Διαγώνισμα 4.30

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 217.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α4. $\int_1^2 f(x)dx=-1,\quad \int_2^3 f(x)dx=2,\quad \int_1^4 f(x)dx=0,\quad \int_1^3 |f(x)|dx=3.$

Α5. **i)** Σ, **ii)**Λ, **iii)** Λ, **iv)**Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\left(e^x+1\right)^2+1\right)'=2\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)'$$
$$=2e^x\left(e^x+1\right)>0,$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έπεται ότι η f είναι «1-1», άρα είναι και αντιστρέψιμη. Για να προσδιορίσουμε την f^{-1}, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Θέτουμε

$$y=f(x),\ x\in\mathbb{R}\qquad (1)$$

και έχουμε τις ισοδυναμίες

$$y=f(x),\ x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\left(1+e^x\right)^2+1\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-1=\left(1+e^x\right)^2\\ x\in\mathbb{R},\ y-1\geq 0\end{cases}$$

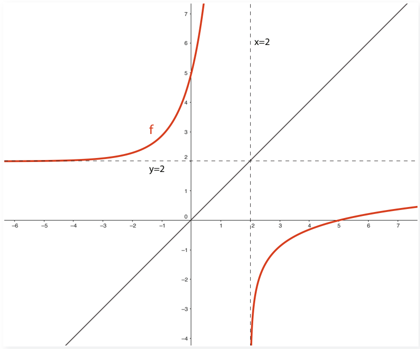
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y-1}=\left|1+e^x\right|\\ x\in\mathbb{R},\ y\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y-1}=1+e^x\\ x\in\mathbb{R},\ y\geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y-1}-1=e^x\\ x\in\mathbb{R},\quad y\geq 1,\quad \sqrt{y-1}-1>0.\end{cases}$$

Ισχύει επίσης η ισοδυναμία

$$\sqrt{y-1}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{y-1}>1 \Leftrightarrow y-1>1 \Leftrightarrow y>2,$$

οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή



$$\begin{cases} e^x=\sqrt{y-1}-1 \\ x\in\mathbb{R}, \quad y>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left(\sqrt{y-1}-1\right) \\ x\in\mathbb{R}, \quad y>2 \end{cases}$$

Έπεται λοιπόν από τη σχέση (1) ότι $f^{-1}(y)=\ln\left(\sqrt{y-1}-1\right)$ για κάθε $y>2$. Γράφοντας την ίδια σχέση με μεταβλητή το x αντί για το y, μας δίνει ότι

$$\boxed{f^{-1}(x)=\ln\left(\sqrt{x-1}-1\right), \ x>2.}$$

B2. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}\circ g$ είναι το σύνολο $D_{f^{-1}\circ g}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}$. Αυτές οι δύο συνθήκες γράφονται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{aligned} x>0 \quad \text{και} \quad g(x)>2 &\Leftrightarrow x>0 \quad \text{και} \quad 1+\ln x>2 \\ &\Leftrightarrow x>0 \quad \text{και} \quad \ln x>1 \\ &\Leftrightarrow x>0 \quad \text{και} \quad x>e \\ &\Leftrightarrow x>e. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $D_{f^{-1}\circ g}=(e,+\infty)$. Όσον αφορά τον τύπο αυτής της συνάρτησης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x>e$, ισχύει

$$\boxed{\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}\left(g(x)\right)=\ln\left(\sqrt{1+\ln x-1}-1\right)=\ln\left(\sqrt{\ln x}-1\right).}$$

B3. Στη λύση του Ερωτήματος B1 έχουμε δείξει ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)=2e^{2x}+2e^x$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=4e^{2x}+2e^x>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση:
Η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα, ούτε σημεία καμπής, αφού ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ούτε η παράγωγός της, ούτε η δεύτερή της παράγωγος μηδενίζονται.

B4. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\left(1+e^x\right)^2+1\right) = (1+0)^2+1 = 2,$$

άρα η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y=2$ είναι «κάτω» από τη C_f, αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)>2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτή η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)>2 \Leftrightarrow \left(1+e^x\right)^2+1>2 \Leftrightarrow e^{2x}+2e^x>0,$$

η οποία πράγματι ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο.

B5. Με βάση όλες τις πληροφορίες για τη μονοτονία, την κυρτότητα της f και τις ασύμπτωτες της C_f, μπορούμε να σχεδιάσουμε τη C_f όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y=x$, οπότε μπορούμε να τη σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αυτήν τη συμμετρία και χωρίς να χρειαστεί να μελετήσουμε αναλυτικά την αντίστροφη συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f'(x)=\left(e^x+x^2-\alpha x+1\right)'=e^x+2x-\alpha$.
- $f''(x)=\left(e^x+2x\right)'=e^x+2>0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

$C_{f'}$, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E=\int_0^1 |f'(x)|dx.$$

Επειδή (όπως είδαμε στο Γ1) ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Μάλιστα, λόγω της μονοτονίας, έπεται η παρακάτω συνεπαγωγή:

$$x\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq f'(0)\Rightarrow f'(x)\geq 1-\alpha\geq 0,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι $\alpha\leq 1$. Άρα, για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $f'(x)\geq 0$ και έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$E=\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1=f(1)-f(0)=e+1-\alpha+1-1-1=e-\alpha.$$

Μας έχει δοθεί όμως στην υπόθεση ότι $E=e-1$, οπότε από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι

$$\boxed{e-1=e-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1.}$$

Για $\alpha=1$ προκύπτει ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$f(x)=e^x+x^2-x+1,\quad \text{και}\quad f'(x)=e^x+2x-1.$$

Γ3. i. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης, από τον παραπάνω τύπο, προκύπτει ότι $f'(0)=0$. Επομένως, ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0.$
- $x<0\Rightarrow f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0.$

Με βάση αυτές τις συνεπαγωγές, μπορούμε να σχεδιάσουμε τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0.+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$, την τιμή $f(0)=2.$

Σημείωση:

Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f, προκύπτουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0)=2$
- $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=2$

Άρα ισχύει $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ii. Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(e^x)+\eta\mu x>e^{\eta\mu x}+\eta\mu^2 x+1 \Leftrightarrow f(e^x)>e^{\eta\mu x}+\eta\mu^2 x-\eta\mu x+1$$

$$\Leftrightarrow f(e^x)>f(\eta\mu x) \quad (1)$$

Για κάθε $x\in[0,\pi]$, οι αριθμοί $\eta\mu x$ και e^x ανήκουν στο διάστημα $[0,+\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x>\eta\mu x \quad (2)$$

Για $x=0$, είναι εύκολο να δούμε ότι η (2) αληθεύει. Επίσης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x\in(0,\pi]$, ισχύει

$$e^x>e^0=1\geq\eta\mu x,$$

οπότε η (2) αληθεύει και γι' αυτές τις τιμές του x. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σχέση (2), άρα και η ζητούμενη ανισότητα αληθεύουν για κάθε $x\in[0,\pi]$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Γ4. Ισχύει $f(1)=e+1$ και $f'(1)=e+1$, οπότε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e-1=(e+1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y-e-1=(e+1)x-e-1 \Leftrightarrow y=(e+1)x.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου $O(0,0)$ ικανοποιούν την εξίσωση αυτής της (ε), άρα αυτή η ευθεία διέρχεται από το O.

Η δοσμένη εξίσωση ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, αφού οι συναρτήσεις f και f'

ορίζονται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τη λύση του Ερωτήματος Γ1, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f'(f(x)-1)=e+1 \Leftrightarrow f'(f(x)-1)=f'(1)$$

$$\Leftrightarrow f(x)-1=1 \Leftrightarrow f(x)=2.$$

Όμως στο Ερώτημα Γ3i δείξαμε ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ (δείτε τη σημείωση στο τέλος της λύσης εκείνου του ερωτήματος). Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

Γ5. Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)\left(f'(f(x))-f'(ex+x)\right)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{\left(f'(f(x))-f'(ex+x)\right)}\right)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα όρια καθενός από τους δύο παράγοντες. Το όριο του 1ου παράγοντα ισούται με

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{1}=\pi(-1)=-\pi \qquad (3)$$

όπου στην 1η ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Περνάμε τώρα στο όριο του δεύτερου παράγοντα, για το οποίο αρχικά θα πρέπει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Όπως είδαμε σε προηγούμενα ερωτήματα, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη (ε) –την οποία προσδιορίσαμε στο Ερώτημα Γ4– με εξαίρεση το σημείο επαφής. Με άλλα λόγια, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι $f(x)\geq(e+1)x=ex+e$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως, για x κοντά στο 1, ισχύει

$$f(x)>ex+e\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(f(x))>f'(ex+x)\Leftrightarrow f'(f(x))-f'(ex+x)>0. \qquad (4)$$

Επιπλέον, αφού οι f και f' είναι συνεχείς, ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\left(f'(f(x))-f'(ex+x)\right)=f'(f(1))-f'(e+1)=0. \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5), προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f'(f(x))-f'(ex+x)}=+\infty. \quad (1)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τις σχέσεις (3) και (6) ότι

$$\boxed{L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{f'(f(x))-f'(ex+x)}\right)=(-\pi)\cdot(+\infty)=-\infty.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η h είναι (δύο φορές) παραγωγίσιμη, ως πράξη (δύο φορές) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα τα κρίσιμα σημεία της είναι τα σημεία μηδενισμού της h'. Επομένως, σε αυτό το ερώτημα, σκοπεύουμε να αποδείξουμε ότι η h' έχει ακριβώς μία ρίζα και ότι αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(1,2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano για την h'. Για κάθε $x<3$ ισχύει

$$h'(x)=\ln(3-x)-\frac{x}{3-x} \quad \text{και} \quad h''(x)=-\frac{1}{3-x}-\frac{3}{(3-x)^2}.$$

Ισχύει προφανώς $h''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$, άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$. Ισχύουν επίσης τα εξής:

- Η h' είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- $h'(1)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\frac{1}{2}(\ln 4-\ln e)>0$.
- $h'(2)=\ln 1-\frac{2}{1}=-2<0$.

Εφόσον $h'(1)h'(2)<0$, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$. Καθώς η h' είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, έπεται ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της. Συνεπώς, το $x_0\in(1,2)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της h.

Δ2. Από τον ορισμό του x_0, ισχύει $h'(x_0)=0$. Η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$, επομένως ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x<x_0 \Rightarrow h'(x)>h'(x_0)\Rightarrow h'(x)>0$.

- $x_0 < x < 3 \Rightarrow h'(x_0) > h'(x) \Rightarrow h'(x) < 0$.

Εφόσον η h είναι συνεχής στο x_0, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$ $\qquad$ x_0 $\qquad$ $+\infty$	
$h'(x)$	$+$	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Επομένως, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, 3)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση x_0. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο ριζών, θα υπολογίσουμε τις εικόνες των διαστημάτων $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και $\Delta_2 = [2, 3]$ μέσω της h.

Καθώς $x_0 > 1$, έπεται ότι η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, x_0]$. Άρα

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x \to -\infty} h(x), h(1)\right].$$

Ισχύουν τα εξής:

- $h(1) = \ln 2 + e > 0.$
- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot \ln(3-x) + e\right) = -\infty,$

  όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} \ln(3-x) \overset{u=3-x}{=} \lim_{u \to +\infty} \ln u = +\infty.$

Συμπεραίνουμε τελικά ότι $h(\Delta_1) = (-\infty, e + \ln 2]$. Επειδή $e + \ln 2 > 0$, έπεται ότι $0 \in h(\Delta_1)$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$. Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, το x_1 είναι η μόνη ρίζα της σε αυτό το διάστημα. Παρατηρούμε ότι $h(1) \neq 0$, άρα $x_1 < 1$.

Περνάμε τώρα στο διάστημα $\Delta_2 = [2, 3]$. Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα, άρα

$$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x \to 3^-} h(x), h(2)\right].$$

Ισχύουν τα εξής:

- $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(x \ln(3-x) + e\right) = -\infty,$

  όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 3^-}\ln(3-x)\overset{u=3-x}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

- $h(2)=2\ln 1+e=e>0$

Ισχύει λοιπόν $h(\Delta_2)=(-\infty,e]$, οπότε $0\in h(\Delta_2)$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$. Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2, το x_2 είναι η μόνη ρίζα της σε αυτό το διάστημα. Παρατηρούμε ότι $h(2)\neq 0$, άρα $x_2>2$.

Έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση h έχει τουλάχιστον δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<2<x_2<3$. Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,3)$, θα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Άρα, από τον συνδυασμό των παραπάνω, προκύπτει ότι η h έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με

$$\boxed{x_1<1<2<x_2<3.}$$

Δ3. i. Εφόσον το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο, έπεται ότι

$$(\mathrm{A\Delta})=(\mathrm{B\Gamma})\Leftrightarrow|f(\alpha)|=|g(\beta)|\Leftrightarrow|\ln(3-\alpha)|=\left|-\frac{e}{\beta}\right|\quad(1)$$

Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε απαλοιφή των απόλυτων τιμών. Ισχύει η ισοδυναμία

$$0\le\alpha<2\Leftrightarrow 0\ge-\alpha>-2\Leftrightarrow 3\ge 3-\alpha>1$$

$$\Leftrightarrow\ln 3\ge\ln(3-\alpha)>\ln 1=0$$

και η ισοδυναμία $\beta<0\Leftrightarrow-\dfrac{e}{\beta}>0$. Άρα η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με την

$$\boxed{\ln(3-\alpha)=-\frac{e}{\beta}\Leftrightarrow\beta=\frac{-e}{\ln(3-\alpha)}.}$$

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{\Gamma\Delta})=|\alpha-\beta|\cdot\ln(3-\alpha)$$

$$=\left(\alpha+\frac{e}{\ln(3-\alpha)}\right)\cdot\ln(3-\alpha)=\alpha\ln(3-\alpha)+e$$

Συνεπώς το εμβαδόν δίνεται, συναρτήσει του $\alpha \in [0,2)$, από τον τύπο

$$\mathrm{E}(\alpha) = \alpha \ln(3-\alpha) + e = h(\alpha).$$

Από το Ερώτημα Δ2 γνωρίζουμε ότι η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in (1,2)$, άρα το μέγιστο εμβαδόν είναι ίσο με $\mathrm{E}(x_0)$. Είδαμε όμως στο Ερώτημα Δ1 ότι $h'(x_0)$, οπότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow \ln(3-x_0) - \frac{x_0}{3-x_0} = 0 \Rightarrow \ln(3-x_0) = \frac{x_0}{3-x_0}.$$

Επομένως, το μέγιστο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\mathrm{E}(x_0) = x_0 \ln(3-x_0) + e = x_0 \cdot \frac{x_0}{3-x_0} + e \boxed{= e + \frac{x_0^2}{3-x_0},}$$

όπως θέλαμε.

Δ4. Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει $2(x+1) > 0$ και επιπλέον

$$1 \le x \le 2 \Leftrightarrow -1 \ge -x \ge -2 \Leftrightarrow 2 \ge 3-x \ge 1$$
$$\Leftrightarrow \ln 2 \ge \ln(3-x) \ge \ln 1 = 0$$

Άρα ισχύει

$$\frac{h(x)-e}{2(x+1)} = \frac{x\ln(3-x)}{2(x+1)} \ge 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{h(x)-e}{2(x+1)}$ είναι συνεχής, ως πηλίκο συνεχών. Άρα

$$\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)} dx > 0. \qquad (2)$$

Στο Δ1 δείξαμε ότι η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$, άρα η h είναι κοίλη. Συμπεραίνουμε ότι η C_h βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{A}(2,h(2))$. Επομένως, ισχύει η συνεπαγωγή

$$h(x) \le -2x + e + 4 \Leftrightarrow h(x) - e \le -2x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(x)-e}{2(x+1)} \le \frac{-2x+4}{2(x+1)} \Leftrightarrow \frac{h(x)-e}{2(x+1)} \le \frac{-x+2}{x+1},$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$. Συνεπώς, αφού οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, θα ισχύει για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ότι

$$\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx < \int_1^2 \frac{-x+2}{x+1}dx \quad (3)$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι ίσο με

$$\int_1^2 \frac{-x+2}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{-x-1+3}{x+1}dx = \int_1^2\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)dx = \left[-x\right]_1^2 + \left[3\ln(x+1)\right]_1^2$$

$$= -2+1+3\ln 3-3\ln 2 = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1.$$

Άρα η (2) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx < 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1.$$

Η τελευταία ανισότητα, σε συνδυασμό με τη (2), μας δίνουν το ζητούμενο.