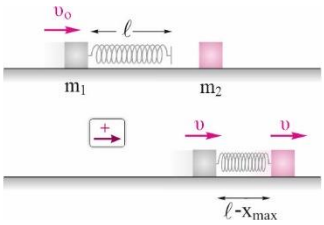
Θέματα Δ

1.Δ.1



α. Όταν έχουμε μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, τα σώματα έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας

$$E_{MHX}^{(\alpha\rho\chi)} = E_{MHX}^{(\tau\varepsilon\lambda)}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\,x_{max}^2 \Rightarrow m\upsilon_o^2 = 2m\upsilon^2 + k\,x_{max}^2 \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης μέγιστης συσπείρωσης

$$m\upsilon_o = 2m\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_o}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$m\upsilon_o^2 = 2m\frac{\upsilon_o^2}{4} + k\,x_{max}^2 \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{m\upsilon_o^2}{2k}} \Rightarrow x_{max} = 0{,}5\,m$$

β. Κατά τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου έχουμε

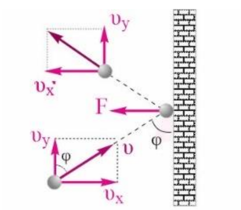
$$K = E - U \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}k\,x_{max}^2 \Rightarrow K = 25\,J$$

γ. Ποσοστό μετατροπής ολικής ενέργειας σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου

$$\pi\% = \frac{U}{E}\cdot 100\% = \frac{E-K}{E}\cdot 100\% \Rightarrow \pi\% = 50\%$$

δ. Το φαινόμενο είναι ίδιο με μια ελαστική κρούση. Άρα, για τις τελικές ταχύτητες των σωμάτων, επειδή $m_1=m_2$, έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων. Έτσι $\upsilon_1' = 0$, $\upsilon_2' = 10\,m/s$.

1.Δ.2

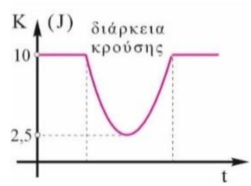


α. Ο τοίχος είναι λείος και γι' αυτό ασκεί στη σφαίρα δύναμη κάθετη στον τοίχο.

β. Κατά τη διάρκεια της κρούσης η υ_y μένει αναλλοίωτη, ενώ η υ_x αλλάζει φορά. Έτσι υπάρχει στιγμή που υ_x=0m/s. Τη στιγμή αυτή η μπάλα έχει την ελάχιστη κινητική ενέργεια και τη μέγιστη δυναμική. Η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$U_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_y^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow U_{max} = \frac{3}{4}\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$$

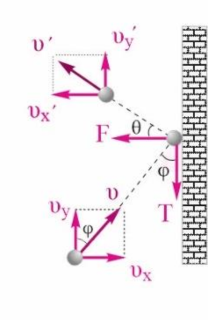
$$U_{max} = 7{,}5\,J$$



γ. $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 10\,J$

δ. $\vec{F}_x = \dfrac{\Delta \vec{p}_x}{\Delta t} \Rightarrow F_x = \dfrac{m\upsilon_x - (-m\upsilon_x)}{\Delta t} = \dfrac{2m\upsilon_x}{\Delta t} \Rightarrow F_x = 20\sqrt{3}N$

ε. Η κινητική ενέργεια της μπάλας μετά την κρούση είναι η μισή της αρχικής, άρα τα μέτρα των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση τα συνδέει η σχέση



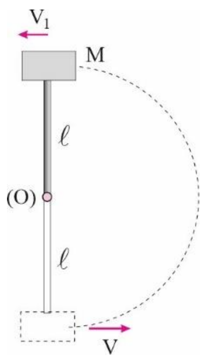
$$K' = \frac{K}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon' = \upsilon\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Κάνουμε ανάλυση της ταχύτητας υ, πριν την κρούση και της υ΄, μετά την κρούση. Στον άξονα y εμφανίζεται κατά τη διάρκεια της κρούσης τριβή ολίσθησης με συνέπεια να μειώνεται το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας στον άξονα αυτόν. Στον άξονα x όμως το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας διατηρείται σταθερό, καθώς η μπάλα είναι ελαστική $|\upsilon_x| = |\upsilon'_x|$.

Η γωνία πρόσπτωσης είναι 60^0 και ισχύει $\sigma\upsilon\nu 60^0 = \dfrac{\upsilon_x}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = 2\upsilon_x$

Για τη γωνία ανάκλασης ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\upsilon'_x}{\upsilon'} = \dfrac{\upsilon_x}{\upsilon\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\upsilon_x}{2\upsilon_x\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^0$

1.Δ.3



α. $\dfrac{|\Delta K_1|}{K_1} = \dfrac{84}{100} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2} = \dfrac{84}{100} \Rightarrow \upsilon = 0,4\upsilon_o$

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ και παίρνουμε

$$m\upsilon_o = m\upsilon + MV \Rightarrow 0,6m\upsilon_o = MV \Rightarrow V = 6\ m/s$$

γ. Με διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει ο ξύλινος κύβος μετά την κρούση για να φτάσει στο ψηλότερο σημείο με μηδενική ταχύτητα

$$\frac{1}{2}MV_{min}^2 = Mg2\ell \Rightarrow V_{min} = \sqrt{4g\ell} = 5m/s$$

Επειδή $V=6m/s > V_{min} = 5m/s$, θα εκτελέσει ανακύκλωση.

δ. Με διατήρηση της μηχανικής ενέργειας βρίσκουμε την ταχύτητα V_1 στο ψηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + Mg2\ell \Rightarrow V_1^2 = V^2 - 4g\ell \Rightarrow V_1 = \sqrt{11}\,m/s$$

$$|\Delta p| = |p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi}| = |MV_1 + MV| \Rightarrow |\Delta p| = M(V_1 + V) \Rightarrow |\Delta p| = (6 + \sqrt{11})\ kgm/s$$

1.Δ.4

α. Από την κεντρική ελαστική κρούση, παίρνοντας τα θετικά προς τα δεξιά, έχουμε

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -3m/s$$

Η μεταβολή στην ορμή του Σ_1 είναι

$$\Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 = -0,9kgm/s$$

β. $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 3m/s$

γ. Η τάση του νήματος όταν το σώμα ισορροπεί είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T = m_2 g = 3N$$

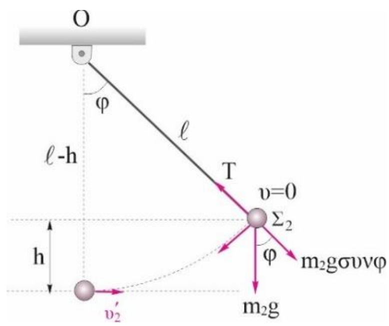
Όταν το σώμα ξεκινάει να κινείται κυκλικά, η συνισταμένη δύναμη λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη

$$\Sigma F = F_\kappa \Rightarrow T' - m_2 g = m_2\frac{\upsilon_2'^2}{\ell} \Rightarrow T' = 6N$$

Η επί τοις εκατό μεταβολή στην τάση του νήματος είναι

$$\pi\% = \frac{T' - T}{T}100\% \Rightarrow \pi\% = 100\%$$

δ. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του σώματος, η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας γίνεται μηδέν, αφού το σώμα σταματάει, άρα η τάση του νήματος είναι



$$\Sigma F = F_\kappa \Rightarrow T - m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow T = m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi \ (1)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από την κατώτερη μέχρι την ανώτερη θέση του σώματος και έχουμε

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = m_2 g h \Rightarrow h = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} = 0,45m$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} = 0,5$$

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$T = m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi = 1,5N$$

1.Δ.5

α. Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$\vec{p}_{πριν}=\vec{p}_{μετα} \Rightarrow mυ_o=m\frac{υ_o}{4}+p_{ξυλ} \Rightarrow p_{ξυλ}=\frac{3}{4}mυ_o=7{,}5\,kg\,m/s$$

β. $$\frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mυ_o^2}=\frac{4{,}5}{100} \Rightarrow \frac{MV\cdot V}{mυ_0^2}=\frac{4{,}5}{100} \Rightarrow \frac{p_{ξυλ}\cdot V}{mυ_o^2}=\frac{4{,}5}{100} \Rightarrow \frac{7{,}5\cdot V}{0{,}1\cdot 100^2}=\frac{4{,}5}{100} \Rightarrow V=6\,m/s$$

γ. $$Q=K_{πριν}-K_{μετα} \Rightarrow Q=\frac{1}{2}mυ_0^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{υ_o}{4}\right)^2-\frac{1}{2}MV^2 \quad (1)$$

$$p_{ξυλ}=MV \Rightarrow M=\frac{p_{ξυλ}}{V} \Rightarrow M=1{,}25\,kg$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $Q=446{,}25J$.

δ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το ξύλινο σώμα

$$0-\frac{1}{2}MV^2=-\mu Mgx \Rightarrow \mu=\frac{V^2}{2gx}=0{,}6$$

1.Δ.6

α. Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει

$$p_{αρχ}=p_{τελ} \Rightarrow m_1υ_0=(m_1+m_2)V_κ \Rightarrow m_2=39m_1$$

β. Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$υ_2'=\frac{m_{1,2}-m_3}{m_{1,2}+m_3}V_κ$$

$$υ_3'=\frac{2m_{1,2}}{m_{1,2}+m_3}V_κ$$

Το m_3 μετά την ανάκλασή του στον τοίχο θα αποκτήσει ταχύτητα αντίθετη από την αρχική του, $υ_3''=-υ_3'$ και επειδή τα σώματα στη συνέχεια διατηρούν σταθερή την μεταξύ τους απόσταση ισχύει $υ_3''=υ_2'$. Άρα

$$υ_2'=υ''_3 \Rightarrow \frac{m_{1,2}-m_3}{m_{1,2}+m_3}V_κ=-\frac{2m_{1,2}}{m_{1,2}+m_3}V_κ \Rightarrow m_{1,2}-m_3=-2m_{1,2} \Rightarrow$$

$$40m_1-m_3=-80m_1 \Rightarrow m_3=120m_1$$

γ. Η ταχύτητα του σώματος με μάζα m_3 μετά την κρούση είναι

$$υ_3'=\frac{2m_{1,2}}{m_{1,2}+m_3}V_κ=\frac{2\cdot 40m_1}{40m_1+120m_1}V_κ \Rightarrow υ_3'=2m/s$$

Το κλάσμα της αρχικής ενέργειας του βλήματος που μεταβιβάστηκε στο σώμα με μάζα m_3 είναι

$$\alpha=\frac{K_3}{K_{\alpha\rho\chi}}=\frac{\frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{160}$$

δ. Η μεταβολή της ορμής του βλήματος κατά την κρούση είναι

$$\Delta p_1=p_1'-p_1=m_1V_\kappa-m_1\upsilon_0\Rightarrow\Delta p_1=-15{,}6kgm/s$$

Το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχτηκε το βλήμα είναι

$$\Sigma F_1=\frac{|\Delta p_1|}{\Delta t}=1560N$$

1.Δ.7

α. Η μεταβολή της ορμής της δεύτερης σφαίρας ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της πρώτης. Άρα

$$\Delta p_{o\lambda}=0\Rightarrow\Delta p_2+\Delta p_1=0\Rightarrow\Delta p_2=-\Delta p_1\Rightarrow m_2\upsilon_2'-m_2\upsilon_2=-1{,}5kgm/s\Rightarrow\upsilon_2=0{,}1m/s$$

Οι ταχύτητες της σφαίρας με μάζα m_2 πριν και μετά την κρούση είναι ομόρροπες, προς τα δεξιά.

β. Από τη μεταβολή της ορμής της πρώτης σφαίρας παίρνουμε

$$\Delta p_1=p_1'-p_1\Rightarrow-1.5kgm/s=m_1\upsilon_1'-m_1\upsilon_1\Rightarrow\upsilon_1'-\upsilon_1=-0{,}5m/s\quad(1)$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$\upsilon_1+\upsilon_1'=\upsilon_2+\upsilon_2'\Rightarrow\upsilon_1+\upsilon_1'=1{,}7m/s\quad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$\upsilon_1=1{,}1m/s,\quad\upsilon_1'=0{,}6m/s$$

και η σφαίρα με μάζα m_1 πριν και μετά την κρούση κινείται προς τα δεξιά.

γ. Όσο μειώθηκε η κινητική ενέργεια της σφαίρας με μάζα m_1 τόση κινητική ενέργεια μεταφέρθηκε στη σφαίρα με μάζα m_2

$$\Delta K_2=|\Delta K_1|=K_1-K_1'=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2=1{,}275J$$

δ. Οι σφαίρες πριν την κρούση κινούνταν ομόρροπα. Η πρώτη σε 4s πριν την κρούση διένυσε από-σταση $x_1=\upsilon_1 t=4{,}4m$

και η δεύτερη $x_2=\upsilon_2 t=0{,}4m$.

Η απόσταση των δύο σφαιρών ήταν $d=x_1-x_2=4m$.

1.Δ.8

α. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος ισούται με αυτήν της σφαίρας Σ_1 στον άξονα y, γιατί στον άξονα x η ορμή του συστήματος διατηρείται. Είναι

$$|\Delta p_{o\lambda}|=|\Delta p_1|=m_1\upsilon_y\Rightarrow\upsilon_y=10\sqrt{3}m/s$$

Η ταχύτητα της σφαίρας $Σ_1$ στον άξονα y κατά την οριζόντια βολή της δίνει τον χρόνο πτώσης

$$υ_y = gt \Rightarrow t = \sqrt{3}s$$

Άρα, το ύψος h του πρώτου οριζόντιου επιπέδου, από το οποίο έγινε η βολή είναι

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 15m$$

β. Το βεληνεκές της σφαίρας είναι $s=υ_0 t$.

Την αρχική ταχύτητα της σφαίρας θα την υπολογίσουμε από την ΑΔΕ (αρχή διατήρησης της ενέργειας) από τη στιγμή της βολής μέχρι το συσσωμάτωμα να σταματήσει. Επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θεωρούμε το δάπεδο

$$E_{τελ} = E_{αρχ} \Rightarrow K_{τελ} + U_{τελ} + Q_{ολ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} \Rightarrow Q_{ολ} = \frac{1}{2}m_1 υ_0{}^2 + m_1 gh \Rightarrow υ_0{}^2 = \frac{2(Q - m_1 gh)}{m_1} \Rightarrow υ_o = 10m/s$$

και η απόσταση $s = υ_0 t \Rightarrow s = 10\sqrt{3}m$.

γ. Για την κρούση εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στον άξονα x, γιατί μόνο στον άξονα x το σύστημα είναι μονωμένο. Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της οριζόντιας βολής και ίση με $υ_o$.

$$p_{αρχ,x} = p_{τελ,x} \Rightarrow m_1 υ_0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = 5m/s$$

δ. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση και σταματάει σε χρόνο Δt. Η επιτάχυνσή του έχει μέτρο

$$υ = V - |α|Δt \Rightarrow 0 = 5 - |α|0{,}8 \Rightarrow |α| = \frac{25}{4}m/s^2$$

Η τριβή που δέχεται το συσσωμάτωμα είναι $T=μN=μ(m_1+m_2)g$. Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$ΣF = m_{ολ}α \Rightarrow -T = m_{ολ}α \Rightarrow -μm_{ολ}g = -m_{ολ}α \Rightarrow μ = \frac{5}{8}$$

1.Δ.9

α. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση του $Σ_1$ έχουμε

$$K_{αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K_{τελ} + U_{ελ,τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 υ_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow υ_1 = \pm x_1\sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow |υ_1| = 3m/s$$

β. Η ταχύτητα του $Σ_2$ μετά την ελαστική κρούση είναι

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}υ_2 \Rightarrow υ_2' = 5m/s$$

Η μεταβολή της ορμής του $Σ_2$ είναι

$$Δp_2 = m_2 υ_2' - m_2 υ_2 \Rightarrow Δp_2 = 8kgm/s$$

γ. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των δύο ακραίων σημείων του ημικυκλικού οδηγού, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο για να βρούμε την ταχύτητα του $Σ_2$ ελάχιστα πριν εγκαταλείψει τον οδηγό

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2 υ_2'^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2 υ_2''^2 + m_2 g 2R \Rightarrow υ_2'' = 3m/s$$

Στη θέση (Γ) η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα παίζει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης

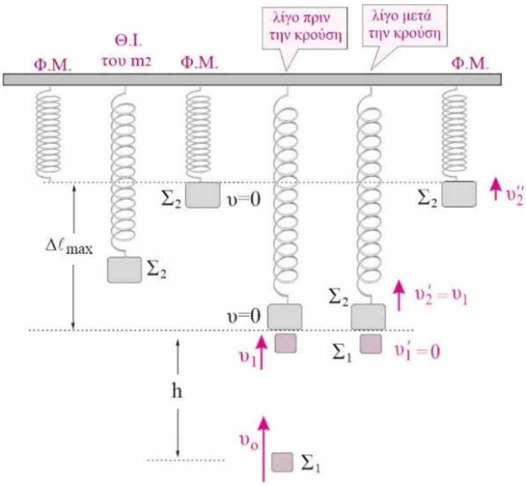
$$\Sigma F = F_{κεντρ} \Rightarrow N + m_2 g = \frac{m_2 \upsilon_2''^2}{R} \Rightarrow N = 12{,}5N$$

δ. $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1' = -1m/s$

Από την ΑΔΜΕ για το σύστημα Σ_1 - ελατήριο έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow \Delta\ell_{max} = 0{,}1m$$

1.Δ.10



α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση φυσικού μήκους μέχρι τη θέση μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_{F,ελ} \Rightarrow$$

$$0 - 0 = m_2 g\Delta\ell_{max} + 0 - \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow \Delta\ell_{max} = 0{,}8m$$

β. Από την ανταλλαγή των ορμών έχουμε

$$m_2\upsilon_2' = m_1\upsilon_1 \ (1)$$

Από την ΑΔΜΕ για το σώμα Σ_1 βρίσκουμε την ταχύτητά του πριν την κρούση

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = m_1 gh + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = 1m/s$$

Έχουμε κρούση κεντρική και ελαστική με το σώμα Σ_2 ακίνητο, οπότε

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \xrightarrow{(1)} m_1 = m_2 = 1kg$$

γ. Έχουμε κεντρική και ελαστική κρούση σωμάτων με ίσες μάζες, οπότε συμβαίνει ανταλλαγή ταχυτήτων

$$\upsilon_2' = \upsilon_1 = 1m/s,\ \upsilon_1' = \upsilon_2 = 0$$

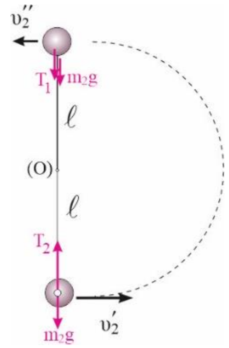
δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση μέγιστης επιμήκυνσης όπου έγινε η κρούση, μέχρι τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για να βρούμε την ταχύτητα του Σ_2 όταν διέρχεται από τη θέση αυτή

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_{F,ελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 g\Delta\ell_{max} + \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow \upsilon_2'' = 1m/s$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Σ_2, όταν διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dy}{dt} = \frac{-m_2 g dy}{dt} = -m_2 g\upsilon_2'' \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -10J/s$$

1.Δ.11



α. Από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης για το ψηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς παίρνουμε

$$\Sigma F = F_{κεντρ} \Rightarrow T_1 + m_2 g = \frac{m_2 \upsilon_2''^2}{\ell} \Rightarrow T_1 = \frac{m_2 \upsilon_2''^2}{\ell} - m_2 g$$

Η τάση πρέπει να παίρνει θετικές τιμές και οριακά το νήμα δεν χαλαρώνει όταν T_1=0N. Η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του για να μην χαλαρώνει το νήμα είναι

$$T_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{m_2 \upsilon_2''^2}{\ell} - m_2 g \geq 0 \Rightarrow \left|\upsilon''_{2\min}\right| = \sqrt{g\ell} = \sqrt{1{,}8} m/s$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από την κατώτερη μέχρι την ανώτερη θέση του σώματος $Σ_2$

$$\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 = m_2 g 2\ell + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2''^2 \Rightarrow \upsilon_2' = 3 m/s$$

β. Η τάση του νήματος υπολογίζεται από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης για την κεντρομόλο δύναμη

$$\Sigma F = F_{κεντρ} \Rightarrow T_2 - m_2 g = m_2 \frac{\upsilon_2'^2}{\ell} \Rightarrow T_2 = 42N$$

γ. Από τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης με ακίνητο το δεύτερο σώμα βρίσκουμε την ταχύτητα του $Σ_1$ ελάχιστα πριν την κρούση

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}\upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_1 = 5\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, που το σώμα έχει ταχύτητα υ_0, μέχρι τη θέση ελάχιστα πριν τη σύγκρουση με το $Σ_2$, που το σώμα έχει ταχύτητα υ_1

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = W_T \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -\mu m_1 g s \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2\mu g s} \Rightarrow \upsilon_0 = 7m/s$$

δ. Παίρνοντας θετικά προς τα δεξιά, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος $Σ_1$ τη στιγμή της ελευθέρωσης είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = \left|F_{ελ}\right| - T \Rightarrow \frac{dp}{dt} = kx_1 - \mu m_1 g \quad (1)$$

Πρέπει να βρούμε τη συμπίεση του ελατηρίου. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από τη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 - 0 = W_T + W_{F,ελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 - 0 = -\mu m_1 g x_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}0{,}3\cdot 7^2 = -0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 10\cdot x_1 + \frac{180}{2}x_1^2 \Rightarrow$$

$$90x_1^2 - 2{,}4x_1 - 7{,}35 = 0 \Rightarrow x_1 \approx 0{,}3m$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε $\frac{dp}{dt} \approx 51{,}6\frac{kgm}{s^2}$.

1.Δ.12

α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_1$ από τη στιγμή που το εκτοξεύουμε μέχρι να συγκρουστεί με το σώμα $Σ_2$

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_o^2 = -μm_1gs \Rightarrow υ_1 = \pm\sqrt{υ_o^2 - 2μgs} \Rightarrow υ_1 = 3m/s$$

β. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_2$ για να βρούμε την ταχύτητά του αμέσως μετά την κρούση

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_{F,ελ} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 = -μm_2gΔ\ell_{max} + 0 - \frac{1}{2}kΔ\ell_{max}^2 \Rightarrow υ_2' = 1m/s$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής βρίσκουμε την ταχύτητα του $Σ_1$ μετά την κρούση

$$m_1υ_1 = m_1υ_1' + m_2υ_2' \Rightarrow υ_1' = -1m/s$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = \frac{9}{4}J$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 = \frac{5}{4}J$$

Επειδή $K_{τελ}<K_{αρχ}$ η κρούση είναι ανελαστική.

γ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_2$ από τη θέση σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει τελικά

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_{Fελ} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2υ_2'^2 = -μm_2gs_{ολ} + 0 - 0 \Rightarrow s_{ολ} = \frac{υ_2'^2}{2μg} = 0,5m$$

δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_1$ από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει, για να βρούμε την απόσταση που διήνυσε μέχρι να σταματήσει

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2}m_1υ_1'^2 = -μm_1gs_1 \Rightarrow s_1 = \frac{υ_1'^2}{2μg} = 0,5m$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο $Σ_1$ είναι

$$π\% = \frac{|W_T|}{K_{αρχ}}100\% = \frac{|μm_1g(s+s_1)|}{\frac{1}{2}m_1υ_o^2}100\% = 50\%$$

1.Δ.13

α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που εκτοξεύσαμε το $Σ_1$ μέχρι τη στιγμή που έχει μετατοπιστεί κατά x_1

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F,ελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_o^2 = -\frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow υ_1 = 1m/s$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής από τη στιγμή που απελευθερώνεται το $Σ_2$ μέχρι τη στιγμή που τα δύο σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα

$$m_1υ_1 = m_1V + m_2V \Rightarrow V = 0,4m/s$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των δύο αυτών θέσεων έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+U\Rightarrow U=1,8J$$

γ. Το ελατήριο δεν έχει μάζα, οπότε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα σε αυτό προκύπτει ότι οι δυνάμεις που του ασκούνται από τα δύο σώματα κάθε στιγμή είναι αντίθετες

$$\Sigma F=m\alpha\Rightarrow\Sigma F=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=0\Rightarrow\vec{F}_1=-\vec{F}_2$$

Όμως η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο κάθε σώμα είναι η αντίδραση της δύναμης που δέχεται από το σώμα αυτό, άρα οι δυνάμεις που δέχονται τα δύο σώματα από το ελατήριο είναι κάθε χρονική στιγμή αντίθετες μεταξύ τους, δηλαδή

$$\vec{F}_1=-\vec{F}_2\Rightarrow m_1\vec{\alpha}_1=-m_2\vec{\alpha}_2\Rightarrow\vec{\alpha}_1=-\frac{3}{2}\vec{\alpha}_2\quad\Rightarrow\frac{\vec{\alpha}_1}{\vec{\alpha}_2}=-\frac{3}{2}$$

δ. Τη στιγμή που τα δύο σώματα έχουν ίδιες ταχύτητες το ελατήριο βρίσκεται σε επιμήκυνση μεγαλύτερη από x_1. Στη συνέχεια οι δυνάμεις του ελατηρίου επιβραδύνουν το σώμα Σ_1, ενώ επιταχύνουν το σώμα Σ_2, με συνέπεια η μεταξύ τους απόσταση να μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι κάποια στιγμή το ελατήριο θα αποκτήσει πάλι επιμήκυνση ίση με x_1.

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης του Σ_2 και της θέσης που το ελατήριο αποκτά πάλι επιμήκυνση ίση με x_1 έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_1{}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2+\frac{1}{2}kx_1{}^2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2\quad(1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής μεταξύ των παραπάνω θέσεων έχουμε

$$m_1\upsilon_1=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'\ (2)$$

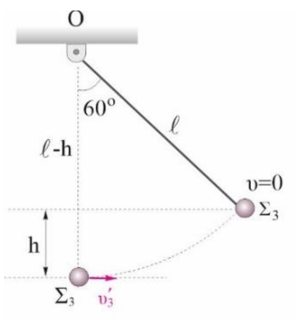
Από την επίλυση του συστήματος των (1) και (2) έχουμε δύο σύνολα λύσεων

$\upsilon_1'=1m/s,\upsilon_2'=0$ ή

$\upsilon_1'=-0,2m/s,\upsilon_2'=0,8m/s$

Η πρώτη λύση δίνει την 1η φορά που το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x_1 και η δεύτερη λύση τη 2η φορά.

1.Δ.14



α. Από τη γεωμετρία του σχήματος για την κίνηση του Σ_3 βρίσκουμε τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση που ανέρχεται αυτό μετά την κρούση

$$\sigma\upsilon\nu 60^0=\frac{\ell-h}{\ell}\Rightarrow h=0,2m$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την κίνηση του Σ_3 από την κατώτερη μέχρι την ανώτερη θέση του για να βρούμε την ταχύτητά του αμέσως μετά την κρούση

$$\frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2=m_3gh\Rightarrow\upsilon_3'=2m/s$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση των δύο σωμάτων για να βρούμε την ταχύτητα της μπίλιας ελάχιστα πριν την κρούση

$$m_2\upsilon_2' = m_2\upsilon_2'' + m_3\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = 3m/s$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

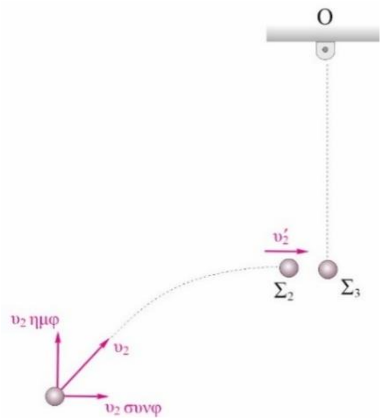
$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 0{,}18J$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2 + \frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2 = 0{,}18J = K_{\alpha\rho\chi}$$

Άρα η κρούση είναι ελαστική.

β. Κατά την κίνηση του σώματος Σ_2 μέχρι την κρούση δεν του ασκείται δύναμη στον οριζόντιο άξονα, οπότε η ταχύτητα υ_2' πριν την κρούση, αποτελεί την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του στον αέρα και παραμένει διαρκώς σταθερή



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_{2x} = \upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_2'}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = 6m/s$$

Άρα, η κινητική ενέργεια του βλήματος είναι

$$K_{\beta\lambda} = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = 0{,}72J$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος βλήμα - κανόνι στον οριζόντιο άξονα βρίσκεται η ταχύτητα του κανονιού αμέσως μετά την κρούση

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = m_2\upsilon_2' + m_1\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = -2m/s$$

Η κινητική ενέργεια του κανονιού είναι

$$K_{\kappa\alpha\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = 0{,}12J$$

Άρα, η ενέργεια που ελευθερώθηκε από το κανονάκι ισούται με την κινητική ενέργεια του συστήματος κανόνι - μπίλια και θα είναι

$$E = K_{o\lambda} = K_{\beta\lambda} + K_{\kappa\alpha\nu} = 0{,}84J$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το κανόνι αμέσως μετά την εκτόξευση μέχρι να σταματήσει να κινείται

$$Q = K_{\kappa\alpha\nu} = 0{,}12J$$

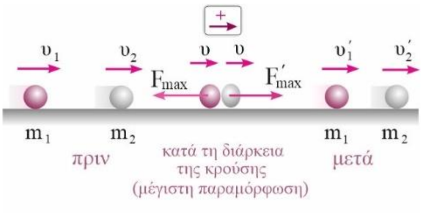
δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κανονιού είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} = \Sigma F\upsilon_1 = T\upsilon_1\sigma\upsilon\nu180^0 = -\mu m_1 g\upsilon_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -0{,}48J/s$$

1.Δ.15

α. Η ολική ορμή διατηρείται γιατί σε όλη τη διάρκεια της κρούσης οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις έχουν συνισταμένη μηδέν.
Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος δε διατηρείται γιατί οι ασκούμενες εσωτερικές δυνάμεις παραμορφώνουν τα σώματα και παράγουν έργο.

β. Κατά τη διάρκεια της κρούσης οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις μεταβάλλουν τα μέτρα των ταχυτήτων. Όταν τα σώματα βρίσκονται στη μέγιστη παραμόρφωσή τους έχουν κοινή ταχύτητα ($t=t_2$).
Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής μεταξύ των στιγμών λίγο πριν συγκρουστούν και τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης που οι σφαίρες έχουν κοινή ταχύτητα υ

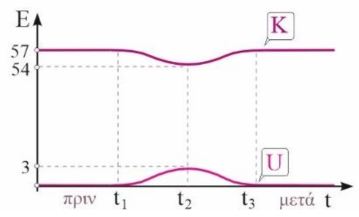


$p_{αρχ} = p_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \Rightarrow \upsilon = 6\,m/s$

γ. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ των δύο παραπάνω χρονικών στιγμών παίρνουμε

$$K_{αρχ} = K_{παρ} + U_{παρ.(max)} \Rightarrow U_{παρ.(max)} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 \Rightarrow$$
$$U_{παρ.(max)} = 57\,J - 54\,J \Rightarrow U_{παρ.(max)} = 3\,J$$

δ.



ε. $W_{F_2} = K'_2 - K_2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \quad (1)$

$$\upsilon'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon'_2 = 8\,m/s$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε $W_{F2} = 24$ J.

1.Δ.16

α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τη σφαίρα $Σ_1$, μεταξύ των θέσεων (Α) και (Β), ελάχιστα πριν την κρούση και με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη χαμηλότερη θέση της $Σ_1$, παίρνουμε

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1{υ_0}^2 + m_1 g\left(\ell - \ell συν60^0\right) = \frac{1}{2}m_1{υ_1}^2 + 0 \Rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{{υ_0}^2 + g\ell} \Rightarrow υ_1 = 5m/s$$

β. Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση είναι

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -2,6m/s$$

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = 2,4m/s$$

γ. Το κλάσμα της ενέργειας του $Σ_1$ που μεταφέρθηκε στο $Σ_2$, είναι

$$α = \frac{K_2'}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} \Rightarrow α = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} \Rightarrow α \approx 0,73$$

δ. Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \ K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow K_1 = 2K_1' \Rightarrow \ \frac{1}{2}m_1{υ_1}^2 = 2\frac{1}{2}m_1υ_1'^2 \Rightarrow υ_1' = \pm\frac{υ_1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = \pm\frac{υ_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (m_1 - m_2)\sqrt{2} = m_1 + m_2 \quad (1)$$

ή $$(m_1 - m_2)\sqrt{2} = -(m_1 + m_2) \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

1.Δ.17

α. Επειδή το συσσωμάτωμα επέστρεψε στην αρχική θέση του ξύλου, από την ΑΔΜΕ προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας V του συσσωματώματος είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας $υ_1$ που είχε το ξύλο ελάχιστα πριν την κρούση. Η ΑΔΟ για την κρούση, λαμβάνοντας ως θετική φορά προς τα πάνω, δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow mυ_0 - M|υ_1| = (m+M)V \Rightarrow mυ_0 - MV = (m+M)V \Rightarrow V = |υ_1| = 2m/s$$

Το χρονικό διάστημα που διήρκησε η ελεύθερη πτώση του ξύλου, προκύπτει από τον τύπο της ταχύτητας για την ελεύθερη πτώση

$$|υ_1| = gt_1 \Rightarrow t_1 = 0,2s$$

β. Το ποσό θερμότητας που αναπτύχθηκε είναι

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2}mυ_o^2 + \frac{1}{2}M|υ_1|^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 1616J$$

γ. Η μεταβολή της ορμής του ξύλου είναι

$$\Delta p_\xi = MV - M\upsilon_1 = MV - M(-V) \Rightarrow \Delta p_\xi = 2MV = 8kgm/s$$

δ. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα V. Είναι

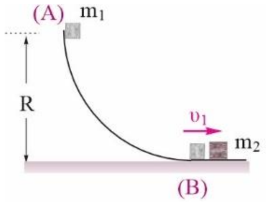
$$\upsilon = V - gt_2 \Rightarrow 0 = V - gt_2 \Rightarrow t_2 = 0,2s$$

και το ύψος που θα ανέλθει από το σημείο της κρούσης είναι

$$h = Vt_2 - \frac{1}{2}gt_2^{\,2} \Rightarrow h = 0,2m$$

1.Δ.18

α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σώμα μάζας m_1, μεταξύ των θέσεων (Α) και (Β), θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από τη θέση (Β), παίρνουμε



$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow 0 + m_1 gR = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{\,2} + 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gR} \Rightarrow \upsilon_1 = 3m/s$$

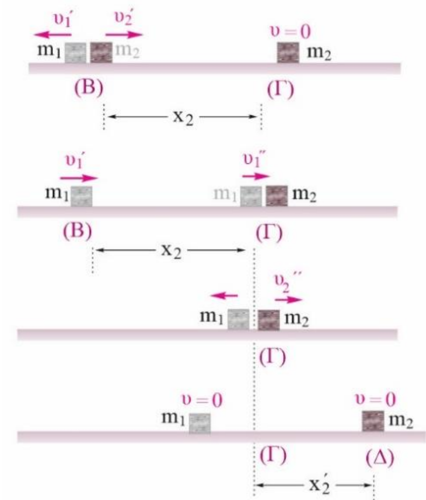
β. Η κρούση είναι ελαστική και εφόσον το σώμα μάζας m_1 δίνει το 64% της κινητικής του ενέργειας στο σώμα μάζας m_2, του μένουν τα 36% της αρχικής κινητικής του ενέργειας

$$K_1' = 36\%K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m|\upsilon_1'|^2 = \frac{36}{100}\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow |\upsilon_1'| = 0,6\upsilon_1$$

Η κρούση είναι κεντρική και το σώμα μάζας m_1 επιστρέφει προς τα πίσω, επομένως

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow -0,6\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow m_1 = 1kg$$

γ. Για τα σώματα αμέσως μετά την κρούση, οι ταχύτητές τους είναι



$$\upsilon_1' = -0,6\upsilon_1 = -1,8\ m/s\ ,\quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 1,2\,m/s$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το $Σ_2$ μεταξύ των θέσεων (Β) και (Γ) όπου θα σταματήσει

$$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^{\,2} = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^{\,2} = -\mu m_2 g x_2 \Rightarrow x_2 = 0,6m$$

δ. Μετά την κρούση, το $Σ_1$ ανέρχεται στο λείο τεταρτοκύκλιο και επιστρέφει στη θέση (Β) με ταχύτητα ίδιου μέτρου υ'_1 και επειδή $|\upsilon_1'| > \upsilon'_2$, θα φτάσει μέχρι το $Σ_2$ που είχε σταματήσει στη θέση (Γ) και θα το χτυπήσει.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το $Σ_1$ μεταξύ των θέσεων (Β) και (Γ) για να βρούμε την ταχύτητα του $Σ_1$ λίγο πριν αυτό κτυπήσει για δεύτερη φορά το $Σ_2$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1''^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2=W_T=-\mu m_1 g x_2 \Rightarrow \upsilon_1''=\sqrt{\upsilon_1'^2-2\mu g x_2}\Rightarrow \upsilon_1''=\sqrt{1{,}8}\,\frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα του $Σ_2$ μετά τη δεύτερη κρούση με το $Σ_1$ είναι

$$\upsilon_2''=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1'' \Rightarrow \upsilon_2''=0{,}4\sqrt{1{,}8}\,m/s$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το $Σ_2$ μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ) για να βρούμε που θα σταματήσει οριστικά

$$0-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2=W_T=-\mu m_2 g x_2' \Rightarrow x_2'=0{,}12\ m$$

Η συνολική απόσταση που θα διανύσει το $Σ_2$ στο οριζόντιο επίπεδο είναι

$$x_{ολ}=x_2+x_2'=0{,}6m+0{,}12\ m \Rightarrow x_{ολ}=0{,}72m$$

1.Δ.19

α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το ξύλο, μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση και με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη χαμηλότερη θέση του ξύλου, παίρνουμε

$$E_{αρχ}=E_{τελ}\Rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\Rightarrow 0+Mg\ell=\frac{1}{2}M|\upsilon_1|^2+0\Rightarrow|\upsilon_1|=\sqrt{2g\ell}=4m/s$$

β. Η ΑΔΟ για την κρούση, λαμβάνοντας ως θετική φορά προς τα δεξιά, δίνει

$$p_{αρχ}=p_{τελ}\Rightarrow m\upsilon_0-M|\upsilon_1|=(m+M)V\Rightarrow m\upsilon_0-(3-m)|\upsilon_1|=3V\Rightarrow m=0{,}1kg\ \text{και}\ M=2{,}9kg$$

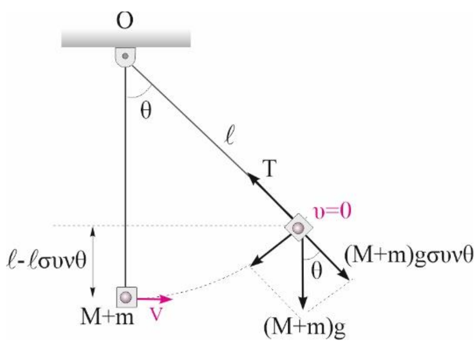
γ. Η μηχανική ενέργεια που έχασε το βλήμα είναι

$$|\Delta E_\beta|=K_\beta-K_\beta'=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2-\frac{1}{2}mV^2\Rightarrow|\Delta E_\beta|=1999{,}6J$$

δ. Η ΑΔΜΕ για την κίνηση του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει, δίνει

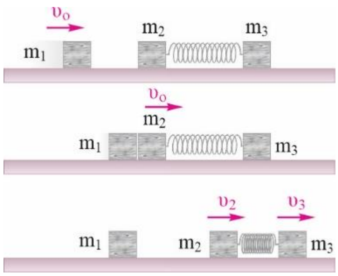
$$E_{αρχ}=E_{τελ}\Rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}(m+M)V^2+0=0+(m+M)g(\ell-\ell συνθ)\Rightarrow$$
$$συνθ=0{,}51$$

Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του συσσωματώματος, η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας γίνεται μηδέν, αφού το σώμα σταματάει, άρα η τάση του νήματος είναι



$$\Sigma F=F_\kappa\Rightarrow T-(m+M)gσυνφ=0\Rightarrow T=(m+M)gσυνφ=15{,}3N$$

1.Δ.20



α. Μετά την 1η κρούση τα m_1 και m_2 ανταλλάσσουν ταχύτητες, άρα $\upsilon_2=\upsilon_0=10m/s$.

β. Στη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου έχουμε $\upsilon'_2=\upsilon'_3=\upsilon$. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα m_2-m_3 μεταξύ της στιγμής έναρξης κίνησης του Σ_2 και της στιγμής της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου

$$m_2\upsilon_o=(m_2+m_3)\upsilon \Rightarrow \upsilon=\frac{\upsilon_o}{2}=5\,m/s$$

γ. $\dfrac{d\vec{p}_3}{dt}=\Sigma\vec{F} \Rightarrow \dfrac{dp_3}{dt}=F_{\varepsilon\lambda}=-kx \qquad (1)$

Ο ρυθμός γίνεται μέγιστος όταν $x=-x_{max}$.

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση ενέργειας για το σύστημα (m_2-m_3-ελατήριο) μεταξύ της στιγμής έναρξης κίνησης του Σ_2 και της στιγμής της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_o^2=\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+\frac{1}{2}m_3\upsilon^2+\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Αντικαθιστώντας όπου $\upsilon=\dfrac{\upsilon_o}{2}$ έχουμε

$$\frac{m\upsilon_o^2}{2}=kx_{max}^2 \Rightarrow x_{max}=\sqrt{\frac{m\upsilon_o^2}{2k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}m$$

και η σχέση (1) δίνει $\left|\dfrac{dp_3}{dt}\right|=kx_{max}=50\sqrt{2}\,kg\,m/s^2$

δ. $\dfrac{dK_3}{dt}=\dfrac{dW_{F\varepsilon\lambda}}{dt}=F_{\varepsilon\lambda}\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{dK_3}{dt}=k\,x\cdot\upsilon$

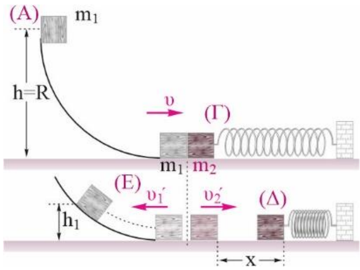
Με αντικατάσταση $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$ και $\upsilon=5m/s$ προκύπτει

$$\frac{dK_3}{dt}=250\sqrt{2}\,J/s$$

ε. $U=\dfrac{1}{2}k\,x_{max}^2=25J$, $K_{\alpha\rho\chi}=\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_o^2=50J$

$$\pi(\%)=\frac{U}{K_{\alpha\rho\chi}}100\%=50\%$$

1.Δ. 21



Α. α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σώμα $Σ_1$ μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ) βρίσκουμε την ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση

$$\frac{1}{2}m_1υ^2 = m_1 gR \Rightarrow υ=\sqrt{2gR}=4m/s$$

β. $$υ_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 \Rightarrow υ_1'=-2m/s$$

$$υ_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1 \Rightarrow υ_2'=2m/s$$

Β. α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σώμα $Σ_1$ μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Ε) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}m_1υ_1'^2=m_1gh_1 \Rightarrow h_1=\frac{υ_1'^2}{2g} \Rightarrow h_1=0{,}2m$$

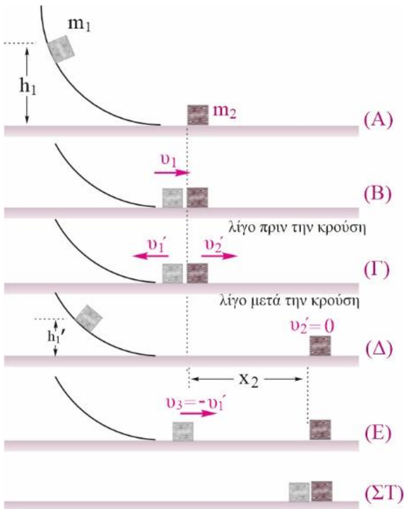
β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το $Σ_2$ μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ)

$$0-\frac{1}{2}m_2υ_2'^2=-\frac{1}{2}kx^2-μm_2gx \Rightarrow x^2+0{,}1x-0{,}12=0 \Rightarrow x=0{,}3m$$

γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το $Σ_2$ μεταξύ της θέσης (Γ) και της τελικής

$$0-\frac{1}{2}m_2υ_2'^2=-μm_2gs_{ολ} \Rightarrow s_{ολ}=\frac{υ_2'^2}{2μg} \Rightarrow s_{ολ}=1{,}2m$$

1.Δ.22



Α. α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το $Σ_2$ μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ)

$$0-\frac{1}{2}mυ_2'^2=-μmgx_2 \Rightarrow υ_2'=\sqrt{2μgx_2} \Rightarrow υ_2'=2m/s$$

β. Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύουν

$$υ_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 \quad (1) \qquad υ_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει $υ_1=4m/s$.
Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $υ_2=-2m/s$.

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το $Σ_1$ μεταξύ των θέσεων (Α) και (Β)

$$m_1gh_1=\frac{1}{2}m_1υ_1^2 \Rightarrow h_1=0{,}8m$$

γ. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το $Σ_1$ μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ)

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1 g h_1' \Rightarrow \quad h_1' = 0{,}2\,m$$

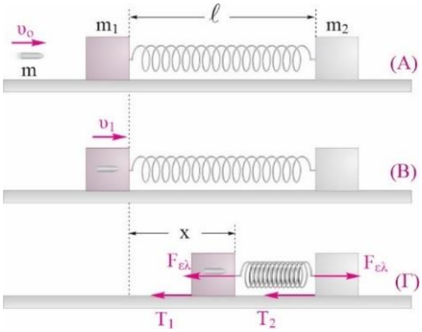
$\Delta h = h_1 - h'_1$ ή $\Delta h = 0{,}6$ m

δ. Επειδή το τεταρτοκύκλιο είναι λείο, το Σ_1 θα ξαναπεράσει από το σημείο Β κινούμενο με ταχύτητα

$\upsilon_3 = -\upsilon'_1$ ή $\upsilon_3 = 2$m/s

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου ενέργειας για το Σ_1 μεταξύ των θέσεων (Ε) και (ΣΤ) βρίσκουμε ότι το Σ_1 θα διανύσει απόσταση $x_2 = 1$m. Άρα, όταν τα σώματα σταματήσουν τελικά θα βρίσκονται στην ίδια θέση.

1.Δ.23



α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση

$m\upsilon_o = (m+m_1)\upsilon_1$ ή $\upsilon_1 = 10$m/s

β. Από την αρχή διατήρησης ενέργειας για το σύστημα μεταξύ των θέσεων (Β) και (Γ) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}(m+m_1)\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + Q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+m_1)\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu_1(m+m_1)gx \Rightarrow$$

$$95x^2 + 5x - 100 = 0 \quad \Rightarrow x = 1m$$

γ. Στη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου για το Σ_2 ισχύει

$\Sigma F = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = T_2$ ή $kx = \mu_2 m_2 g$ ή $m_2 = \dfrac{kx}{\mu_2 g} = 10kg$

δ. $$\frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2}100\% = \frac{0{,}1\cdot 100^2 - 95\cdot 1^2}{0{,}1\cdot 100^2}100\% \Rightarrow \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = 90{,}5\%$$

ε. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης ενέργειας, η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα μετατραπεί σε θερμότητα η οποία ισούται με το απόλυτο του έργου της τριβής που ασκείται στο συσσωμάτωμα

$$U = Q \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = T\cdot s_{o\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \mu_1(m+m_1)g\cdot s_{o\lambda} \Rightarrow s_{o\lambda} = \frac{kx^2}{2\mu_1(m+m_1)g} \Rightarrow s_{o\lambda} = 19m$$

1.Δ. 24

α. Η σφαίρα $Σ_1$ θα αποκτήσει επιτάχυνση

$$α_1 = \frac{ΣF}{m_1} = -\frac{μ m_1 g}{m_1} \Rightarrow α_1 = -2,5\,m/s^2$$

$$Δx_1 = υ_{o1}t + \frac{1}{2}α_1 t^2 \text{ ή } x_1-(-7,2) = 10t-1,25t^2 \text{ ή } x_1 = -7,2+10t-1,25t^2$$

$$Δx_2 = υ_{o2}t \text{ ή } x_2-7,2 = -9t \text{ ή } x_2 = 7,2-9t$$

Όταν συναντηθούν

$$x_1 = x_2 \text{ ή } -7,2+10t-1,25t^2 = 7,2+9t \text{ ή } 1,25t^2-19t+14,4 = 0 \text{ ή } t = 0,8s \;,\; x_1 = x_2 = 0m$$

β. Η σύγκρουση θα γίνει στη θέση x=0m και η σφαίρα $Σ_1$ θα έχει πριν τη σύγκρουση ταχύτητα

$$υ_1 = υ_{o1}+αt \text{ ή } υ_1 = 8m/s$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ και έχουμε

$$m_1υ_1+m_2υ_2 = (m_1+m_2)V_K \text{ ή } V_K = -2,2m/s$$

γ. Το συσσωμάτωμα θα κινηθεί στο επίπεδο με την τριβή και θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $α = -2,5m/s^2$. Γράφοντας τις εξισώσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης και α-παλείφοντας τον χρόνο βρίσκουμε

$$s_{ολ} = \frac{V_κ^2}{2|α|} \Rightarrow s_{ολ} = 0,968m$$

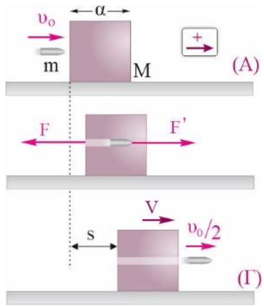
Το συσσωμάτωμα θα σταματήσει στη θέση $x = -0,968m$.

δ. $$Q_{κρ} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_K^2 \Rightarrow Q_{κρ} = 104J$$

$$K_{ολ(αρχ)} = \frac{1}{2}m_1υ_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2υ_{02}^2 = 132,9J$$

$$\frac{Q_{κρ}}{K_{ολ(αρχ)}}100\% = \frac{104}{132,9}100\% \Rightarrow \frac{Q_{κρ}}{K_{ολ(αρχ)}} = 78,3\%$$

1.Δ.25



α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στο σύστημα m, M και έχουμε

$$m\upsilon_o = \frac{m\upsilon_o}{2} + MV \Rightarrow V = \frac{m\upsilon_o}{2M} = 5\,m/s$$

β. $W_F = \Delta K \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}MV^2 - 0 \Rightarrow W_F = 12{,}5J$

γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για τον κύβο μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ)

$$\frac{1}{2}MV^2 - 0 = F'\cdot s \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το βλήμα μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ)

$$\frac{1}{2}\frac{m\upsilon_o^2}{4} - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -F(s+\alpha) \quad (2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι F=F΄, ο συνδυασμός των (1) και (2) δίνει

$$s = \frac{4MV^2\alpha}{3m\upsilon_o^2 - 4MV^2} \Rightarrow s = 7\cdot 10^{-3}m$$

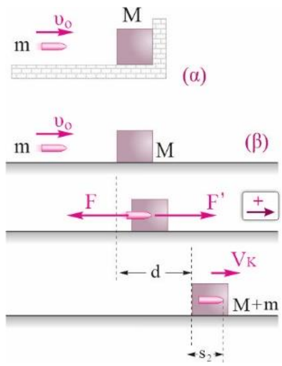
δ. Η δύναμη που ασκείται στον κύβο του προσδίδει επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{F'}{M}\ ,\ \ V = \alpha\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{V\cdot M}{F'}$$

Από την (1) προκύπτει $F' = \frac{MV^2}{2s}$

$$\Delta t = \frac{2s}{V} = \frac{2\cdot 7\cdot 10^{-3}}{5}s \Rightarrow \Delta t = 2{,}8ms$$

1.Δ.26



α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στο σύστημα m, M και έχουμε
$m\upsilon_o = (m+M)V_K$ ή $V_K = 5m/s$

β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το βλήμα στην 1η περίπτωση (σχήμα α)

$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -Fs_1 \Rightarrow F = 5\cdot 10^3\ N$$

γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το βλήμα στη 2η περίπτωση (σχήμα β). Με d συμβολίζουμε τη μετατόπιση του ξύλου στη διάρκεια της κρούσης

$$\frac{1}{2}mV_K^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -F(d+s_2) \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το ξύλο στη 2η περίπτωση

$$\frac{1}{2}MV_K^2 - 0 = F'd \Rightarrow d = 4,75 \cdot 10^{-3} m$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει

$d + s_2 = 9,975cm$ ή $s_2 = 9,5cm$

δ. Στην 1η περίπτωση $\frac{Q_1}{K_1}100\% = 100\%$.

Στη 2η περίπτωση

$$\frac{Q_2}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2}100\% \Rightarrow \frac{Q_2}{K_1}100\% = 95\%$$

ε. Το βλήμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 100 m/s και τελική ταχύτητα 5m/s και επιτάχυνση

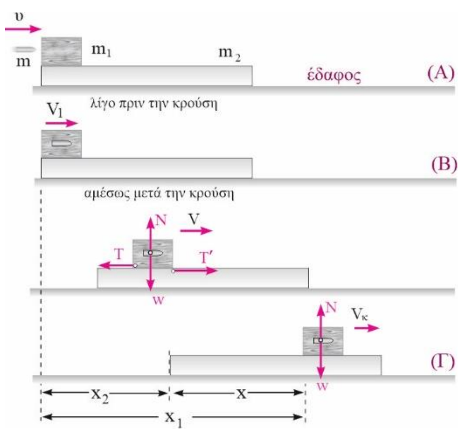
$$\alpha = \frac{F}{m} = -5 \cdot 10^4 \, m/s^2$$

$V_K = \upsilon_o + \alpha t$ ή $5 = 100 + (-5 \cdot 10^4)t$ ή $t = 1,9ms$.

1.Δ.27

α. θεωρούμε σαν σύστημα το βλήμα και το $Σ_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ μεταξύ των θέσεων (Α) και (Β) λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση

$$m\upsilon = (m+m_1)V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m\upsilon}{m+m_1} \Rightarrow V_1 = 5m/s$$



Το συσσωμάτωμα $(m+m_1)$ θα ολισθήσει πάνω στην πλάκα (m_2) μεταφέροντας σε αυτήν μέρος της ορμής του. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα των τριών σωμάτων $(m+m_1+m_2)$ μεταξύ της στιγμής της ενσφήνωσης του βλήματος στο $Σ_1$ (θέση Β) και της στιγμής που το σύστημα έχει αποκτήσει κοινή ταχύτητα V_K (θέση Γ)

$$V_\kappa = \frac{(m+m_1)V_1}{(m+m_1+m_2)} \Rightarrow V_\kappa = 1m/s$$

β. Η αναπτυσσόμενη στο σύστημα θερμότητα οφείλεται στην πλαστική κρούση του βλήματος και στην τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των $Σ_1$ και $Σ_2$ μέχρι αυτά να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα. Είναι αριθμητικά ίδια με τη διαφορά της κινητικής ενέργειας του συστήματος

$$Q = K_{(A)} - K_{(\Gamma)} \Rightarrow Q = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}(m + m_1 + m_2)V_\kappa^2 \Rightarrow Q = 247{,}5\ J$$

γ. $x = x_1 - x_2$ (1)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το Σ_2

$$\frac{1}{2}m_2 V_K^2 - 0 = T' x_2 \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το Σ_1

$$\frac{1}{2}(m_1 + m)V_K^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m)V_1^2 = -T \cdot x_1 \quad (3)$$

Το μέτρο της αναπτυσσόμενης τριβής T μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι

$T = T' = \mu(m+m_1)g$ ή $T = 5N$

Με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει $x_2 = 0{,}4m$.

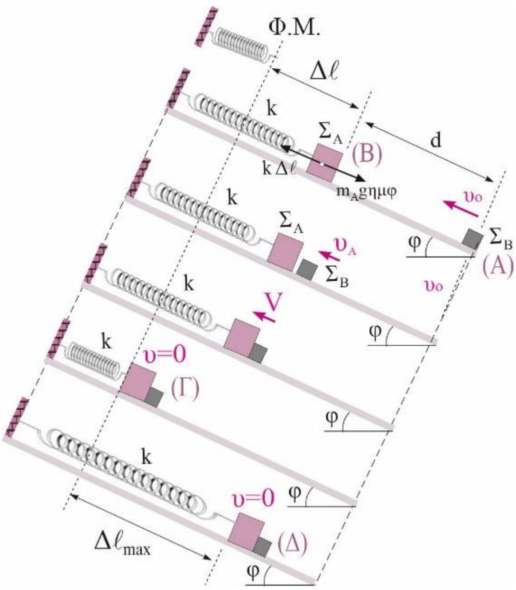
Με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει $x_1 = 2{,}4m$.

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $x = 2m$.

δ. Η σανίδα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$\alpha_2 = \frac{T'}{m_2} = 1{,}25\,m/s^2\ ,\ V_K = \alpha_2 t\ ,\ t = 0{,}8s$$

1.Δ.28



α. Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ_A βρίσκουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow m_A g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_A g\eta\mu\varphi}{k} = 0{,}1m$$

Σε αυτή τη θέση η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = 0{,}5J$$

β. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα μεταξύ της θέσης της σύγκρουσης (Β) και της θέσης φυσικού μήκους του ελατηρίου (Γ)

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_B + W_{F,\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 = -(m_A + m_B)g\eta\mu\varphi\Delta\ell + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{5}{6}}\,m/s$$

γ. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση για να βρούμε την ταχύτητα που έχει το σώμα $Σ_B$ ελάχιστα πριν την κρούση

$$m_B υ_B = (m_A + m_B)V \Rightarrow υ_B = \frac{\sqrt{30}}{4} m/s$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_B$ από τη βάση του πλάγιου επιπέδου (Α) μέχρι το σημείο σύγκρουσης (Β) $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m_B υ_B^2 - \frac{1}{2}m_B υ_o^2 = -m_B gημφd \Rightarrow d = 0{,}7125m$

δ. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ αμέσως μετά τη σύγκρουση (Β) μέχρι τη θέση μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου (Δ)

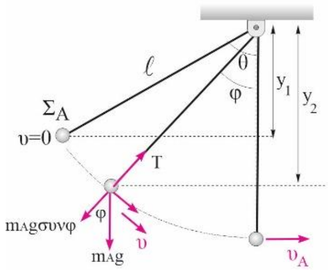
$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_{F,ελ} \Rightarrow -\frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 = (m_A + m_B)gημφ(\Delta\ell_{max} - \Delta\ell) + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow$$

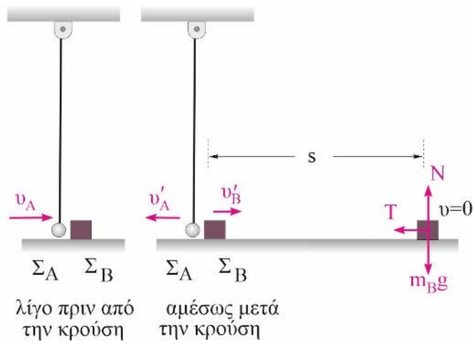
$$\Delta\ell_{max} = 0{,}6m$$

Άρα η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 = 18J$$

1.Δ.29





α. Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει

$$συνθ = \frac{y_1}{\ell} \Rightarrow y_1 = \ell συνθ$$

$$συνφ = \frac{y_2}{\ell} \Rightarrow y_2 = \ell συνφ$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ ανάμεσα στις δύο θέσεις

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Rightarrow m_A g(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}m_A υ^2 \Rightarrow υ = 2\sqrt{3} m/s$$

Από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης για την κεντρομόλο δύναμη βρίσκουμε την τάση του νήματος

$$ΣF = F_{κεντρ} \Rightarrow T - m_A gσυνφ = \frac{m_A υ^2}{\ell} \Rightarrow T = 10N$$

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από το σημείο που αφήσαμε το σώμα μέχρι την κατακόρυφη θέση για να βρούμε την ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Rightarrow m_A g(\ell - y_1) = \frac{1}{2} m_A υ_A^2 \Rightarrow υ_A = 6m/s$$

Από τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης βρίσκουμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση

$$υ_A^{'} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} υ_A = -2m/s$$

$$υ_B^{'} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} υ_A = 4m/s$$

γ. Το ποσοστό είναι ίσο με

$$π\% = \frac{K_B^{'}}{K_A} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_B υ_B^{'2}}{\frac{1}{2} m_A υ_A^2} 100\% \Rightarrow π\% = \frac{800}{9}\%$$

δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_B$ για να βρούμε τη μετατόπισή του μέχρι να σταματήσει

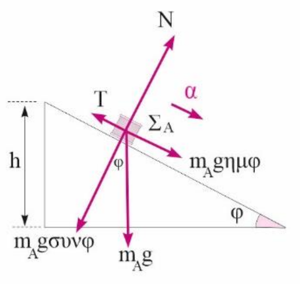
$$W_T = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow -μm_B g s = 0 - \frac{1}{2} m_B υ_B^{'2} \Rightarrow s = 1m$$

Η θερμότητα που παράχθηκε στη διάρκεια του φαινομένου είναι

$$Q = |W_T| = |-μm_B g s| = 16J$$

1.Δ.30

α. Η επιτάχυνση του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο είναι



$$ΣF_x = m_A α \Rightarrow w_{2x} - T = m_A α \Rightarrow m_A gημφ - μm_A gσυνφ = m_A α \Rightarrow$$
$$α = g(ημφ - μσυνφ) \Rightarrow α = 2m/s^2$$

Το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι

$$ημφ = \frac{h}{s} \Rightarrow s = 3m$$

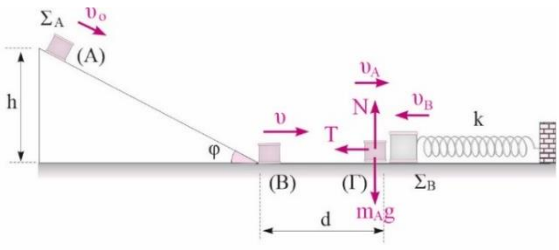
Το χρονικό διάστημα κίνησης κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου βρίσκεται από την εξίσωση μετατόπισης - χρόνου

$$s = υ_o t + \frac{1}{2} α t^2 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0,\ Δ = 16$$

$$t = \frac{-2 \pm 4}{2} s \Rightarrow t = 1s$$

β. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_A$ στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου είναι

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha t = 4m/s$$



Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_A$ για την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι την κρούση, για τις θέσεις (B) και (Γ)

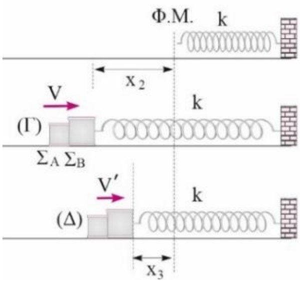
$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m_A\upsilon^2 = -\mu m_A g d \Rightarrow \ \upsilon_A = 3m/s$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$m_A\upsilon_A - m_B|\upsilon_B| = (m_A + m_B)V \Rightarrow V = 2m/s$$

δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα ανάμεσα στις δύο θέσεις (Γ) και (Δ)



$$W_T + W_{F,ελ} = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow$$

$$-\mu(m_A + m_B)g(x_2 - x_3) + \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_3^2 = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow$$

$$100x_3^2 - 25x_3 + 1 = 0, \Delta = 225$$

$$x_3 = \frac{25 \pm 15}{200}m \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_3 = 0,2m \\ x_3 = 0,05m \end{Bmatrix}$$

Την πρώτη φορά που το σώμα αποκτά την κινητική ενέργεια 17J βρίσκεται αριστερά από το φυσικό μήκος του ελατηρίου σε απόσταση 0,2m από αυτό. Άρα η μετατόπιση του σώματος είναι

$$\Delta x = 0,4m - 0,2m = 0,2m$$

ε. Α΄ τρόπος

Το έργο τριβής κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου δίνει τη θερμότητα Q_1

$$Q_1 = |W_T| = |-\mu m_A g συνφ s| \Rightarrow Q_1 = 48J$$

Το έργο τριβής κατά μήκος του οριζοντίου επιπέδου δίνει τη θερμότητα Q_2

$$Q_2 = |W_T| = |-\mu m_A g d| \Rightarrow \ Q_2 = 14J$$

Η θερμότητα λόγω της πλαστικής κρούσης είναι

$$Q_3 = \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 \Rightarrow Q_3 = 10J$$

Το έργο της τριβής κατά την επιστροφή του συσσωματώματος από το σημείο σύγκρουσης μέχρι τη θέση που το συσσωμάτωμα αποκτάει κινητική ενέργεια 17J για πρώτη φορά δίνει τη θερμότητα Q_4

$$Q_4 = |W_T| = |-\mu(m_A + m_B)g(x_2 - x_3)| \Rightarrow Q_4 = 5J$$

Άρα, η συνολική θερμότητα είναι $Q_{ολ}=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4 \Rightarrow Q_{ολ}=77J$

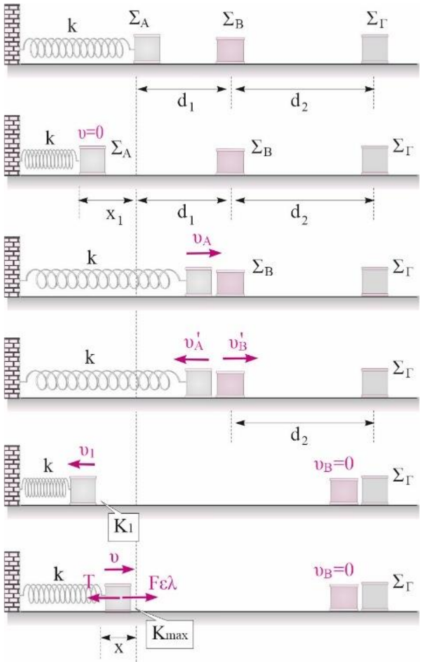
Β΄ τρόπος

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα των δύο σωμάτων μεταξύ των αρχικών θέσεων των σωμάτων και της θέσης που το συσσωμάτωμα έχει για 1η φορά κινητική ενέργεια 17J, έχουμε

$$E_{Μηχ(A)}+E_{Μηχ(B)}=E_{Μηχ(συσ)}+Q_{ολ} \Rightarrow Q_{ολ}=\left(m_A gh+\frac{1}{2}m_A υ_o^2\right)+\left(\frac{1}{2}m_B υ_B^2+\frac{1}{2}kx_2^2\right)-\left(K_{συσ}+\frac{1}{2}kx_3^2\right)\Rightarrow$$

$$Q_{ολ}=80J+18J-21J \Rightarrow Q_{ολ}=77J$$

1.Δ.31



α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_A$ από το σημείο εκτόξευσης μέχρι ελάχιστα πριν συγκρουστεί με το $Σ_B$

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_T+W_{F,ελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_A υ_A^2-\frac{1}{2}m_A υ_o^2=-μm_A g(x_1+d_1)+\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kd_1^2 \Rightarrow$$

$$υ_A=3m/s$$

β. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_A$ αμέσως μετά τη σύγκρουση μέχρι να επανέλθει στη θέση εκτόξευσης

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_T+W_{F,ελ} \Rightarrow$$

$$K_1-\frac{1}{2}m_A υ_A'^2=-μm_A g(x_1+d_1)+\frac{1}{2}kd_1^2-\frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$|υ_A'|=2m/s \Rightarrow υ_A'=-2m/s$$

Από τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε

$$υ_A'=\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}υ_A \Rightarrow m_B=10Kg$$

γ. Η ταχύτητα του $Σ_B$ αμέσως μετά την κρούση είναι

$$υ_B'=\frac{2m_A}{m_A+m_B}υ_A=1m/s$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_B$ αμέσως μετά τη σύγκρουση μέχρι το σώμα $Σ_B$ να διανύσει την απόσταση d_2

$$W_T=K_{τελ}-K_{αρχ} \Rightarrow -μm_B g d_2=\frac{1}{2}m_B υ_B''^2-\frac{1}{2}m_B υ_B'^2 \Rightarrow υ_B''=0$$

Άρα το σώμα $Σ_B$ ακινητοποιείται στη θέση που βρίσκεται το σώμα $Σ_Γ$.

δ. Το σώμα έχει μέγιστη κινητική ενέργεια τη στιγμή που η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδενική

$$ΣF=0 \Rightarrow F_{ελ}-T=0 \Rightarrow kx=μm_A g \Rightarrow x=\frac{11}{400}m$$

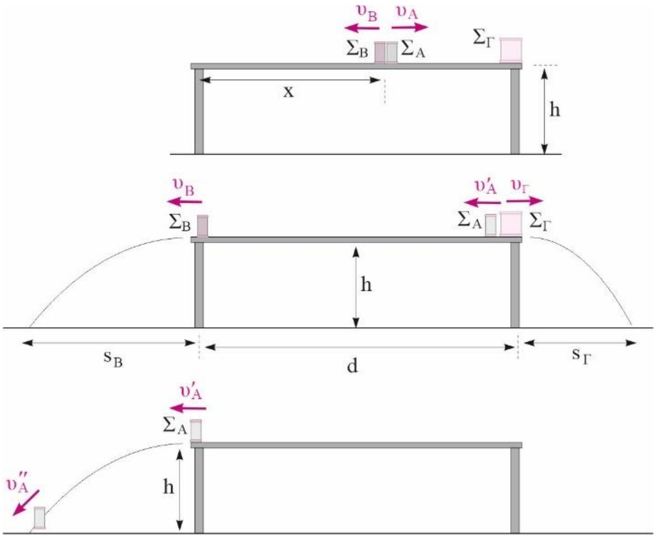
Σε αυτή τη θέση η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = 15,125 \cdot 10^{-2} J$$

1.Δ.32

α. Η μετατόπιση του σώματος πάνω στο τραπέζι πριν πάθει διάσπαση είναι

$$x = \upsilon t_1 = 1,5m$$



Το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_B πάνω στο τραπέζι μετά τη διάσπαση είναι

$$\Delta t_B = \frac{x}{|\upsilon_B|}$$

Το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_A πάνω στο τραπέζι μετά τη διάσπαση είναι

$$\Delta t_A = \frac{d - x}{\upsilon_A}$$

Επειδή τα χρονικά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους έχουμε

$$\frac{x}{|\upsilon_B|} = \frac{d - x}{\upsilon_A} \Rightarrow \frac{|\upsilon_B|}{\upsilon_A} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για τη διάσπαση έχουμε

$$m\upsilon = -m_B|\upsilon_B| + m_A\upsilon_A \Rightarrow 2\upsilon_A - |\upsilon_B| = 1 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε

$$\upsilon_A = 2m/s, |\upsilon_B| = 3m/s$$

Άρα το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_B πάνω στο τραπέζι μετά τη διάσπαση είναι

$$\Delta t_B = \frac{x}{|\upsilon_B|} = 0,5s$$

Άρα, η στιγμή που τα δύο σώματα φθάνουν στην άκρη του τραπεζιού είναι

$$t_2 = t_1 + \Delta t_B = 5s$$

β. Η ενέργεια που ελευθερώθηκε κατά τη διάσπαση είναι

$$E = \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow E = \frac{5}{6}J$$

γ. Η ταχύτητα του Σ_Γ μετά την κρούση είναι

$$\upsilon'_\Gamma = \frac{2m_A}{m_A + m_\Gamma}\upsilon_A \Rightarrow \upsilon'_\Gamma = 1m/s$$

Το βεληνεκές του Σ$_Γ$ είναι $s_Γ = υ'_Γ\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,5m$.

Το βεληνεκές του Σ$_Β$ είναι $s_B = |υ_B|\sqrt{\frac{2h}{g}} = 1,5m$.

Άρα η απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα είναι $s = d + s_A + s_Γ = 4,5m$.

δ. Το χρονικό διάστημα κίνησης του Σ$_Α$ μετά τη διάσπαση και μέχρι να συγκρουστεί με το Σ$_Γ$ είναι

$$Δt_A = \frac{d - x}{υ_A} = 0,5s$$

Η ταχύτητα του Σ$_Α$ μετά την κρούση του με το σώμα Σ$_Γ$ είναι

$$υ'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}υ_A = -1m/s$$

Το χρονικό διάστημα κίνησης του Σ$_Α$ πάνω στο τραπέζι μετά την κρούση του με το Γ είναι

$$Δt'_A = \frac{d}{|υ'_A|} = 2,5s$$

Τέλος, το χρονικό διάστημα της οριζόντιας βολής είναι

$$Δt_{βολης} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,5s$$

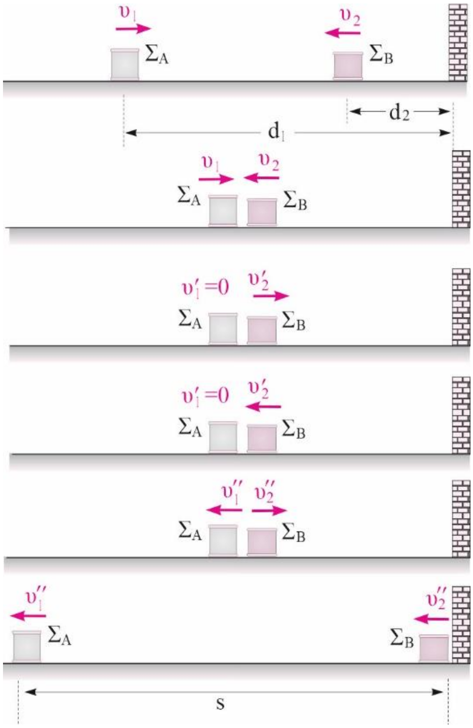
Άρα, το σώμα Σ$_Α$ φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή

$$t_{ολ} = t_1 + Δt_A + Δt'_A + Δt_{βολης} \Rightarrow t_{ολ} = 8s$$

ε. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη στιγμή που το σώμα Α εγκαταλείπει το τραπέζι μέχρι να φθάσει στο έδαφος και θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος, έχουμε

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Rightarrow m_A gh + \frac{1}{2}m_A υ'^2_A = 0 + K \Rightarrow K = 2,6J$$

1.Δ.33



α. Θεωρώντας ως θετική φορά αυτήν προς τα δεξιά, από τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε

$$\upsilon_2' = \frac{2m_A}{m_A+m_B}\upsilon_1 + \frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}(-\upsilon_1) \Rightarrow \upsilon_1 = 3m/s$$

Επειδή τα δύο σώματα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς θα έχουμε

$$\upsilon_2 = -3m/s$$

β. $$\upsilon_1' = \frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}\upsilon_1 + \frac{2m_B}{m_A+m_B}(-\upsilon_1) \Rightarrow \upsilon_1' = 0$$

Από τη μεταβολή στην ορμή του σώματος Σ_A βρίσκουμε τη μάζα του

$$\Delta p_1 = m_A\upsilon_1' - m_A\upsilon_1 \Rightarrow m_A = 1{,}5Kg,\ m_B = \frac{m_A}{3} = 0{,}5Kg$$

γ. Το σώμα Σ_B συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τον τοίχο και ανακλάται με ταχύτητα $\upsilon_2' = -6m/s$.

Αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων, έχουμε

$$\upsilon_1'' = \frac{2m_B}{m_A+m_B}\upsilon_2' = -3m/s \quad , \quad \upsilon_2'' = \frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}\upsilon_2' = 3m/s$$

δ. Στην αρχή επειδή τα δύο σώματα έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας θα συναντηθούν στο μέσο της μεταξύ τους απόστασης που είναι ίση με $\frac{d_1-d_2}{2} = 3m$.

Το απαιτούμενο χρονικό διάστημα είναι ίσο με $\Delta t_1 = \dfrac{\frac{d_1-d_2}{2}}{\upsilon_1} = 1s$.

Στη συνέχεια το σώμα Σ_B διανύει απόσταση $2(d_2 + \frac{d_1-d_2}{2}) = 12m$ μέχρι να ξανασυγκρουστεί με το ακίνητο σώμα Σ_A σε χρονικό διάστημα ίσο με $\Delta t_2 = \dfrac{2(d_2+\frac{d_1-d_2}{2})}{|\upsilon_2'|} = 2s$.

Μετά την κρούση για να ξανασυγκρουστεί με τον τοίχο απαιτείται χρονικό διάστημα

$\Delta t_3 = \dfrac{d_2+\frac{d_1-d_2}{2}}{\upsilon_2''} = 2s$, άρα το συνολικό χρονικό διάστημα κίνησης μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι

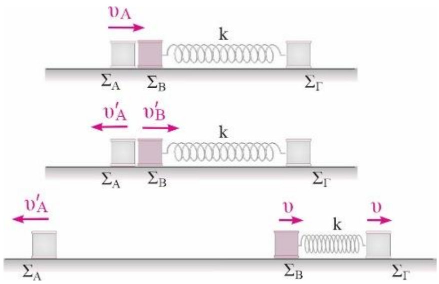
$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 5s .$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα η απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα είναι

$$s = x_1 + \frac{d_1 - d_2}{2} + d_2 = \left|\upsilon_1''\right|\Delta t_3 + \frac{d_1 + d_2}{2} = 12m$$

Από εκεί και πέρα η απόσταση ανάμεσά τους διατηρείται σταθερή διότι τα δύο σώματα κινούνται με ίσες ταχύτητες, -3m/s.

1.Δ.34



α. Από τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης για ακίνητο το ένα σώμα έχουμε

$$\upsilon_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\upsilon_A = -2m/s$$

$$\upsilon_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B}\upsilon_A = 4m/s$$

β. Τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης τα δύο σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα, οπότε από τη διατήρηση της ορμής για το σύστημα έχουμε

$$m_B\upsilon_B' = (m_B + m_\Gamma)V \Rightarrow V = \frac{4}{3}m/s$$

γ. Εφαρμόζουμε την ΑΜΔΕ από την αρχή του φαινομένου μέχρι τη θέση μέγιστης συσπείρωσης για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου

$$K_{αρχ} = K_{τελ} + U \Rightarrow U = K_{αρχ} - K_{τελ}$$

Το κλάσμα της αρχικής ενέργειας του $Σ_A$ που μεταφέρεται στο ελατήριο τη στιγμή αυτή είναι

$$\frac{U}{K_{αρχ}} = \frac{K_{αρχ} - K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \frac{\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}(m_B + m_\Gamma)V^2 - \frac{1}{2}m_A\upsilon_A'^2}{\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2} \Rightarrow \frac{U}{K_{αρχ}} = \frac{16}{27}$$

δ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα $Σ_B$ -$Σ_Γ$ - ελατήριο για να βρούμε την ταχύτητα του $Σ_Γ$ τη στιγμή αυτή

$$m_B\upsilon_B' = m_B\upsilon_2' + m_\Gamma\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3' = 0{,}5m/s$$

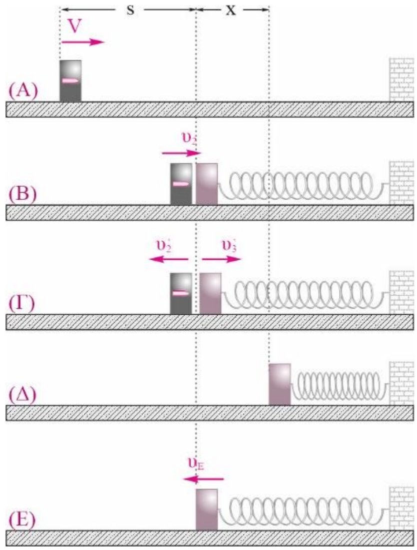
Εφαρμόζουμε την ΑΜΔΕ για το σύστημα $Σ_B$ -$Σ_Γ$ - ελατήριο, αμέσως μετά την πρώτη κρούση μέχρι τη στιγμή που το $Σ_Γ$ έχει ταχύτητα 0,5m/s για να βρούμε τη συσπείρωση του ελατηρίου

$$K_B' = K_B'' + K_\Gamma + U \Rightarrow \frac{1}{2}m_B\upsilon_B'^2 = \frac{1}{2}m_B\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}m_\Gamma\upsilon_3'^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \pm 0{,}1m$$

Άρα η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_Γ$ είναι

$$\left|\frac{dK}{dt}\right| = \left|\Sigma F\upsilon_3'\right| = \left|kx\upsilon_3'\right| \Rightarrow \left|\frac{dK}{dt}\right| = 32{,}5J/s$$

1.Δ.35



α. Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1\upsilon_0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = 5m/s$$

β. Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του συσσωματώματος μέχρι τη δεύτερη κρούση δίνει τον συντελεστή τριβής

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{V^2 - \upsilon_2^2}{2gs} \Rightarrow \mu = 0,9$$

γ. Από τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης με ακίνητο το δεύτερο σώμα βρίσκουμε την ταχύτητα του Σ_3 μετά την κρούση

$$\upsilon_3' = \frac{2m_{1,2}}{m_{1,2} + m_3}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_3' = 3,4\frac{m}{s}$$

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_3, από την αρχή της κίνησής του μέχρι να ξαναπεράσει από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα υ_E, δίνει τη μέγιστη παραμόρφωση x του ελατηρίου

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{F_{\epsilon\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_3\upsilon_E^2 - \frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2 = -\mu m_3 g2x + U_{\epsilon\lambda,\alpha\rho\chi} - U_{\epsilon\lambda,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\upsilon_3'^2 - \upsilon_E^2}{4\mu g} \Rightarrow x = 0,25m$$

δ. Από την ελαστική κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση

$$\upsilon_2' = \frac{m_{1,2} - m_3}{m_{1,2} + m_3}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2' = -0,6\frac{m}{s}$$

Το συσσωμάτωμα λόγω της τριβής εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που βρίσκεται από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = m_{1,2}\alpha \Rightarrow -T = m_{1,2}\alpha \Rightarrow -\mu m_{1,2}g = m_{1,2}\alpha \Rightarrow \alpha = -\mu g = -9m/s^2$$

Από τον τύπο της ταχύτητας για την ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση βρίσκουμε τον χρόνο κίνησης του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει

$$\upsilon = |\upsilon_2'| + \alpha t \Rightarrow 0 = |\upsilon_2'| + \alpha t \Rightarrow t = \frac{0,2}{3}s$$

1.Δ.36

α. Εφαρμόζουμε δύο φορές την ΑΔΜΕ για το Σ_1 για τις δύο κυκλικές του κινήσεις, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση της κρούσης

$$E_{αρχ}=E_{τελ}\Rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\Rightarrow\ 0+m_1 g\ell=\frac{1}{2}m_1{υ_1}^2+0 \qquad (1)$$

$$E'_{αρχ}=E'_{τελ}\Rightarrow K'_{αρχ}+U'_{αρχ}=K'_{τελ}+U'_{τελ}\Rightarrow\frac{1}{2}m_1υ_1'^2+0=0+m_1 g\frac{\ell}{9} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή το σώμα μετά την κρούση επιστρέφει προς τα πίσω, προκύπτει

$$υ_1'^2=\frac{{υ_1}^2}{9}\Rightarrow υ_1'=-\frac{υ_1}{3}$$

Από τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης παίρνουμε

$$υ_1'=\frac{m_1-m_2}{m_{1,}+m_2}υ_1\Rightarrow-\frac{υ_1}{3}=\frac{m_1-m_2}{m_{1,}+m_2}υ_1\Rightarrow m_2=2\text{kg}$$

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει

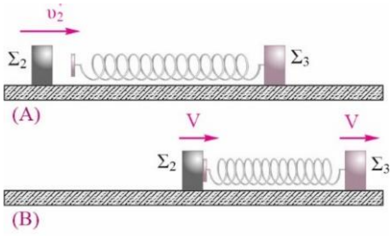
$$υ_1=\sqrt{2g\ell}=6\text{m}/\text{s}$$

Η ταχύτητα του δεύτερου σώματος μετά την κρούση είναι

$$υ_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1=4\text{m}/\text{s}$$

Η κίνηση του $Σ_2$ θα προκαλέσει συμπίεση του ελατηρίου και οι δυνάμεις του θα επιβραδύνουν το $Σ_2$ και θα επιταχύνουν το $Σ_3$.

γ. Η συμπίεση του ελατηρίου θα συνεχίζεται όσο η ταχύτητα του $Σ_2$ είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του $Σ_3$. Η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου, x_{max} θα συμβεί όταν τα δύο σώματα αποκτήσουν ίσες ταχύτητες V. Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο και η ΑΔΟ δίνει



$$m_2υ_2'=m_2V+m_3V\Rightarrow V=2\text{m}/\text{s}$$

Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι συντηρητικές, οπότε εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης που το σώμα $Σ_2$ ακουμπά στο ελατήριο και της θέσης με τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου

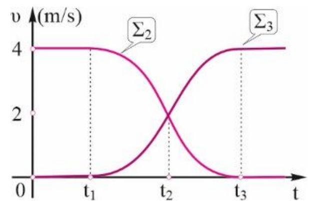
$$E_{αρχ}=E_{τελ}\Rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_2υ_2'^2=\frac{1}{2}m_2V^2+\frac{1}{2}m_3V^2+\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow x^2=\frac{m_2υ_2'^2-(m_2+m_3)V^2}{k}\Rightarrow$$

$$x=16\text{cm}$$

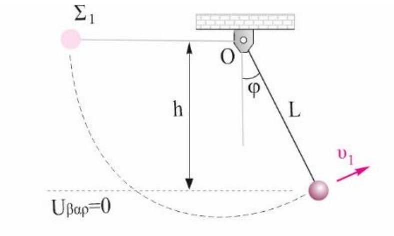
δ. Λόγω του ιδανικού ελατηρίου το φαινόμενο είναι σαν μια κεντρική ελαστική κρούση και επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες, τελικά θα γίνει ανταλλαγή ταχυτήτων. Έτσι

$\upsilon_3' = 4m/s \quad \text{και} \quad \upsilon_2'' = 0$



Η στιγμή t_1 είναι όταν αρχίζει η συμπίεση του ελατηρίου.
Η στιγμή t_2 είναι όταν η συμπίεση του ελατηρίου γίνει μέγιστη και τα δύο σώματα έχουν την κοινή ταχύτητα.
Η στιγμή t_3 είναι όταν το ελατήριο επανέλθει στο φυσικό του μήκος.

1.Δ.37



α. Στη θέση της κρούσης το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται κατά h πιο κάτω από την αρχική του θέση. Είναι

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{h}{L} \Rightarrow h = 0{,}8m$$

Από την ΑΔΜΕ για το σώμα $Σ_1$ μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και αυτής ελάχιστα πριν την κρούση και θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση της κρούσης, έχουμε

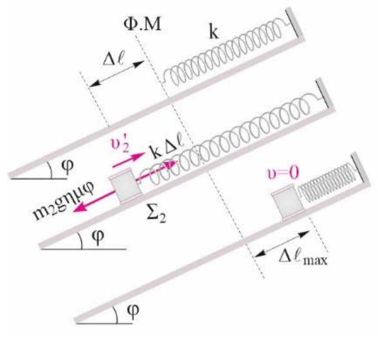
$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \pm\sqrt{2gh} \Rightarrow |\upsilon_1| = 4m/s$$

β. Η ταχύτητα του $Σ_1$ μετά την ελαστική κρούση είναι

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -2m/s$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του $Σ_1$ είναι

$$\left|\Delta \vec{p}_1\right| = \left|m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1\right| = 6Kgm/s$$



γ. Από τη συνθήκη ισορροπίας του $Σ_2$ βρίσκουμε πόσο απέχει αρχικά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow |F_{\varepsilon\lambda}| - w_{2x} = 0 \Rightarrow k\Delta\ell - m_2 g\eta\mu\phi = 0 \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}06m$$

Η ταχύτητα του $Σ_2$ μετά την ελαστική κρούση είναι

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση ισορροπίας μέχρι τη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} + W_{F,\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 g\eta\mu\phi(\Delta\ell + \Delta\ell_{max}) + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow$$

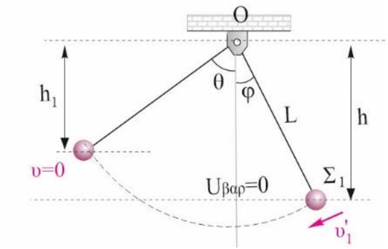
$$150\Delta\ell_{max}^2 + 18\Delta\ell_{max} - 5{,}46 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_{max} = 0{,}14m$$

δ. Από το σχήμα έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{h_1}{L} \Rightarrow h_1 = L\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L\sigma\upsilon\nu\phi$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από τη θέση της κρούσης μέχρι τη θέση που το σώμα σταματάει, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση της κρούσης



$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2} + 0 = 0 + m_1 g(h - h_1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2} = m_1 g(L\sigma\upsilon\nu\phi - L\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0,6$$

1.Δ.38

1.α. Αν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ, τότε από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow p_o = \sqrt{p_1^{'2} + p_2^{'2} + 2p_1^{'}p_2^{'}\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow p_o^2 = p_1^{'2} + p_2^{'2} + 2p_1^{'}p_2^{'}\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{p_o^2}{2m} = \frac{p_1^{'2}}{2m} + \frac{p_2^{'2}}{2m} \Rightarrow p_o^2 = p_1^{'2} + p_2^{'2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$2p_1^{'}p_2^{'}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Αν με κ συμβολίσουμε τη γωνία μεταξύ της ταχύτητας της Σ_2 μετά την κρούση και της αρχικής ταχύτητας της Σ_1, τότε από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα y'y έχουμε

$$0 = m\upsilon_1^{'}\eta\mu\theta - m\upsilon_2^{'}\eta\mu\kappa \Rightarrow \upsilon_1^{'} = \upsilon_2^{'}\frac{\eta\mu\kappa}{\eta\mu\theta} \quad (3)$$

Επειδή $\theta + \kappa = \pi/2$ rad, είναι $\eta\mu\kappa = \sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε από τη σχέση (3) παίρνουμε

$$\upsilon_1^{'} = \upsilon_2^{'}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \Rightarrow \frac{\upsilon_2^{'}}{\upsilon_1^{'}} = \epsilon\varphi\theta$$

Άρα, το πηλίκο των ταχυτήτων μετά την κρούση εξαρτάται από τη γωνία θ.

β. Από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x’x έχουμε

$$m\upsilon_o = m\upsilon_1'\sigma\upsilon\nu\theta + m\upsilon_2'\sigma\upsilon\nu\kappa \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{\upsilon_o - \upsilon_2'\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad (4)$$

Η διατήρηση της κινητικής ενέργειας σε συνδυασμό με τη σχέση (4) δίνει

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{m\upsilon_o^2}{2} = \frac{m\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m\upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow -\upsilon_2'^2 + 2\upsilon_o\eta\mu\theta\upsilon_2' - \upsilon_o^2\eta\mu^2\theta = 0$$

Η λύση της τελευταίας σχέσης δίνει $\upsilon_2' = \upsilon_o\eta\mu\theta$ και από την (4) προκύπτει $\upsilon_1' = \upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta$.

γ. Το πηλίκο των κινητικών ενεργειών μετά την κρούση είναι

$$\frac{K_2'}{K_1'} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2} = \left(\frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1'}\right)^2 = \epsilon\varphi^2\theta \Rightarrow K_2' = \epsilon\varphi^2\theta K_1'$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$K_1' + K_2' = K_1 \Rightarrow K_1' = \frac{1}{1+\epsilon\varphi^2\theta}K_1$$

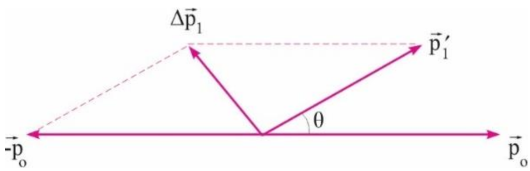
Το ποσοστό της ενέργειας που παραμένει στο σώμα Σ_1 είναι

$$\pi\% = \frac{K_1'}{K_1}100\% = \frac{1}{1+\epsilon\varphi^2\theta}100\%$$

Όσο περισσότερο αποκλίνει η αρχικά κινούμενη σφαίρα από την αρχική της διεύθυνση κίνησης, τόσο λιγότερη ενέργεια παραμένει σε αυτή και τόσο περισσότερη ενέργεια μεταβιβάζεται στην αρχικά ακίνητη σφαίρα.

δ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 είναι

$$\overrightarrow{\Delta p_1} = \vec{p}_1' - \vec{p}_0 = \vec{p}_1' + \left(-\vec{p}_0\right)$$



Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της αρχικά κινούμενης σφαίρας είναι

$$\Delta p_1 = \sqrt{p_o^2 + p_1'^2 + 2p_op_1'\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)} \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = \sqrt{p_o^2 + p_1'^2 - 2p_op_1'\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Με αντικατάσταση $p_1' = m\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta$ προκύπτει $\Delta p_1 = p_o\eta\mu\theta$.

ε. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η αρχικά κινούμενη σφαίρα κατά την κρούση είναι

$$F = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{p_o\eta\mu\theta}{\Delta t}$$

Θεωρώντας ότι το χρονικό διάστημα της κρούσης είναι σταθερό και ανεξάρτητο της γωνίας θ συμπεραίνουμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η γωνία απόκλισης θ του σώματος από την αρχική διεύθυνση κίνησής του, τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη που αναπτύσσεται ανάμεσα στα δύο σώματα.

1.Δ.39

Α. α. Αναλύουμε την ταχύτητα που έχει η σφαίρα πριν και μετά την κρούση σε δύο κάθετες συνιστώσες

$$\upsilon_{o,x} = \upsilon_o \eta\mu\alpha,\ \upsilon_{o,y} = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\upsilon'_{o,x} = \upsilon'_o \eta\mu\beta,\ \upsilon'_{o,y} = \upsilon'_o \sigma\upsilon\nu\beta$$

Στον άξονα y΄y η σφαίρα δε δέχεται δύναμη κατά τη διάρκεια της κρούσης, άρα η ταχύτητά της παραμένει σταθερή

$$\upsilon'_{o,y} = \upsilon_{o,y} = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Η δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το τοίχωμα είναι κάθετη σε αυτό και επειδή η κρούση είναι ελαστική η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της σφαίρας μετά την κρούση θα είναι αντίθετη αυτής πριν την κρούση

$$\upsilon'_{o,x} = -\upsilon_{o,x} = -\upsilon_o \eta\mu\alpha$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική διατηρείται η κινητική ενέργεια της σφαίρας κατά την κρούση

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_o'^2 \Rightarrow \upsilon_o = \upsilon'_o$$

Επομένως θα έχουμε

$$\upsilon'_{o,y} = \upsilon_{o,y} \Rightarrow \upsilon'_o \sigma\upsilon\nu\beta = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow \alpha = \beta$$

β. Η μεταβολή στην ορμή της σφαίρας είναι

$$\Delta p = \Delta p_x = -m\upsilon'_o \eta\mu\beta - m\upsilon_o \eta\mu\alpha = -2m\upsilon_o \eta\mu\alpha$$

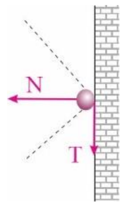
γ. Η μέγιστη παραμόρφωση της σφαίρας θα συμβεί στη θέση που στιγμιαία η ταχύτητά της στον άξονα x΄x γίνεται μηδενική. Εκείνη τη στιγμή η ταχύτητά της είναι

$$V = \upsilon_{o,y} = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}mV^2 + U_{max} \Rightarrow U_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \eta\mu^2\alpha$$

Β. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα κατά τη διάρκεια της επαφής της με το τοίχωμα δείχνονται στο σχήμα



Από τη μεταβολή στην ορμή της σφαίρας στον άξονα x΄x έχουμε

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta p_x = \Sigma F_x \Delta t \Rightarrow -m\upsilon'_o \eta\mu\beta - m\upsilon_o \eta\mu\alpha = -N\Delta t \Rightarrow$$
$$-2m\upsilon_o \eta\mu\alpha = -N\Delta t \Rightarrow 2m\upsilon_o \eta\mu\alpha = N\Delta t \ \ (1)$$

Από τη μεταβολή στην ορμή της σφαίρας στον άξονα y΄Oy έχουμε

$$\Delta p_y = \Sigma F_y \Delta t \Rightarrow m\upsilon'_{o,y} - m\upsilon_{o,y} = -T\Delta t = -\mu N \Delta t$$

η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$\upsilon'_{o,y} = \upsilon_o\left(\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu\,\eta\mu\alpha\right)$$

$$\varepsilon\varphi\beta = \frac{\upsilon'_{o,x}}{\upsilon'_{o,\psi}} = \frac{\upsilon_o\eta\mu\alpha}{\upsilon_o(\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu\,\eta\mu\alpha)} \Rightarrow \varepsilon\varphi\beta = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu\,\eta\mu\alpha} \quad (2)$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad (3)$$

Διαιρώντας τις (2) και (3) κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu\,\eta\mu\alpha} > 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\beta > \varepsilon\varphi\alpha$$

Άρα η γωνία β είναι μεγαλύτερη από τη γωνία α, δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ανάκλασης.

β. Για να ανακλάται η σφαίρα κάθετα στον τοίχο θα πρέπει η γωνία β να είναι 90^o, οπότε με βάση τη σχέση (2) το κλάσμα $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu\,\eta\mu\alpha}$ πρέπει να τείνει στο άπειρο. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να τείνει στο μηδέν, επομένως έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu\,\eta\mu\alpha = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2\varepsilon\varphi\alpha}$$

Για $\alpha=30^o$ έχουμε

$$\mu = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

γ. Δεδομένου ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μικρότερος από τη μονάδα, εάν θέλουμε η σφαίρα να ανακλάται κάθετα από το τοίχωμα πρέπει

$$\mu = \frac{1}{2\varepsilon\varphi\alpha} < 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha > 26{,}5^o$$

Δηλαδή για να ανακλαστεί κάθετα η σφαίρα πρέπει η γωνία α να είναι μεγαλύτερη από $26{,}5^o$, επομένως η γωνία πρόσπτωσης που είναι η συμπληρωματική της θα πρέπει να είναι μικρότερη από $63{,}5^o$.

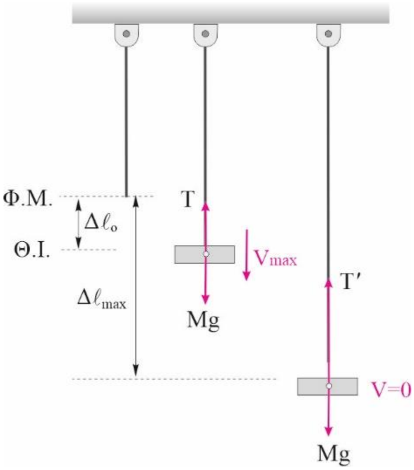
1.Δ. 40

α. Το σώμα Σ$_1$ αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του αμέσως μετά την κρούση, καθώς στη συνέχεια η ελαστική δύναμη του νήματος θα το επιβραδύνει.
Από τη διατήρηση της ενέργειας για το σώμα Σ$_2$ βρίσκουμε την ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση, προκύπτει $\upsilon_2 = \sqrt{2gh_1} = 8m/s$.
Το σώμα Σ$_2$ χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας σε κάθε κρούση, οπότε για την ταχύτητα εξόδου από το Σ$_1$ έχουμε

$$K_2' = \frac{1}{4}K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}m\upsilon_2{}^2 \Rightarrow \upsilon_2' = 4m/s$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση παίρνουμε

$$m\upsilon_2 = m\upsilon_2' + MV \Rightarrow V = \frac{m(\upsilon_2 - \upsilon_2')}{M} = 2m/s$$



β. Στη θέση που το σώμα Σ$_1$ ισορροπεί το νήμα έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_0$ που είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{Mg}{k} = 0,2m$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε μέχρι τη θέση μέγιστης επιμήκυνσης του νήματος

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\lambda} + W_w \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 + Mg\left(\Delta\ell_{max} - \Delta\ell_0\right)^2 \Rightarrow$$

$$25\Delta\ell_{max}^2 - 10\Delta\ell_{max} - 1 = 0$$

$$\Delta = 200, \ \ \Delta\ell_{max} = \frac{10 \pm 10\sqrt{2}}{50}m = 0,48m$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σώμα Σ$_2$ για να βρούμε την ταχύτητα ελάχιστα πριν ακουμπήσει στο δάπεδο

$$mgh_2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2''^2 \Rightarrow \upsilon_2'' = \sqrt{2gh_2 + \upsilon_2'^2} = 8m/s$$

Το σώμα χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας σε κάθε κρούση, οπότε για την ταχύτητα ανάκλασης έχουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2'''^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}m\upsilon_2''^2 \Rightarrow \upsilon_2''' = 4m/s$$

Άρα, η δύναμη Ν που δέχεται από το δάπεδο είναι

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow N - mg = \frac{m\left(\upsilon_2''' + \upsilon_2''\right)}{\Delta t} \Rightarrow N = 65N$$

Το βάρος του Σ$_2$ είναι 5N, οπότε $\frac{N}{mg} = 13$.

δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας του μέχρι την ανώτερη θέση στην οποία φθάνει

$$0-\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}k\Delta\ell^2-Mgh_{max}\Rightarrow 1-10h_{max}=-2\Rightarrow h_{max}=0,3m$$

Το $Σ_1$ φθάνει $0{,}3m-0{,}2m=0{,}1m$ πάνω από το φυσικό του μήκος. Επομένως το σώμα διανύει με το νήμα χαλαρό 0,1m ανερχόμενο και 0,1m κατερχόμενο, άρα μέχρι να περάσει για δεύτερη φορά από το φυσικό μήκος του νήματος θα έχει διανύσει μήκος τροχιάς s=0,2m.
Στο παραπάνω χρονικό διάστημα στο σώμα ενεργεί μόνο η δύναμη της βαρύτητας οπότε η επιτάχυνσή του και στην άνοδο και στην κάθοδο έχει μέτρο ίσο με g. Βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος στη θέση φυσικού μήκους εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ από τη θέση ισορροπίας στη θέση φυσικού μήκους του νήματος

$$\frac{1}{2}k\Delta\ell^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}MV'^2+Mg\Delta\ell\Rightarrow V'=\sqrt{2}m/s$$ ή V′=1,4 m/s

Το χρονικό διάστημα ανόδου είναι ίσο με το χρονικό διάστημα καθόδου, οπότε έχουμε

$$\Delta t=2\frac{V'}{g}=0,2\sqrt{2}s$$ ή Δt=0,28s

1.Δ.41

α. Επειδή η κρούση είναι ελαστική η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης, άρα η κάθε μία από τις γωνίες αυτές είναι 45°. Αυτό σημαίνει ότι η διατομή της σφήνας έχει σχήμα ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου, οπότε το βεληνεκές του Σ είναι ίσο με το ύψος d της σφήνας.
Η οριζόντια βολή του Σ, με σημείο αναφοράς το σημείο ανάκλασης, περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\upsilon_x=\upsilon_o\quad(1),\quad x=\upsilon_o t\quad(2)$$

$$\upsilon_y=gt\quad(3),\quad y=\frac{1}{2}gt^2\quad(4)$$

Το χρονικό διάστημα για να φθάσει το σώμα Σ στη βάση της σφήνας προκύπτει από την (4)

$$t=\sqrt{\frac{2d}{g}}$$ και η ταχύτητα με την οποία ανακλάται προκύπτει από τη σχέση (2)

$$\upsilon_o=\sqrt{\frac{gd}{2}}=1m/s$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σώμα Σ βρίσκουμε το ύψος από το οποίο ελευθερώθηκε

$$mg(h-d)=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2\Rightarrow h=\frac{5d}{4}=0,25m$$

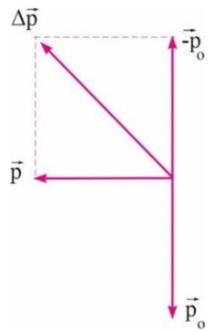
β. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του Σ ελάχιστα πριν ακουμπήσει στο έδαφος προκύπτει από τη σχέση (3)

$$\upsilon_y=\sqrt{2dg}=2m/s$$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt}=-\frac{dW_w}{dt}=-mg\upsilon_y\Rightarrow\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt}=-60J/s$$

γ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι



$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{p} + \left(-\vec{p}_0\right)$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του Σ κατά την κρούση είναι

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \sqrt{\left(m\upsilon_o\right)^2 + \left(m\upsilon_o\right)^2} = m\upsilon_o\sqrt{2} \Rightarrow \left|\Delta\vec{p}\right| = 3\sqrt{2}\,\mathrm{kg\,m/s}$$

δ. Τη στιγμή αυτή οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας είναι μεταξύ τους ίσες, άρα έχουμε $\upsilon_x = \upsilon_y$.

Επομένως η ταχύτητα του σώματος σχηματίζει τη στιγμή αυτή 45ᵒ με τον κατακόρυφο άξονα καθώς

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = 1 \Rightarrow \theta = 45^o$$

Η ορμή του σώματος είναι πάντοτε ομόρροπη με την ταχύτητα και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι πάντοτε ομόρροπος με τη συνισταμένη των δυνάμεων που σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με το βάρος του σώματος, άρα η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην ορμή και τον ρυθμό μεταβολής της, τη στιγμή αυτή, είναι ίση με $\theta = 45^o$.

1.Δ.42

α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα στον οριζόντιο άξονα

$$0 = MV - m\upsilon_o \Rightarrow V = \frac{m\upsilon_o}{M}$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας για την κρούση έχουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_o{}^2 + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow m\upsilon^2 = m\upsilon_o{}^2 + M\left(\frac{m\upsilon_o}{M}\right)^2$$

Με αριθμητική αντικατάσταση των ταχυτήτων στην τελευταία σχέση προκύπτει $\frac{m}{M} = 2$.

β. Το χρονικό διάστημα για να φθάσει η σφαίρα στο έδαφος είναι

$$t_{\kappa\alpha\vartheta} = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 0{,}2\mathrm{s}$$

Το βεληνεκές της σφαίρας είναι $x_1 = \upsilon_o t = 0{,}2\mathrm{m}$

Στον ίδιο χρόνο η σφήνα έχει μετατοπιστεί κατά

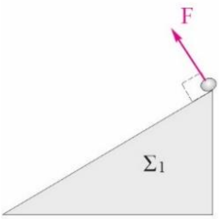
$$x_2 = Vt_{\kappa\alpha\vartheta} = \frac{m\upsilon_o}{M}t \Rightarrow x_2 = 0{,}4\mathrm{m}$$

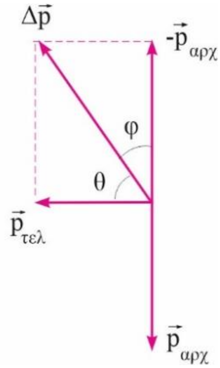
Άρα η οριζόντια απόσταση ανάμεσά τους είναι $s = x_1 + x_2 = 0{,}6\mathrm{m}$

και η απόσταση L μεταξύ της κορυφής Ζ και του σημείου επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είναι

$$L = \sqrt{s^2 + d^2} \Rightarrow L = 0{,}2\sqrt{10}\mathrm{m}$$

γ. Η επίδραση του βάρους της σφαίρας στην μεταβολή της ορμής της είναι αμελητέα, οπότε η συνολική δύναμη που δέχεται η σφαίρα κατά την κρούση συμπίπτει με τη δύναμη που δέχεται από τη σφήνα. Η δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τη σφήνα είναι κάθετη στην επιφάνεια της σφήνας, οπότε το ίδιο θα ισχύει και για το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής. Βρίσκουμε τη γωνία ανάκλασης από το πηλίκο της αρχικής προς την τελική ορμή του σώματος





$$εφθ = \frac{p_{αρχ}}{p_{τελ}} = \frac{mυ_o\sqrt{3}}{mυ_o} = \sqrt{3} \Rightarrow θ = 60^o$$

Άρα, θα πρέπει η γωνία πρόσπτωσης της σφαίρας πάνω στην σφήνα να είναι ίση με $φ = 30^o$.

δ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} + \left(-\vec{p}_{αρχ}\right)$$

Η αρχική και η τελική ορμή της σφαίρας είναι κάθετες μεταξύ τους, οπότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας κατά την κρούση είναι ίσο με

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \sqrt{\left(-p_{αρχ}\right)^2 + \left(p_{τελ}\right)^2} = \sqrt{m^2υ^2 + m^2υ_o^2} \Rightarrow \left|\Delta\vec{p}\right| = 2mυ_o$$

Επομένως η δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τη σφήνα έχει μέτρο

$$F = \frac{\left|\Delta\vec{p}\right|}{\Delta t} = \frac{2mυ_o}{\Delta t} \Rightarrow F = 40N$$

και διεύθυνση κάθετη στην πλάγια πλευρά της σφήνας.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η σφήνα δέχεται δύναμη ίσου μέτρου από τη σφαίρα και αντίθετης κατεύθυνσης, δηλαδή με φορά προς τα κάτω και δεξιά.

1.Δ.43

Α. Από τη διατήρηση της ορμής στον άξονα x΄x έχουμε

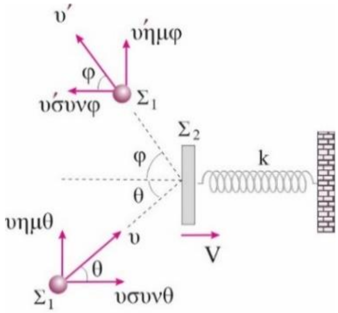
$$m_1υσυνθ = m_2V - m_1υ'συνφ \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής στον άξονα y΄y έχουμε

$$m_1υημθ = m_1υ'ημφ \quad (2)$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1υ^2 = \frac{1}{2}m_1υ'^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 \Rightarrow m_1υ^2 = m_1υ'^2 + m_2V^2 \quad (3)$$



Αν οι γωνίες θ και φ είναι ίσες, τότε από τη (2) προκύπτει $υ = υ'$, οπότε με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει

$V=0$ m/s, που είναι αδύνατο γιατί από την εκφώνηση δίνεται ότι το σώμα $Σ_2$ μετά την κρούση κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου. Άρα $\hat{\theta} \neq \hat{\varphi}$.

Β. α. Οι σχέσεις (1) και (2) με αντικατάσταση της σχέσης των μαζών δίνουν

$$m_1 \upsilon \sigma\upsilon\nu\theta = 2m_1 V - m_1 \upsilon' \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \upsilon' \sigma\upsilon\nu\varphi = 2V - \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta \quad (4)$$

$$\upsilon' \eta\mu\varphi = \upsilon\eta\mu\theta \quad (5)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις σχέσεις (4) και (5) και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\upsilon'^2 = 4V^2 - 4\upsilon V \sigma\upsilon\nu\theta + \upsilon^2 \quad (6)$$

Η σχέση (3) αναδιατάσσεται ως εξής

$$m_1 \upsilon'^2 = m_1 \upsilon^2 - m_2 V^2 \Rightarrow \upsilon'^2 = \upsilon^2 - 2V^2 \quad (7)$$

Από τον συνδυασμό των (6) και (7) έχουμε

$$m_1 \upsilon^2 = m_1 \left(4V^2 - 4\upsilon V \sigma\upsilon\nu\theta + \upsilon^2\right) + 2m_1 V^2 \Rightarrow V = \frac{2}{3}\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta \quad (8)$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (8) προκύπτει

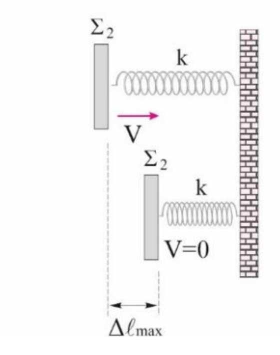
$$V = \frac{2}{3}\upsilon\frac{\sqrt{3}}{2} = 1m/s$$

Με αντικατάσταση του V στη σχέση (6) προκύπτει $\upsilon' = 1m/s$.

β. Από τη σχέση (2) με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε

$$\eta\mu\varphi = \frac{\upsilon\eta\mu 30^0}{\frac{\upsilon}{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα $Σ_2$ - ελατήριο



$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_2 V^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{max} \Rightarrow$$

$$\Delta\ell_{max} = \sqrt{\frac{m_2 V^2}{k}} = 0,05m$$