

Θέματα Γ

7.Γ.1

$$\alpha. U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Rightarrow U = 12,5 x^2, \quad -0,1 \text{ m} \leq x \leq 0,1 \text{ m}$$

β. Η συνάρτηση της κινητικής ενέργειας με τον χρόνο είναι

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot 0,1^2 \sin^2 5t \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

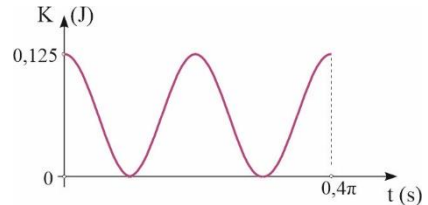
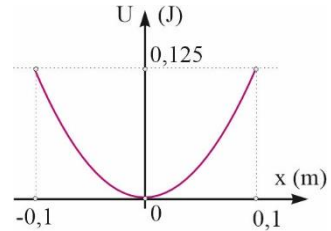
$$K = 0,125 \cdot \sin^2 5t \text{ (S.I.)}$$

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E = K_{\max} = 0,125 \text{ J}$$

γ. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5 \text{ rad/s}} \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$$



και η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

δ. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της κινητικής ενέργειας είναι ίσο με μισή περίοδο γιατί το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{0,4\pi}{2} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 0,2\pi \text{ s}$$

7.Γ.2

$$\alpha. \alpha = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x \Rightarrow \alpha = -12,8 \text{ m/s}^2$$

$$\beta. F_{\text{επ}} = -m\omega^2 x \Rightarrow F_{\text{επ}} = -12,8 \text{ N}$$

$$\gamma. U = \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow U = 0,32 \text{ J}$$

$$\delta. K + U = E_{\text{T}} \Rightarrow K = E_{\text{T}} - U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 - U = 4,8 \text{ J}$$

$$\frac{K}{U} = \frac{4,8}{0,32} = 15$$

7.Γ.3

α. Επειδή την $t=0\text{s}$, $x=0\text{m}$ και $v>0$ δεν έχουμε αρχική φάση.

$$x = A \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε

$$x_1 = 0,2 \cdot \eta\mu \left(4\pi + \frac{\pi}{3} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{3} \text{ m} \Rightarrow x_1 = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\beta. v = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{6} 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(4\pi + \frac{\pi}{3} \right) \text{ m/s} \Rightarrow v = \frac{0,1\pi}{3} \text{ m/s}$$

$$\gamma. F = m\alpha = -m\omega^2 x \Rightarrow F = -2\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ N}$$

$$\delta. U = \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \Rightarrow U = \frac{1}{3} 10^{-1} \text{ J}$$

$$\epsilon. \frac{U}{E} = \frac{\frac{1}{2} Dx_1^2}{\frac{1}{2} DA^2} = \frac{3}{4}$$

7.Γ.4

$$\alpha. v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{6}{20} \text{ m} \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

$$\beta. x = 0,3\eta\mu 20t \text{ (S.I.)}$$

$$\gamma. \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma F \frac{dx}{dt} = \Sigma F v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -kxv$$

Όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, έχει $x=0\text{m}$, άρα $\frac{dK}{dt} = 0 \text{ J/s}$.

δ. Επειδή η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο η δύναμη του ελατηρίου συμπίπτει με τη δύναμη επαναφοράς, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου συμπίπτει με τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -F_{\epsilon\pi} v = Dxv = 0 \text{ J/s}$$

Άρα, $\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = 0 \text{ J/s}$.

7.Γ.5

$$\alpha. U_{\max} = K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2U_{\max}}{m}} \Rightarrow v_{\max} = 8\text{ m/s}$$

$$\beta. v_{\max} = \omega A, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\text{ rad/s}$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,8\text{ m}$$

$$\gamma. F_{\max} = DA, \quad D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad D = 400\text{ N/m} \quad \text{ή} \quad F_{\max} = 320\text{ N}$$

$$\delta. U = \frac{K}{15} \Rightarrow K = 15U$$

$$U + K = E \Rightarrow 16U = E \Rightarrow U = \frac{1}{16}U_{\max} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{4} \Rightarrow x = \pm 0,2\text{ m}$$

7.Γ.6

$$\alpha. K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \Rightarrow \omega = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} \Rightarrow \omega = 40\text{ rad/s}$$

$\beta.$ Την $t=0\text{ s}$, $x=+A$, άρα $\phi_0=\pi/2\text{ rad}$. Επομένως

$$x = 0,2\text{ m} \left(40t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

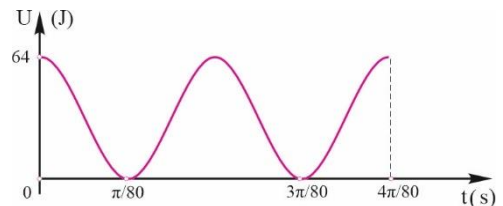
$$\gamma. U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow$$

$$U = 64 \cdot \text{ημ}^2 \left(40t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\text{ rad/s}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{20}\text{ s}$$

και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



$$\delta. K + U = E_T \Rightarrow 2U = E_T \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm A \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm 0,1\sqrt{2}\text{ m}$$

7.Γ.7

$\alpha.$ Από το διάγραμμα έχουμε: $A=0,25\text{ m}$, $F_{\max}=100\text{ N}$

$$F_{\max} = m\omega^2 A \quad \text{ή} \quad \omega = 10\text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2\pi\text{ s}$$

β. $x = A\eta\mu\omega t$ ή $x = 0,25\eta\mu 10t$ (S.I.)

γ. $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \pm 1,25\sqrt{3}m/s$

δ. $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma F \frac{dx}{dt} = F_{\varepsilon\pi}v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -m\omega^2x \cdot v$

Το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, άρα η ταχύτητα έχει αρνητικό πρόσημο, οπότε

$$\frac{dK}{dt} = -4 \cdot 10^2 \cdot 12,5 \cdot 10^{-2} \cdot (-1,25\sqrt{3})(SI) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 62,5\sqrt{3} J/s$$

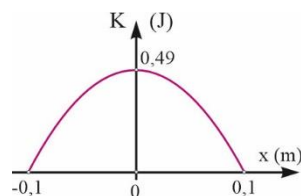
7.Γ.8

α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης α - x με την αντίστοιχη γενική σχέση, $\alpha = -\omega^2x$, προκύπτει $\omega^2 = 49(SI) \Rightarrow \omega = 7rad/s$, οπότε,

$$E_T = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \Rightarrow E_T = 0,49J$$

β. $K + U = E_T \Rightarrow K = E_T - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$

$$K = 0,49 - 49x^2 \text{ (S.I.)}, -0,1m \leq x \leq +0,1m$$



γ. Η ταχύτητα και η ορμή του σώματος μηδενίζονται κάθε φορά που το σώμα περνά από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, αυτό συμβαίνει δύο φορές σε κάθε περίοδο, άρα

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi/\omega}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{7}s$$

δ. Όταν $K=0J$, τότε βρισκόμαστε στην ακραία θέση, $x = \pm A$ και η δύναμη έχει μέγιστο μέτρο

$$F = -Dx \Rightarrow |F_{\max}| = m\omega^2A \Rightarrow |F_{\max}| = 9,8N$$

7.Γ.9

α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης α - x με την αντίστοιχη γενική σχέση, $\alpha = -\omega^2x$, προκύπτει $\omega^2 = 64 \text{ (S.I.)} \Rightarrow \omega = 8rad/s$

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 64 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1} \cdot 64}} m \Rightarrow A = 0,1m$$

β. Επειδή την $t=0$ s, $x=A$ και η εκφώνηση μας λέει ότι η απομάκρυνση μεταβάλλεται ημιτονικά με τον χρόνο, υπάρχει αρχική φάση $\phi_0=\pi/2$ rad.

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \quad , \quad v = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\gamma. U = K \Rightarrow E \cdot \eta\mu^2\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = E \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega t = \sigma\upsilon\nu^2\omega t \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\omega t = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega t = +\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t = \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi & (1) \\ \omega t = -\frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi & (2) \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t = \frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi & (3) \\ \omega t = -\frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi & (4) \end{cases}$$

Οι (1), (3) για $\kappa=0$ δίνουν:

$$(1) \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{8} = \frac{\pi}{32} \text{ s}$$

$$(3) \Rightarrow \omega t_3 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{3T}{8} = \frac{3\pi}{32} \text{ s}$$

Οι (2), (4) για $\kappa=1$ (για $\kappa=0$ παίρνουμε αρνητικό χρόνο) δίνουν:

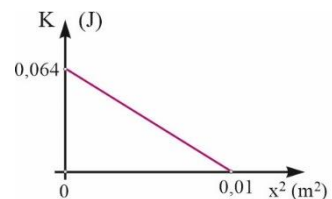
$$(2) \Rightarrow \omega t_4 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow t_4 = \frac{7T}{8} = \frac{7\pi}{32} \text{ s}$$

$$(4) \Rightarrow \omega t_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{8} = \frac{5\pi}{32} \text{ s}$$

δ. Από την ΑΔΕΤ έχουμε

$$K = E - U \Rightarrow K = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow K = 64 \cdot 10^{-3} - 6,4x^2 \text{ (S.I.)}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



7.Γ.10

$$\alpha. \Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{\pi}{7} \text{ s} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 7 \text{ rad/s}$$

β. Από την ΑΔΕΤ έχουμε

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow A = \frac{\sqrt{v^2 + \omega^2 x^2}}{\omega} = \sqrt{2} \text{ m}$$

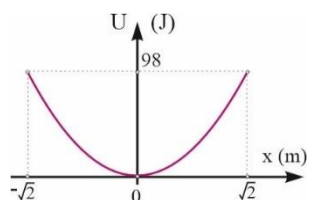
Άρα η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων είναι $2\sqrt{2} \text{ m}$.

γ. Από την ΑΔΕΤ έχουμε

$$\begin{cases} E = K + U \\ K = 15U \end{cases} \Rightarrow E = 16U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 16 \cdot \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ m}$$

Σε κάθε πλήρη ταλάντωση το σώμα διέρχεται από τις θέσεις αυτές 4 φορές, μία φορά με θετική και μία φορά με αρνητική ταχύτητα από κάθε θέση.

$$\delta. U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = 49x^2, \quad -\sqrt{2} \text{ m} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ m}$$



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

7.Γ.11

$$\alpha. v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

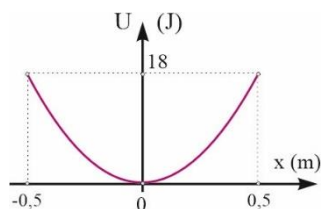
β. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση, οπότε βρίσκεται στο 1^ο ή 2^ο τεταρτημόριο. Επειδή πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας έχει ταχύτητα αρνητική, άρα βρίσκεται στο 2^ο και η αρχική φάση παίρνει τιμές στην περιοχή $\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \varphi_0 < \pi \text{ rad}$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ: Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας, δηλαδή έχει αρνητική ταχύτητα, άρα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$\begin{cases} \eta \mu \varphi_0 > 0 \\ \sigma \nu \eta \varphi_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad} < \varphi_0 < \pi \text{ rad}$$

$$\gamma. U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow$$

$$U = 72 \cdot x^2 \text{ (S.I.)}, \quad -0,5 \text{ m} \leq x \leq +0,5 \text{ m}$$



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

δ. Το ποσοστό της ολικής ενέργειας που είναι δυναμική τη χρονική στιγμή $t=0s$ είναι

$$\pi\% = \frac{U}{E} 100\% = \frac{E - K}{E} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_{\max}^2} 100\% = \frac{v_{\max}^2 - v^2}{v_{\max}^2} 100\% = \frac{36 - 9}{36} 100\% \Rightarrow \pi\% = 75\%$$

7.Γ.12

α. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται 2 φορές σε κάθε περίοδο, άρα

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t = 1s, \quad v_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow A = 0,2m$$

β. Μετά την απομάκρυνση του πουλιού, το σύστημα ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega' = 2,5\pi \text{ rad/s}$, οπότε έχουμε $k = m_1\omega'^2 \Rightarrow k = 9\pi^2 \text{ N/m}$.

γ. Η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο οπότε η αφαίρεση μάζας από το σύστημα δεν επηρεάζει τη θέση ισορροπίας. Η απομάκρυνση του πουλιού έγινε στην ακραία θέση της αρχικής ταλάντωσης και στον κατακόρυφο άξονα, οπότε με εφαρμογή της ΑΔΟ στον οριζόντιο άξονα προκύπτει ότι το σώμα Σ έχει πάλι ταχύτητα ίση με μηδέν αμέσως μετά την απομάκρυνση του πουλιού.

Η νέα ταλάντωση έχει ίδιο πλάτος ταλάντωσης και ίδια σταθερά επαναφοράς με την αρχική, άρα θα έχει και ίδια ενέργεια ταλάντωσης

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,0288\pi^2 J$$

δ. Από τη σταθερά επαναφοράς για την αρχική ταλάντωση έχουμε

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow m_2 = 0,81kg$$

7.Γ.13

$$\alpha. \quad m = \frac{F}{a} = \frac{20N}{20m/s^2} \Rightarrow m = 1kg$$

Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ έχουμε

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = \omega^2 \left(A^2 - \frac{x^2}{4} \right) \Rightarrow \omega A = 4m/s \Rightarrow v_{\max} = 4m/s$$

$$\beta. \quad \text{Σύμφωνα με την εκφώνηση } |a| = \omega^2 x = \omega^2 \frac{A}{2} = 20m/s^2 \quad \text{και } v_{\max} = \omega A = 4m/s$$

οπότε από τον συνδυασμό των δύο σχέσεων προκύπτει $A=0,4m$ και $\omega=10\text{rad/s}$.

γ. Τη χρονική στιγμή $t=0s$, η απομάκρυνση είναι θετική και το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται, οπότε το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας και έχει αρνητική ταχύτητα, άρα βρίσκεται στο

2^ο τεταρτημόριο και από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad.

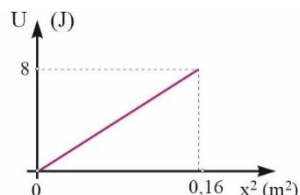
δ. Το σώμα σταματά κάθε φορά που βρίσκεται σε ακραία θέση και η φάση της ταλάντωσης γίνεται

$\varphi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. Στην περίπτωση μας την $t=0s$, έχουμε αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad, οπότε η 1^η φορά

θα είναι όταν το σώμα βρεθεί στην ακραία αρνητική θέση

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 10t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{\pi}{15} s$$

$$\epsilon. U = \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 x^2 \Rightarrow U = 50x^2 \text{ (S.I.)}, -0,4m \leq x \leq 0,4m$$



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

7.Γ.14

α. Η θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg\eta\mu\varphi}{k} = 0,05m$$

Αφού η πάνω ακραία θέση συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με $A = \Delta\ell_0 = 0,05m$

β. Η ταχύτητα v_0 που προσδώσαμε στο σώμα αποτελεί την $v_{\max}$ της ταλάντωσης, οπότε

$$v_0 = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow v_0 = 0,5m/s$$

$$\gamma. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$ και την $t=0s$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, άρα δεν υπάρχει αρχική φάση, οπότε

$$x = 0,05\eta\mu(10t) \text{ (SI)}$$

$$\delta. U = E - K = E - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow U = 0,25 - v^2, \text{ (S.I.)}$$

ε. Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, ενώ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μεγιστοποιείται στις δύο ακραίες θέσεις αυτής, άρα έχουμε

$$\frac{U_{ελ, \max}}{U_{ταλ, \max}} = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta\ell_0 + A)^2}{\frac{1}{2}kA^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ, \max}}{U_{ταλ, \max}} = \frac{(\Delta\ell_0 + A)^2}{A^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ, \max}}{U_{ταλ, \max}} = \frac{(0,05 + 0,05)^2}{0,05^2} = 4$$

7.Γ.15

α. Το σώμα ξεκινά τη στιγμή $t=0s$ από την ακραία θετική απομάκρυνση και θα μηδενίσει την ταχύτητά του όταν βρεθεί στην ακραία αρνητική απομάκρυνση, δηλαδή μετά από $T/2$, οπότε

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{10}s = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 200N/m$$

β. Από τη συνθήκη ισορροπίας του Σ πριν κοπεί το νήμα προκύπτει

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_v - F_{ελ} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = 20N$$

Επειδή η ταλάντωση εξεσισσεται στο οριζόντιο επίπεδο, η δύναμη του ελατηρίου συμπίπτει με τη δύναμη επαναφοράς, οπότε μόλις κοπεί το νήμα η $F_{ελ}$ θα αποτελεί την $F_{επ, \max}$ της ταλάντωσης

$$F_{επ, \max} = kA \text{ ή } A = 0,1m \text{ και } E = \frac{1}{2}kA^2 = 1J$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος συμπίπτει με τη ΣF που ασκείται στο σώμα και μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Επειδή η ταλάντωση εξεσισσεται στο οριζόντιο επίπεδο, η επιμήκυνση του ελατηρίου συμπίπτει με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και η ΣF με την $F_{ελ}$, οπότε

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ, \alpha\rho\chi} - U_{ελ, \tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}kA^2 - 0 \Rightarrow W_{F_{ελ}} = 1J$$

$$\delta. F_{ελ} = F_{επ} = -kx \Rightarrow F_{ελ} = -10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right), (S.I.)$$

7.Γ.16

α. Από το διάγραμμα προκύπτει

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{5}s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}s \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow D = 25N/m$$

$$\beta. p_{\max} = mv_{\max} \Rightarrow v_{\max} = 2m/s$$

$$\gamma. K = E - U = E - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow K = 2 - 12,5x^2, (S.I.)$$

δ. Η κλίση ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής (συνισταμένη δύναμη). Τη στιγμή $\pi/5$ s, η ορμή είναι μηδέν άρα βρισκόμαστε σε ακραία θέση, επειδή η ορμή στη συνέχεια γίνεται θετική, είμαστε στην αρνητική ακραία θέση, $x=-A$.

$$\frac{dp}{dt} = F_{\varepsilon\pi} = -k(-A) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 10 \text{ kgm/s}^2$$

7.Γ.17

α. Μετά την εφαρμογή της δύναμης F η θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ θα μετατοπιστεί δεξιότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow F - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{F}{k} = \frac{40\text{N}}{100\text{N/m}} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,4\text{m}$$

Στην τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας έχουμε

$$\Sigma F = F - F_{\varepsilon\lambda} = F - k(\Delta\ell_0 + x) \Rightarrow \Sigma F = 40 - 100(0,4 + x)(\text{SI}) \Rightarrow \Sigma F = -100x(\text{SI})$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

β. Η θέση που ασκήθηκε αρχικά η δύναμη αποτελεί ακραία θέση της ταλάντωσης, καθώς το σώμα ήταν αρχικά ακίνητο, οπότε το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με $A = \Delta\ell_0 = 0,4\text{m}$.

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow v_{\max} = 4\text{m/s}$$

γ. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου συμβαίνει όταν το σώμα φθάνει στην ακραία θετική απομάκρυνση η οποία απέχει $A=0,4\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, οπότε η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + A = 0,8\text{m}$$

δ. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα υπάρχει αρχική φάση, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$.

$$\text{Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι } x = 0,4\text{m}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{SI}),$$

$$\text{της ταχύτητας - χρόνου είναι } v = 4\text{syn}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{SI})$$

$$\text{και της ορμής - χρόνου είναι } p = 4\text{syn}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{SI}).$$

7.Γ.18

α. Από τα δεδομένα του διαγράμματος προκύπτει η σταθερά επαναφοράς και η ενέργεια της ταλάντωσης

$$D = -\frac{F_{\max}}{A} \Rightarrow D = 50 \text{ N/m} , \quad E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}50 \cdot 0,2^2 \text{ J} = 1 \text{ J}$$

$$\beta. \Sigma F = -Dx \Rightarrow -5 \text{ N} = -50x \Rightarrow x = 0,1 \text{ m}$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = 0,25 \text{ J}$$

$$\gamma. K = E - U = E - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow K = 1 - 25x^2 , \text{ (SI)}$$

$$\delta. \left. \begin{array}{l} K = 3U \\ K + U = E \end{array} \right\} 4U = E \Rightarrow 4 \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm 0,1 \text{ m}$$

7.Γ.19

α. Από το διάγραμμα έχουμε: $K_{\max} = E = 2 \text{ J}$, $A = 0,2 \text{ m}$.

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} = 2 \text{ m/s}$$

$$\beta. \frac{dp}{dt}_{\max} = \Sigma F_{\max} = DA , \text{ (1)}$$

$$K_{\max} = U_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow D = 100 \text{ N/m}$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{dp}{dt}_{\max} = 20 \text{ kgm/s}^2$$

$$\gamma. \Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

$$\delta. \text{ i. } K = \frac{15}{16}U_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{15}{16}U_{\max} \Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{15}{16} \cdot \frac{2U_{\max}}{m}} \Rightarrow |v| = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ m/s}$$

$$\text{ii. } \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v \text{ (1)}$$

$$U + K = U_{\max} \Rightarrow U + \frac{15}{16}U_{\max} = U_{\max} \Rightarrow U = \frac{1}{16}U_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{16} \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{4} \Rightarrow |x| = 0,05 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = |\Sigma F| \cdot |v| = D|x||v| = 2,5\sqrt{15} \text{ J/s}$$

7.Γ.20

α. Με εφαρμογή δύο φορές της ΑΔΜΕ βρίσκουμε τις ταχύτητες του Σ_2 πριν και μετά την κρούση:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 6 \text{ m/s} , \quad v'_1 = \sqrt{2gh_2} = 4 \text{ m/s}$$

Με εφαρμογή της ΑΔΟ για την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση

$$mv_1 = Mv'_2 - mv'_1 \Rightarrow v'_2 = 1 \text{ m/s}$$

β. Η ταχύτητα που αποκτά το Σ_1 αμέσως μετά την κρούση αποτελεί τη $v_{\max}$ της ταλάντωσης, με εφαρμογή της ΑΔΕΤ έχουμε

$$\text{ΑΔΕΤ: } \frac{1}{2}mv_2'^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

$$\gamma. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = \pm DA = \pm 10 \text{ kgm/s}^2$$

δ. Η θέση ισορροπίας του συστήματος $m-k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1 \text{ m}$.

Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + A = 0,2 \text{ m}$.

$$U_{\text{ελ,max}} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = 2 \text{ J}$$

7.Γ.21

α. Στην τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας η ΣF που ασκείται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = -k_1x - k_2x \Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2)x$$

άρα ικανοποιείται η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα α.α.τ. με

$$D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N/m}.$$

β. $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \text{ kg}}{200 \text{ N/m}}} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x=+A$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

και η σχέση $x-t$ γράφεται

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \pi/2) \text{ (SI)}$$

$$\gamma. K_{\max} = E = \frac{1}{2}DA^2 = 4 \text{ J},$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = 100x^2 \Rightarrow \frac{U}{K_{\max}} = 25x^2$$

δ. Η νέα ταλάντωση θα έχει ίδια θέση ισορροπίας με την αρχική αλλά θα μεταβληθεί η σταθερά επαναφοράς της. Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ έχουμε

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{x=\frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{8}DA^2, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 = \frac{1}{2}k_1A'^2 \xrightarrow{(1)} A' = \frac{\sqrt{11}}{10}m$$

7.Γ.22

α. Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε

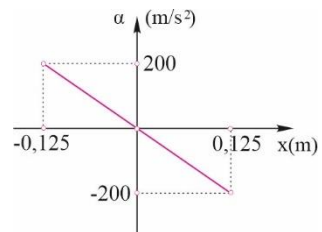
$$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow m\omega^2x^2 + mv^2 = mv_{\max}^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{v_{\max}^2 - v^2}{x^2}} \Rightarrow \omega = 40 \text{ rad/s}$$

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε

$$\omega^2x^2 + v^2 = \omega^2A^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} \Rightarrow A = 12,5 \text{ cm}$$

γ. $\alpha = -\omega^2x \Rightarrow$

$$\alpha = -1600x \text{ (S.I.)}, \quad -0,125 \text{ m} \leq x \leq 0,125 \text{ m}$$



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

δ. Το σώμα μηδενίζει την ταχύτητά του και την κινητική του ενέργεια κάθε φορά που περνά από ακραία θέση της ταλάντωσης, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ rad}. \text{ Στην περίπτωση μας την } t=0\text{s}, \text{ έχουμε αρχική φάση } \varphi_0 = \frac{3\pi}{10} \text{ rad}, \text{ οπότε η 3}^\text{η} \text{ φορά}$$

$$\text{θα είναι όταν το σώμα αποκτήσει φάση ίση με } (2 \cdot 2 + 1)\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

Άρα, έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + 40t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{11\pi}{200} \text{ s}$$

7.Γ.23

α. $\alpha = -\omega^2x \Rightarrow \omega = 20 \text{ rad/s}$

$$k = m\omega^2 \Rightarrow k = 400 \text{ N/m}$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x<0$ και $v>0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}\text{rad}$.

γ. Όταν $U=U_{\max}$ τότε $K=0\text{J}$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{Fεπ}} \Rightarrow W_{\text{Fεπ}} = -\frac{1}{2}mv_1^2 = -12,5\text{J}$$

δ. Το σώμα μεγιστοποιεί το μέτρο της επιτάχυνσής του κάθε φορά που περνά από ακραία θέση της ταλάντωσης, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $(2\kappa+1)\frac{\pi}{2}\text{rad}$. Στην περίπτωση μας την $t=0\text{s}$, έχουμε αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}\text{rad}$, οπότε η 1^η φορά θα είναι όταν η ταλάντωση αποκτήσει φάση ίση με $(2 \cdot 2 + 1)\frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{5\pi}{2}\text{rad}$

Άρα, έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{3} + 20t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{\pi}{24}\text{s}$$

7.Γ.24

$$\alpha. T = \frac{\pi}{15}\text{s}, \omega = \frac{2\pi}{T} = 30\text{rad/s}$$

Από τον τύπο της μέγιστης ταχύτητας έχουμε

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{6}{30}\text{m} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

β. Από τον τύπο της περιόδου έχουμε

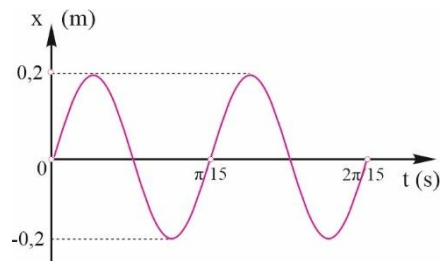
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{kT^2}{4\pi^2} \Rightarrow m = 1\text{kg}$$

$$\gamma. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,2 \cdot \eta\mu 30t \text{ (S.I.)}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

$$\delta. K=3U.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε



$$K + U = E_T \Rightarrow 4U = E_T \Rightarrow 4 \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow x = \pm 0,1m$$

7.Γ.25

$$A. \alpha. \Sigma F = -kx, D = k, \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\max} = \Sigma F_{\max} = kA \Rightarrow \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\max} = 10 \text{ kgm/s}^2$$

β. Η θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$, που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g_{\eta\mu\phi} - k\Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_1 g_{\eta\mu\phi}}{k} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,05m$$

Στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $A - \Delta \ell_0$, οπότε

το πηλίκο της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης στην πάνω ακραία θέση είναι

$$\frac{U_{ελ}}{U_{ταλ}} = \frac{\frac{1}{2} k (A - \Delta \ell_0)^2}{\frac{1}{2} k A^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ}}{U_{ταλ}} = \frac{0,05^2}{0,1^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ}}{U_{ταλ}} = \frac{1}{4}$$

$$B. \alpha. D_2 = \frac{k \cdot m_2}{m_1 + m_2} = 50 \text{ N/m}$$

β. Για το Σ_2 που εκτελεί ταλάντωση ισχύει

$$F - m_2 g_{\eta\mu\phi} = -D_2 x$$

$$F = 0N \Rightarrow x = \frac{m_2 g_{\eta\mu\phi}}{D_2} = 0,1m$$

Το Σ_2 χάνει την επαφή του σε απομάκρυνση 10cm πάνω από τη θέση ισορροπίας των Σ_1 και Σ_2 δηλαδή στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.