/s,\ 8s \le t \le 10s \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



β. Η χρονική εξίσωση της γωνίας στροφής από 0s έως 8s είναι

$$\theta_1 = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = -20t + 2t^2 (\text{S.I.}),\ 0s \le t \le 8s \quad (1)$$

Για το χρονικό διάστημα από 8s έως 10s αφού το στερεό κάνει ομαλή στροφική κίνηση με 12rad/s, η γωνία στροφής θα έχει τη μορφή

$$\theta = 12(t-8) + \theta_o (\text{SI}), \quad 8s < t \le 10s \quad (2)$$

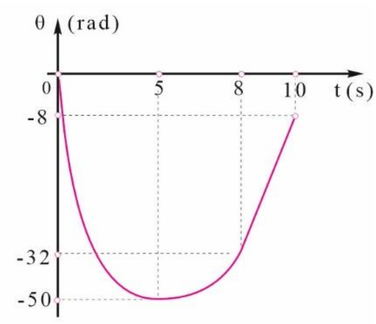
Για να βρούμε τη $\theta_o$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1), t=8s, προκύπτει $\theta_0 = -32\text{rad}$,

οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε

$$\theta = 12t - 128\ (\text{SI}),\ 8s < t \le 10s$$

Άρα συνολικά έχουμε

$$\begin{cases} \theta = -20t + 2t^2 (\text{S.I.}),\ 0s \le t \le 8s \\ \theta = 12t - 128 (\text{S.I.}),\ 8s < t \le 10s \end{cases}$$




Η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

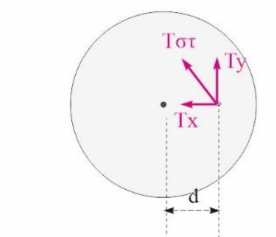
γ. Τη χρονική στιγμή t=7s ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα

$\omega = -20 + 4 \cdot 7 (\text{S.I.}) \Rightarrow \omega = 8\text{rad/s}$ και το σώμα γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega d = 1{,}6\text{m/s}$.

Την ίδια χρονική στιγμή ο δίσκος έχει γωνιακή επιτάχυνση $4\text{rad/s}^2$ και

το σώμα γραμμική επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} d = 0{,}8\text{m/s}^2$.

δ. Το σημειακό σώμα βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και διαγράφει κυκλική τροχιά με αυξανόμενο μέτρο ταχύτητας. Για τη διαγραφή κυκλικής τροχιάς απαιτείται κεντρομόλος δύναμη την οποία εξασφαλίζει η στατική τριβή, επίσης για την αύξηση του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας απαιτείται δύναμη ίδιας φοράς με τη γραμμική ταχύτητα. Άρα, η στατική τριβή εμφανίζεται με δύο κάθετες συνιστώσες, μία κάθετη στη γραμμική ταχύτητα, $T_x$, (κεντρομόλος δύναμη) και μία παράλληλη στη γραμμική ταχύτητα, $T_y$ (επιταχύνουσα δύναμη). Το μέτρο κάθε συνιστώσας είναι




$$T_x = F_\kappa \Rightarrow T_x = \frac{m\upsilon_{\gamma\rho}^2}{d} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}6^2}{0{,}2}\text{N} \Rightarrow T_x = 5{,}12\text{N}$$

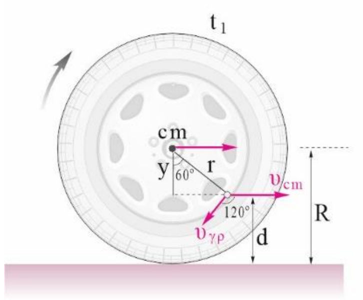
$$T_y = \Sigma F_y = m\alpha_{\gamma\rho} \Rightarrow T_y = 0,4 \cdot 0,8N \Rightarrow T_y = 0,32N$$

Άρα, το μέτρο της στατικής τριβής τη ζητούμενη χρονική στιγμή είναι

$$T_{\sigma\tau} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{(5,12N)^2 + (0,32N)^2} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \sqrt{(16 \cdot 0,32N)^2 + (0,32N)^2} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 0,32\sqrt{257}\,N$$

## 2.Δ.9

α. Το σημείο Ζ πρέπει να βρίσκεται κάτω από την οριζόντια διάμετρο του τροχού, ώστε η γωνία που σχηματίζει η γραμμική και η μεταφορική του ταχύτητα να είναι μεγαλύτερη των 90°.




Από το ορθογώνιο τρίγωνο που δημιουργείται όταν η γωνία είναι 120° έχουμε

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{y}{r} \Rightarrow y = \frac{r}{2} = 0,1m$$

Άρα το Ζ απέχει από το έδαφος d που είναι

$$d = R - y = 0,3m$$

Το σημείο Ζ έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega r = \omega\frac{R}{2} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = \frac{\upsilon_{cm}}{2}$.

Από τη σύνθεση των ταχυτήτων του σημείου Ζ έχουμε

$$\upsilon_{o\lambda(Z)} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu 120^\circ} \Rightarrow \upsilon_{o\lambda(Z)} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \frac{\upsilon_{cm}^2}{4} + 2\upsilon_{cm}\frac{\upsilon_{cm}}{2}\sigma\upsilon\nu 120^\circ} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{o\lambda(Z)} = \sqrt{\frac{5\upsilon_{cm}^2}{4} - \frac{\upsilon_{cm}^2}{2}} \Rightarrow \upsilon_{o\lambda(Z)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_{cm}$$

β. Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού είναι

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{0-40}{4}rad/s^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -10rad/s^2$$

Η γραμμική (επιτρόχιος) επιτάχυνση του σημείου Ζ έχει σταθερό μέτρο και είναι ίση με

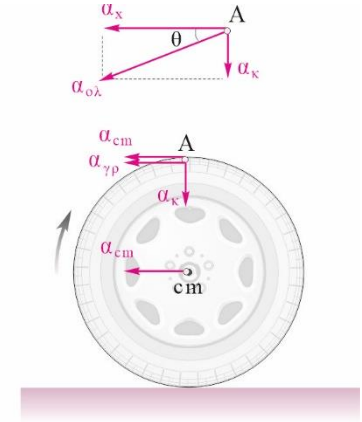
$$\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho(Z)} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho(Z)} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{R}{2} \Rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho(Z)} = -2m/s^2$$

άρα το μέτρο της είναι $2m/s^2$.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Ζ έχει μέτρο

$$\alpha_{\kappa(Z)} = \omega_o^2 r \Rightarrow \alpha_{\kappa(Z)} = \omega_o^2 \frac{R}{2} = 320 m/s^2$$

γ. Η κεντρομόλος επιτάχυνση του ανώτερου σημείου του τροχού έχει μέτρο




$$\alpha_{\kappa(A)} = \omega^2 R \Rightarrow \alpha_{\kappa(A)} = 6 m/s^2$$

Η συνισταμένη των επιταχύνσεων στην εφαπτομενική διεύθυνση είναι

$$\alpha_x = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} \Rightarrow \alpha_x = \alpha_{\gamma\omega\nu} R + \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow$$

$$\alpha_x = 2\alpha_{\gamma\omega\nu} R = -8 m/s^2$$

Άρα η επιτάχυνση του ανώτερου σημείου του τροχού έχει μέτρο

$$\alpha_{o\lambda} = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_\kappa^2} = 10 m/s^2$$

και σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση που έχει

$$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\alpha_\kappa}{\alpha_x} = 0,75$$

δ. Η γωνιακή μετατόπιση του τροχού μέχρι να σταματήσει να περιστρέφεται είναι

$$\Delta\theta = \frac{\omega_o^2}{2|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$$

οπότε ο αριθμός των περιστροφών του τροχού είναι

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_o^2}{4\pi|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} \Rightarrow N = \frac{1600}{40\pi} \Rightarrow N = 12,73$$

Άρα, οι ολοκληρωμένες περιστροφές του τροχού είναι N΄=12 περιστροφές.

## 2.Δ.10

α. Η γωνιακή ταχύτητα του καρουλιού είναι

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow N \cdot 2\pi = \omega\Delta t \Rightarrow \omega = \frac{5 \cdot 2\pi rad}{\pi s} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, $\upsilon_{cm} = \omega r$, άρα από τη μετατόπιση του κέντρου μάζας έχουμε

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm}\Delta t = \omega r \Delta t \Rightarrow r = \frac{\Delta x_{cm}}{\omega \Delta t} = \frac{\pi m}{10\frac{rad}{s}\cdot \pi s} \Rightarrow r = 0{,}1m$$

β. Για την ταχύτητα του σημείου Θ ισχύει ότι

$$\vec{\upsilon}_{\Theta} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_{\Theta} = \omega r - \omega R$$

Άρα έχουμε

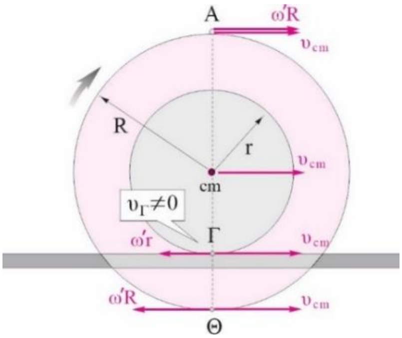
$$\vec{\upsilon}_{\Theta} = -\frac{2}{3}\vec{\upsilon}_{cm} \Rightarrow \omega r - \omega R = -\frac{2}{3}\upsilon_{cm} \Rightarrow \omega r - \omega R = -\frac{2}{3}\omega r \Rightarrow \frac{5}{3}\omega r = \omega R \Rightarrow R = \frac{5}{3}r = \frac{1}{6}m$$

γ. $\upsilon_{A} = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \omega r + \omega R = \omega r + \frac{5}{3}\omega r \Rightarrow \upsilon_{A} = \frac{8}{3}\upsilon_{cm} = \frac{8}{3}\frac{m}{s}$

δ. Για να γίνει $\upsilon_{\theta}$=0m/s θα πρέπει

$$\vec{\upsilon}_{\Theta} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon} \Rightarrow \left|\vec{\upsilon}_{\Theta}\right| = \left|\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}\right| - \left|\vec{\upsilon}_{cm}\right| \Rightarrow \omega' R = \upsilon_{cm} \Rightarrow$$

$$\omega' = \frac{\upsilon_{cm}}{R} \Rightarrow \omega' = 6\frac{rad}{s}$$




Αφού ο κύλινδρος έχει ίδια $\upsilon_{cm}$ με μικρότερη γωνιακή ταχύτητα, αυτό σημαίνει ότι μετατοπίζεται περισσότερο από το μήκος του τόξου που διαγράφει η περιφέρειά του. Αυτό συμβαίνει όταν ο κύλινδρος ολισθαίνει ταυτόχρονα με την περιστροφή. Άρα, έχουμε μία σύνθετη κίνηση όπου το στερεό στρέφεται και ταυτόχρονα μεταφέρεται ολισθαίνοντας.

ε. Για να γίνει μισή περιστροφή απαιτείται χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega'} = \frac{\pi}{6}s$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το κέντρο μάζας έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm}\Delta t = 1\frac{m}{s}\frac{\pi}{6}s \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{\pi}{6}m$$

Η μετατόπιση του σημείου Σ είναι

$$d_\Sigma = \Delta x_{cm} - 2R = \frac{\pi}{6}m - \frac{2}{6}m \Rightarrow d_\Sigma = 0{,}19m$$

2.Δ.11

α. Βρίσκουμε το μήκος του πλάγιου επιπέδου

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_{cm}} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{h}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{1,2m}{0,6} = 2m$$

Μεταφορικά το κέντρο του τροχού κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα άρα ισχύει

$$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}\Delta t^2 \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2\Delta x_{cm}}{\Delta t^2} = 4m/s^2$$

Επομένως η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου είναι

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\Delta t = 4m/s$$

Επειδή ο τροχός κάνει κύλιση, για τη γωνιακή του ταχύτητα στην κορυφή του επιπέδου έχουμε

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r} = 40rad/s$$

β. Η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού είναι

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{r} = 40rad/s^2$$

Η γωνιακή μετατόπιση του στερεού κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου είναι

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 20rad$$

Το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε είναι

$$\Delta\ell = r\Delta\theta = 2m$$

γ. Στη διάρκεια της σύνθετης κίνησης στον αέρα, ο δίσκος κάνει στροφική κίνηση με σταθερό ω. Στον δίσκο ενεργεί μόνο η δύναμη της βαρύτητας. Η εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας των κινήσεων μας επιτρέπει να μελετήσουμε την κίνηση του δίσκου στον αέρα.

Στον οριζόντιο άξονα xx΄ ο τροχός δεν δέχεται δύναμη, άρα θα κάνει ΕΟΚ με σταθερή ταχύτητα μέτρου

$$\upsilon_{cm,x} = \upsilon_{cm}\sigma\upsilon\nu\varphi = 3,2m/s$$

Στον κατακόρυφο άξονα ο τροχός κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου ίσου με g, αφού σε αυτόν ενεργεί μόνο η δύναμη της βαρύτητας. Η αρχική ταχύτητα που έχει στον κατακόρυφο άξονα είναι

$$\upsilon_{cm,y} = \upsilon_{cm}\eta\mu\varphi = 2,4m/s$$

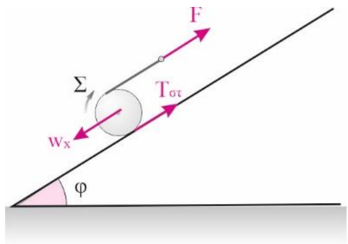
Από τις εξισώσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$h_{max} = \frac{\upsilon_{cm,y}^2}{2g} \Rightarrow h_{max} = 0,288m$$

Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του δίσκου το ανώτερο σημείο του δίσκου έχει δύο ταχύτητες τη $\upsilon_{cm,x}$ και τη γραμμική ταχύτητα λόγω της περιστροφής, οπότε

$$\upsilon_{\Sigma} = \upsilon_{cm,x} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm}\sigma\upsilon\nu\varphi + \omega r \Rightarrow \upsilon_{\Sigma} = 7,2m/s$$

δ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι όπως στο σχήμα.




Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση έχουμε

$$F + T_{\sigma\tau} - w_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{3}{2}T_{\sigma\tau} + T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} + mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$$
$$T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}(m\alpha_{cm} + mg\eta\mu\varphi) \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}(0,8 + 1,2)N \Rightarrow$$
$$T_{\sigma\tau} = 0,8N$$

Η τιμή του ελάχιστου συντελεστή τριβής βρίσκεται από την ανίσωση

$$T_{\sigma\tau} \le \mu_s N \Rightarrow T_{\sigma\tau} \le \mu_s mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_s \ge \frac{T_{\sigma\tau}}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu_{s,min} = \frac{T_{\sigma\tau}}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$$
$$\mu_{s,min} = 0,5$$

## 2.Δ.12

α. Αφού το νήμα είναι συνέχεια τεντωμένο το μέτρο της ταχύτητας $\upsilon_{\Sigma}$ του σώματος Σ και το μέτρο της ταχύτητας της σανίδας είναι ίσα άρα έχουμε

$$\upsilon_{\Sigma} = \upsilon_{\sigma} \quad (1)$$

Επειδή η σανίδα δεν ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα της σανίδας είναι κάθε στιγμή ίση με την ταχύτητα του ανώτερου σημείου κάθε κυλίνδρου

$$\upsilon_\sigma = \upsilon_A = 2\upsilon_{cm} \quad (2)$$

Επειδή ο κάθε κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχουμε ότι

$$\upsilon_{cm} = \omega R \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε

$$\upsilon_\Sigma = 2\omega R \Rightarrow \alpha t = 2\omega R \Rightarrow \omega = \frac{\alpha}{2R} t \Rightarrow \omega = \frac{5}{0,1} t \Rightarrow \omega = 50t \text{ (S.I.)}$$

β. Η απόσταση d που κατέρχεται το σώμα Σ είναι ίση με την οριζόντια μετατόπιση της σανίδας

$$d = \Delta x_\sigma \quad (4)$$

Η σανίδα όμως δεν ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους, επομένως για την επιτάχυνση της σανίδας $\alpha_\sigma$ και την επιτάχυνση του κέντρου των τροχών $\alpha_{cm}$ ισχύει ότι

$$\upsilon_\sigma = \upsilon_A = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \alpha_\sigma t = 2\alpha_{cm} t \Rightarrow \alpha_\sigma = 2\alpha_{cm} \quad (5)$$

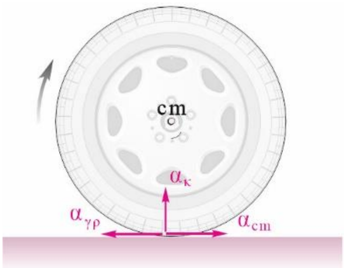
Επειδή τα σώματα κάνουν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα από τις (4) και (5) για τη μετατόπιση του κέντρου των κυλίνδρων έχουμε

$$\frac{d}{\Delta x_{cm}} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_\sigma t^2}{\frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2} \Rightarrow \frac{d}{\Delta x_{cm}} = 2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{d}{2} = 0,4\text{m}$$

και ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο κάθε κύλινδρος είναι

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\Delta\theta R}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{\Delta x_{cm}}{2\pi R} = \frac{4}{\pi} \text{ στροφές}$$

γ. Το κατώτερο σημείο του κάθε κυλίνδρου έχει τρεις επιταχύνσεις:




- την επιτρόχιο (γραμμική) που έχει μέτρο $\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ,
- τη μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού που έχει μέτρο $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- και την κεντρομόλο επιτάχυνση.

Η συνισταμένη των δύο πρώτων επιταχύνσεων είναι μηδενική, άρα η επιτάχυνση του κατώτερου σημείου του τροχού είναι ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R$$

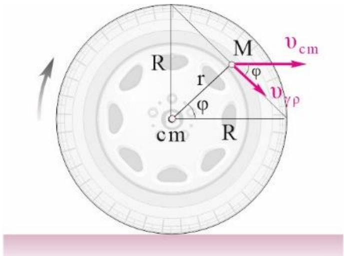
Από την εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου σε συνάρτηση με τον χρόνο έχουμε

$$\omega = 50t = (50 \cdot 1)\mathrm{rad/s} = 50\mathrm{rad/s}$$

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση του κατώτερου σημείου είναι

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = \left(50\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0{,}05\mathrm{m} \Rightarrow \alpha_\kappa = 125\mathrm{m/s^2}$$

δ. Τα σημεία της οριζόντιας διαμέτρου του τροχού για τα οποία η ταχύτητα είναι μέγιστη είναι τα σημεία που βρίσκονται στην περιφέρεια, διότι αυτά τα σημεία έχουν μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα από τα υπόλοιπα, ενώ όλα τα σημεία έχουν την ίδια μεταφορική ταχύτητα. Σχεδιάζουμε τις ταχύτητες του σημείου του κυλίνδρου.




Από το τρίγωνο βρίσκουμε την απόσταση r του σημείου M από το κέντρο του κυλίνδρου

$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στη γραμμική ταχύτητα του σημείου και τη μεταφορική του ταχύτητα

$$\frac{\upsilon_{cm}}{\upsilon_{\gamma\rho}} = \frac{\omega R}{\omega r} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_{cm}$$

Άρα η ταχύτητα του σημείου M είναι

$$\upsilon_M = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}{}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu 45^\circ} \Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + 2\upsilon_{cm}\frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_{cm}\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{\frac{5}{2}}\upsilon_{cm}$$

Η ταχύτητα της σανίδας την ίδια στιγμή είναι $\upsilon_\sigma = \sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{m/s}$, άρα

$\upsilon_\sigma = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_\sigma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{m/s}$, επομένως

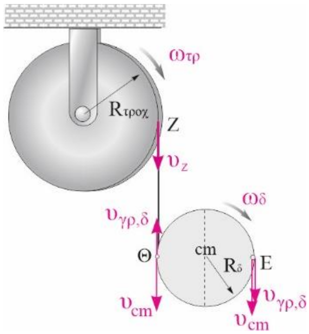
$$\upsilon_M = \sqrt{\frac{5}{2}}\upsilon_{cm} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 \mathrm{m/s} \Rightarrow \upsilon_M = 1{,}25\mathrm{m/s}$$

## 2.Δ.13

α. Τα δύο σώματα κάνουν ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση άρα για το πηλίκο των περιστροφών τους ισχύει ότι

$$\frac{N_\delta}{N_{\tau\rho}}=\frac{\frac{\Delta\varphi_\delta}{2\pi}}{\frac{\Delta\varphi_{\tau\rho}}{2\pi}}\Rightarrow\frac{N_\delta}{N_{\tau\rho}}=\frac{\Delta\varphi_\delta}{\Delta\varphi_{\tau\rho}}\Rightarrow\frac{N_\delta}{N_{\tau\rho}}=\frac{\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu,\delta}\Delta t^2}{\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho}\Delta t^2}\Rightarrow\frac{N_\delta}{N_{\tau\rho\chi}}=\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu,\delta}}{\alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho}}=4$$

β. Ο δίσκος εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση όπως δείχνεται στο σχήμα.




Το σημείο Ε που απέχει περισσότερο από το νήμα έχει ταχύτητα

$$\upsilon_E=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho,\delta}\quad(1)$$

Θα υπολογίσουμε τη $\upsilon_{cm}$.

Η ταχύτητα του σημείου Ζ της τροχαλίας, στο οποίο εφάπτεται το νήμα, είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Θ του δίσκου άρα έχουμε

$$\upsilon_Z=\upsilon_\Theta=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho,\delta}\Rightarrow\omega_{\tau\rho}R_{\tau\rho}=\upsilon_{cm}-\omega_\delta R_\delta\Rightarrow\upsilon_{cm}=\omega_{\tau\rho}R_{\tau\rho}+\omega_\delta R_\delta\ (2)$$

Οι γωνιακές ταχύτητες των δύο σωμάτων συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{\omega_\delta}{\omega_{\tau\rho}}=\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu,\delta}\Delta t}{\alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho}\Delta t}=4\Rightarrow\omega_{\tau\rho}=\frac{\omega_\delta}{4}$$

επίσης $R_{\tau\rho}=2R_\delta$, με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε

$$\upsilon_{cm}=\frac{\omega_\delta}{4}2R_\delta+\omega_\delta R_\delta\Rightarrow\upsilon_{cm}=\frac{3}{2}\omega_\delta R_\delta\ (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε

$$\upsilon_E=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho,\delta}=\frac{3}{2}\omega_\delta R_\delta+\omega_\delta R_\delta\Rightarrow\upsilon_E=\frac{5}{2}\omega_\delta R_\delta\Rightarrow\upsilon_E=\frac{5}{2}\cdot10\cdot0{,}1m/s\Rightarrow\upsilon_E=2{,}5m/s$$

γ. Από τη σχέση των ταχυτήτων $\upsilon_Z=\upsilon_\Theta=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho,\delta}$

βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των επιταχύνσεων

$$\frac{d\upsilon_Z}{dt}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}-\frac{d\upsilon_{\gamma\rho,\delta}}{dt}\Rightarrow\alpha_Z=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\rho,\delta}\quad(4)$$

Τα μέτρα της μεταφορικής και της επιτρόχιου (γραμμικής) επιτάχυνσης του δίσκου συνδέονται με τη σχέση

$$\upsilon_{cm}=\frac{3}{2}\omega_\delta R_\delta=\frac{3}{2}\upsilon_{\gamma\rho,\delta}\Rightarrow\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}=\frac{3}{2}\frac{d\upsilon_{\gamma\rho,\delta}}{dt}\Rightarrow\alpha_{cm}=\frac{3}{2}\alpha_{\gamma\rho,\delta}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) παίρνουμε

$$\alpha_Z=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\rho,\delta}=1m/s^2$$

δ. $\alpha_Z = \alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho} R_{\tau\rho} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho} = \dfrac{\alpha_Z}{R_{\tau\rho}} = 5\text{rad}/s^2$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,\delta} = 4\alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho} = 20\text{rad}/s^2$$

$$\omega_\delta = \alpha_{\gamma\omega\nu,\delta} t \Rightarrow t = \frac{\omega_\delta}{\alpha_{\gamma\omega\nu,\delta}} = \frac{40\text{rad}/s}{20\text{rad}/s^2} \Rightarrow t = 2s$$

Η γωνία στροφής της τροχαλίας είναι

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu,\tau\rho} t^2 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^2\text{rad} \Rightarrow \Delta\varphi = 10\text{rad}$$

και το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται από την τροχαλία είναι

$$\Delta\ell = R_{\tau\rho}\Delta\varphi = 2m$$

Από τη σχέση (3) βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου όταν ω=40d/s.

$$\upsilon_{cm} = \frac{3}{2}\omega_\delta R_\delta \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{3}{2}\cdot 40\cdot 0{,}1m/s = 6m/s$$

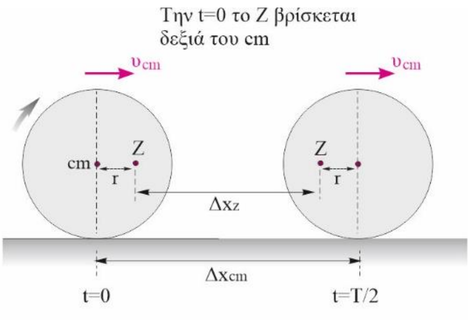
Όταν ξετυλίγεται το νήμα η μόνη δύναμη που ενεργεί στον δίσκο είναι η δύναμη της βαρύτητας άρα η μεταφορική επιτάχυνση του δίσκου γίνεται $g=10m/s^2$, επομένως η μετατόπιση ένα δευτερόλεπτο μετά το ξετύλιγμα του νήματος είναι

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm}\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = (6\cdot 1 + \frac{1}{2}10\cdot 1^2)\ (SI) = 11m \Rightarrow \Delta x_{cm} = 11m$$

## 2.Δ.14

α. Έστω ένα σημείο Ζ που αρχικά βρίσκεται στην οριζόντια διάμετρο, δεξιά του κέντρου μάζας και απέχει r από το κέντρο του κυλίνδρου. Μετά από χρονικό διάστημα μισής περιόδου το σημείο θα βρίσκεται πάλι στην οριζόντια διάμετρο και αριστερά του κέντρου μάζας και θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x_Z = \Delta x_{cm} - 2r \quad (1)$$



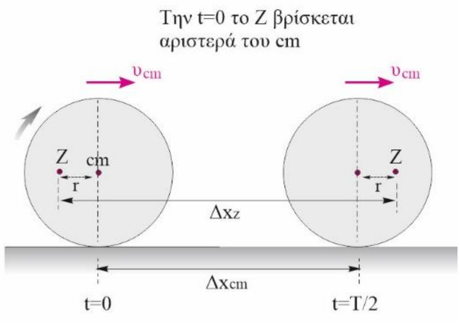

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου σε χρονικό διάστημα ίσο με μισή περίοδο είναι

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm}\Delta t = \omega R\Delta t = \frac{2\pi}{T}R\frac{T}{2} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \pi R \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι

$$\Delta x_Z = \Delta x_{cm} - 2r \Rightarrow \Delta x_Z = \pi R - 2r \quad (3)$$

Η αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (3) δίνει $\Delta x_Z = 0,214 m$




β. Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\Delta x_Z = \Delta x_{cm} + 2r = \pi R + 2r \quad (4)$$

Η αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (4) δίνει

$$\Delta x_Z = 0,414 m$$

γ. Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι η μετατόπιση του Z σε μισή περίοδο είναι μεγαλύτερη όταν το σημείο την t=0 βρίσκεται αριστερά του κέντρου και μικρότερη όταν βρίσκεται δεξιά του κέντρου. Το πηλίκο της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη μετατόπιση σε μισή περίοδο είναι

$$\frac{\Delta x_{Z,max}}{\Delta x_{Z,min}} = \frac{\pi R + 2r}{\pi R - 2r}$$

Το κλάσμα παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν ο παρονομαστής ελαχιστοποιείται, αυτό συμβαίνει όταν το r παίρνει τη μέγιστη τιμή. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το r είναι $r_{max}$=R, οπότε η μέγιστη τιμή του πηλίκου είναι

$$\frac{\Delta x_{Z,max}}{\Delta x_{Z,min}} = \frac{\pi R + 2R}{\pi R - 2R} = \frac{\pi + 2}{\pi - 2} = \frac{5,14}{1,14} \Rightarrow \frac{\Delta x_{Z,max}}{\Delta x_{Z,min}} = 4,5$$

δ. Επειδή ο κύλινδρος ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχουμε σε χρόνο μισής περιστροφής

$$\Delta x_{cm} = \pi R$$

Άρα για να είναι η μετατόπιση του Z μηδενική μετά από μισή περίοδο πρέπει να ισχύει ότι

$$\Delta x_Z = \Delta x_{cm} - 2R' \Rightarrow 0 = \pi R - 2R' \Rightarrow 0 = \pi R - 2R' \Rightarrow R' = \frac{\pi}{20} m$$

## 2.Δ.15

α. Από την κλίση στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου βρίσκουμε τη μεταφορική επιτάχυνση του τροχού σε κάθε χρονικό διάστημα

$$\begin{cases} \alpha_{cm,1} = \dfrac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t} = -1m/s^2,\ 0s < t \le 10s \\ \alpha_{cm,2} = \dfrac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t} = 1m/s^2,\ 10s < t \le 20s \\ \alpha_{cm,3} = \dfrac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t} = 0m/s^2,\ \ 20s < t \le 30s \end{cases}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας είναι η επιτρόχιος (γραμμική) επιτάχυνση. Για ένα σημείο στην περιφέρεια του τροχού το μέτρο της επιτροχίου είναι ίσο με το μέτρο της μεταφορικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας οπότε είναι

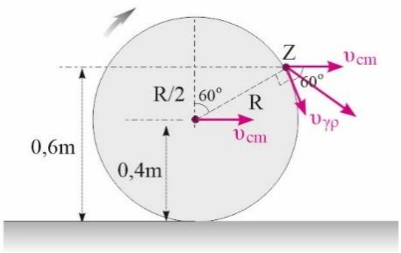
$$\begin{cases} \alpha_{\gamma\rho,1} = \alpha_{cm,1} = -1m/s^2,\ 0s < t \le 10s \\ \alpha_{\gamma\rho,2} = \alpha_{cm,2} = 1m/s^2,\ 10s < t \le 20s \\ \alpha_{\gamma\rho,3} = \alpha_{cm,3} = 0m/s^2,\ \ 20s < t \le 30s \end{cases}$$

β. Βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού τις στιγμές $t_1$=5s και $t_2$=12s:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\alpha_{cm,1}}{R} = -2{,}5rad/s^2$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\alpha_{cm,2}}{R} = 2{,}5rad/s^2$$

Άρα η μεταβολή στη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού ανάμεσα στις στιγμές $t_1$=5s και $t_2$=12s είναι

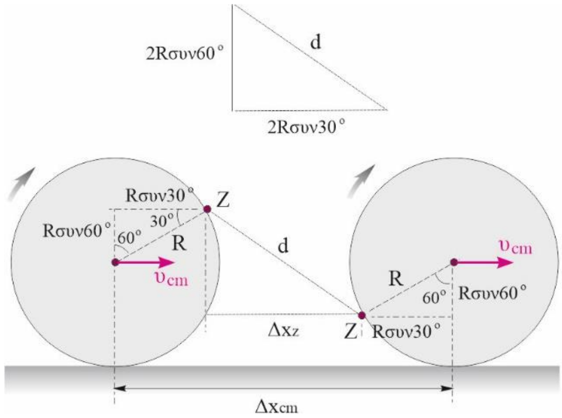



$$\Delta\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu,2} - \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu,1} \Rightarrow \Delta\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2{,}5rad/s^2 - (-2{,}5rad/s^2) \Rightarrow$$
$$\Delta\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5rad/s^2$$

γ. Το σημείο Z είναι αυτό που δείχνεται στο σχήμα, η ταχύτητά του είναι

$$\upsilon_Z = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}{}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu 60^o} \Rightarrow \upsilon_Z = \sqrt{3}\upsilon_{cm} = 10\sqrt{3}m/s$$

δ. Το σημείο Ζ αρχικά βρίσκεται δεξιά του κέντρου μάζας του τροχού και μετά από μισή περιστροφή θα βρεθεί στο αντιδιαμετρικό του σημείο.




Στο χρονικό αυτό διάστημα η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού είναι

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm}\Delta t = \upsilon_{cm}\frac{T}{2} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \pi R$$

Η οριζόντια μετατόπιση του σημείου Ζ από το σχήμα είναι

$\Delta x_Z = \Delta x_{cm} - 2x$ με

$$x = R\sigma\upsilon\nu 30^o \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

Η κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου Ζ είναι

$$\Delta y_Z = 2R\sigma\upsilon\nu 60^0 = R$$

άρα η συνολική μετατόπιση του Ζ είναι

$$d = \sqrt{\Delta x_Z^2 + \Delta y_Z^2} = \sqrt{(\Delta x_{cm} - 2x)^2 + R^2} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\pi R - \sqrt{3}R\right)^2 + R^2} \Rightarrow$$

$$d = R\sqrt{\left(\pi - \sqrt{3}\right)^2 + 1} \approx 0,4m\sqrt{1,4^2 + 1} \Rightarrow d \approx 0,4\sqrt{2,96}\,m \Rightarrow d \approx 0,688m$$

## 2.Δ.16

α. Τη στιγμή $t_1$ ο δίσκος έχει εκτελέσει 1,5 περιστροφή, άρα η γωνία που διέγραψε είναι

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = N2\pi = 3\pi\,rad$$

Η κίνηση του δίσκου στροφικά είναι ομαλή, άρα απαιτείται χρονικό διάστημα $t_1$ ίσο με

$$\omega = \frac{\theta}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{\theta}{\omega} = 3s$$

Η ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ προκύπτει από τη μετατόπιση του δίσκου στο ίδιο χρονικό διάστημα

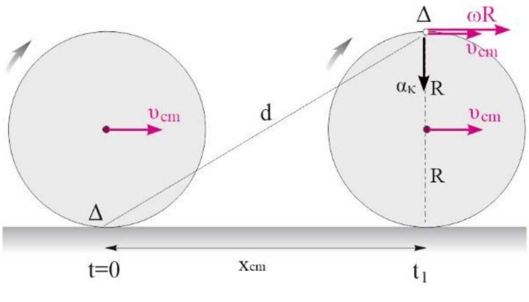
$$x = \upsilon_{cm}t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{x}{t_1} = 0,2m/s$$

Για να είναι η κίνηση του δίσκου μέχρι τη στιγμή $t_1$ κύλιση, θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\upsilon_{cm} = \omega R$ .

Όμως $\upsilon_{cm} = 0,2m/s \neq \omega R = 0,1\pi = 0,314m/s$, άρα η κίνηση του δίσκου δεν είναι κύλιση αλλά ταυτόχρονα με τη στροφική κίνηση γίνεται ολίσθηση. Επειδή μάλιστα $\omega R > \upsilon_{cm}$ αυτό σημαίνει ο δίσκος σπινάρει.

β. Η μετατόπιση του σημείου του δίσκου που εφάπτονταν με το δάπεδο είναι

$$d = \sqrt{{x_{cm}}^2 + (2R)^2} = \sqrt{(0,6m)^2 + (0,2m)^2} \Rightarrow$$
$$d = \sqrt{0,4}m$$




γ. Η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του δίσκου Α, μέχρι τη στιγμή $t_1$ είναι σταθερή και έχει μέτρο

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho,A} = \upsilon_{cm} + \omega R \Rightarrow \upsilon_A = 0,514m/s$$

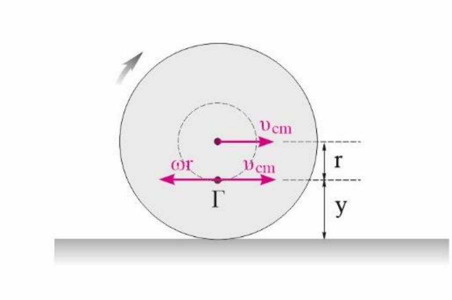
Η επιτάχυνση του ανώτερου σημείου του δίσκου Α, μέχρι τη στιγμή $t_1$ συμπίπτει με την κεντρομόλο επιτάχυνσή του, γιατί τα μέτρα των $\upsilon_{cm}$ και $\upsilon_{\gamma\rho}$ είναι σταθερά και δεν υπάρχει άλλη επιτάχυνση. Άρα

$$\alpha_{\kappa,A} = \frac{{\upsilon_{\gamma\rho,A}}^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow \alpha_{\kappa,A} = 0,1\pi^2 = 1m/s^2$$

με διεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω.

δ. Το σημείο Γ της κατακόρυφης διαμέτρου που έχει ταχύτητα μηδενικού μέτρου πρέπει να βρίσκεται κάτω από το κέντρο του δίσκου. Αν είναι σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου τότε

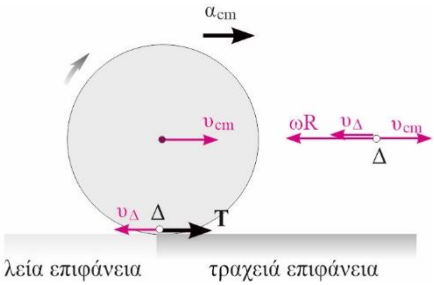
$$\upsilon_\Gamma = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho,\Gamma} = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega r \Rightarrow$$
$$r = \frac{\upsilon_{cm}}{\omega} = \frac{0,2}{\pi} = 0,064m$$




και η απόστασή του από το έδαφος είναι $y = R - r \Rightarrow y = 0,036m$.

ε. Όταν ο δίσκος εισέρχεται στο μη λείο επίπεδο, το κατώτερο σημείο του Δ, έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, γιατί

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_{\gamma\rho,\Delta} - \upsilon_{cm} = \omega R\text{-}\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_A = 0{,}114 m/s$$



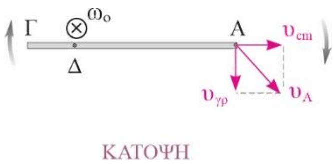

Η τριβή ολίσθησης που θα δεχτεί ο δίσκος θα έχει φορά προς τα δεξιά και μέτρο ίσο με

$$T = \mu N = \mu mg \Rightarrow T = 1N$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα έχει κι αυτή φορά προς τα δεξιά και μέτρο

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow T = m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{T}{m} = 1m/s^2$$

## 2.Δ.17




α. Το επίπεδο είναι λείο, οπότε δεν υπάρχουν τριβές ούτε ροπές, άρα η ράβδος εκτελεί μεταφορικά ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και στροφικά ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_o = 10 rad/s$. Η ράβδος είναι ένα ελεύθερο στερεό, άρα στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Επειδή το σημείο Δ έχει μόνο μεταφορική ταχύτητα, θα συμπίπτει με τη θέση του κέντρου μάζας της ράβδου, άρα η περιστροφή γίνεται γύρω από το σημείο Δ και $\upsilon_\Delta = \upsilon_{cm} = 1m/s$. Όταν η ράβδος έχει περιστραφεί κατά π/2 rad τότε οι ταχύτητες που έχει το σημείο Α είναι όπως στο σχήμα.

Η γραμμική ταχύτητα του σημείου Α είναι

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega_o \frac{3\ell}{4} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = 3m/s$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του Α είναι

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{10} m/s$$

και η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα έχει

$$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_{cm}} = 3$$

β. Για να έχει αποκτήσει το σημείο Α ταχύτητα μέτρου $2\upsilon_{cm}$ αντίθετη της κίνησης της ράβδου, θα πρέπει το σημείο Α να βρεθεί σε αντιδιαμετρική θέση από αυτή που βρίσκεται αρχικά, καθώς στη θέση αυτή θα είναι

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \omega_o \frac{3\ell}{4} = -2m/s$$

Η 1η φορά συμβαίνει όταν η ράβδος διαγράψει μισή περιστροφή και η 3η φορά όταν η ράβδος θα έχει εκτελέσει Ν=2,5 περιστροφές.

γ. Τη μέγιστη ταχύτητά του το σημείο Γ την αποκτά όταν η γραμμική και η μεταφορική του ταχύτητα είναι ομόρροπες, οπότε έχουμε

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \omega_o \frac{\ell}{4} = 2m/s$$

Το σημείο Γ έχει κεντρομόλο επιτάχυνση που είναι ίση με

$$\alpha_{\kappa(\Gamma)} = \omega_o^2 \frac{\ell}{4} = (10rad/s)^2 \cdot \frac{0,4m}{4} \Rightarrow \alpha_{\kappa(\Gamma)} = 10m/s^2$$

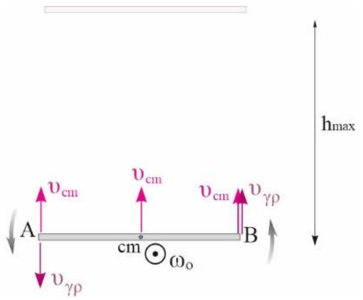
δ. Όταν για πρώτη φορά το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α είναι ίσο με $\upsilon_A = \sqrt{13}m/s$ τότε η ράβδος θα έχει περιστραφεί κατά γωνία φ που είναι

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm} \cdot \upsilon_{\gamma\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow 6\sigma\upsilon\nu\varphi = 3 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}rad$$

Από τη γωνιακή ταχύτητα βρίσκουμε το χρονικό διάστημα

$$\omega_o = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega_o} \Rightarrow \Delta t = \frac{\frac{\pi}{3}rad}{10rad/s} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{30}s$$

## 2.Δ.18




α. Οι ταχύτητες των δύο άκρων της ράβδου και η φορά περιστροφής της δείχνονται στο σχήμα.
Για την ταχύτητα του άκρου Α τη στιγμή της εκτόξευσης ισχύει

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow 0 = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega_o \frac{\ell}{2} \quad (1)$$

Για την ταχύτητα του άκρου Β τη στιγμή της εκτόξευσης ισχύει

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_B = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_B}{2}$$

Άρα τη στιγμή της εκτόξευσης η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου είναι η μισή της ταχύτητας του άκρου Β.

β. Στη διάρκεια της ανόδου της ράβδου η μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας της είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με επιτάχυνση ίση με -g. Επειδή στη ράβδο δεν ασκείται ροπή η περιστροφική της κίνηση είναι ομαλή με γωνιακή ταχύτητα ίση με αυτή με την οποία αρχικά εκτοξεύθηκε.
Η μεταφορική κίνηση της ράβδου περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\Delta h_{cm} = \upsilon_{cm(o)}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \qquad (2)$$

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm(o)} - g\Delta t \qquad (3)$$

Επειδή ο άνθρωπος πιάνει τη ράβδο στο ίδιο σημείο με το σημείο εκτόξευσης, $\Delta h_{cm} = 0$ m, οπότε από τη σχέση (2) με αντικατάσταση βρίσκουμε τον ολικό χρόνο κίνησης

$$0 = \upsilon_{cm(o)}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t_{o\lambda} = \frac{2\upsilon_{cm(o)}}{g} \qquad (4)$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης και από τον αριθμό των περιστροφών που είναι γνωστός έχουμε

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow 4 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \Delta\varphi = 8\pi rad \quad \text{και}$$

$$\omega_o = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \xrightarrow{(1),(4)} \frac{\upsilon_{cm(o)}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{8\pi}{\frac{2\upsilon_{cm(o)}}{g}} \Rightarrow \frac{2\upsilon_{cm(o)}}{\ell} = \frac{8\pi g}{2\upsilon_{cm(o)}} \Rightarrow \upsilon^2_{cm(o)} = \frac{8\pi\cdot 10\cdot 0,4}{4}\,m/s^2 \Rightarrow \upsilon_{cm(o)} = \sqrt{8\pi}\,m/s$$

Άρα το συνολικό χρονικό διάστημα κίνησης της ράβδου από την (4) είναι

$$\Delta t_{o\lambda} = \frac{2\upsilon_{cm(o)}}{g} \Rightarrow \Delta t_{o\lambda} = \frac{2\sqrt{8\pi}}{10}\,s$$

και η αρχική γωνιακή ταχύτητα

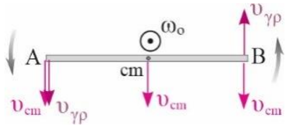
$$\omega_o = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega_o = \frac{8\pi\,rad}{\frac{2\sqrt{8\pi}}{10}\,s} \Rightarrow \omega_o = \frac{80\pi\sqrt{8\pi}}{16\pi}\,rad/s \Rightarrow \omega_o = 5\sqrt{8\pi}\,rad/s$$

γ. Το μέγιστο ύψος στο οποίο ανέρχεται το κέντρο μάζας είναι

$$\Delta h_{max} = \frac{\upsilon^2_{cm(o)}}{2g} \Rightarrow \Delta h_{max} = \frac{8\pi}{20}\,m = 0,4\pi\,m$$

δ. Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση του $\Delta t_{o\lambda}$ βρίσκουμε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας όταν επιστρέφει στο σημείο εκτόξευσης

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm(o)} - g\Delta t_{o\lambda} = \sqrt{8\pi}\,\frac{m}{s} - 10\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{2\sqrt{8\pi}}{10}\,s \Rightarrow \upsilon_{cm} = -\sqrt{8\pi}\,\frac{m}{s}$$




Όμως στο σημείο Α αυτή τη φορά οι ταχύτητες είναι ομόρροπες και η $\upsilon_{\gamma\rho}$ διατηρεί συνεχώς το ίδιο μέτρο, άρα θα έχουμε

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm(o)} + \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_A = 2\upsilon_{cm(o)} = 2\sqrt{8\pi}\,m/s$$