# Διαγώνισμα 4.29

## ΘΕΜΑ Α
### Λύση

**Α1.** Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

**Α2.** Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

**Α3. i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)**Σ, **v)** Λ

Όταν μας δίνεται ο τύπος της ασύμπτωτης (όπως εδώ), τότε είναι συχνά χρήσιμο να δουλεύουμε απευθείας με τον ορισμό.

## ΘΕΜΑ Β
### Λύση

**Β1.** Σύμφωνα με τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης (σελ. 162 του σχολικού βιβλίου), η ευθεία $y = x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + x}{x - 2} - (x + 3)\right) = 0.$$

Το όριο στο αριστερό μέλος γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + x}{x - 2} - \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + x - (x^2 + 3x - 2x - 6)}{x - 2}\right) = \lim_{x \to +\infty}\frac{6}{x - 2} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

**Β2.** Το ερώτημα μας ζητά ουσιαστικά να δείξουμε ότι $f(x) > x + 3$ για κάθε $x > 2$. Είδαμε όμως στο προηγούμενο ερώτημα ότι

$$f(x) - (x + 3) = \frac{x^2 + x}{x - 2} - (x + 3) = \frac{6}{x - 2},$$

το οποίο είναι προφανώς θετικό για $x > 2$. Έπεται έτσι ότι $f(x) > x + 3$ για κάθε $x > 2$.

**Β3. i.** Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$E = \int_{\alpha}^{\alpha+2} |f(x) - (x + 3)|dx \overset{f(x)>x+3}{=} \int_{\alpha}^{\alpha+2} \frac{6}{x - 2}dx$$

$$= 6\big[\ln(x - 2)\big]_{\alpha}^{\alpha+2} = 6\big[\ln\alpha - \ln(\alpha - 2)\big] = 6\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 2}\right) \quad \text{τετραγωνικές μονάδες.}$$

**ii.** Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, ισχύει

$$\mathrm{E}(3)=6\ln\left(\frac{3}{3-2}\right)=6\ln 3$$

τετραγωνικές μονάδες. Επιπρόσθετα,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}6\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right). \qquad (1)$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\alpha-2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\alpha}=1,$$

άρα, αν στο όριο στη σχέση (1) θέσουμε $u=\frac{\alpha}{\alpha-2}$ τότε $u\to 1$, και αυτό το όριο γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{\alpha\to+\infty}6\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right)=\lim_{u\to 1}6\ln u=6\ln 1=0.$$

**B4.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x}{x-2}\right)'=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

Έστω $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ σημείο της $C_f$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο $\mathrm{M}$ είναι

$$(\varepsilon_{\mathrm{M}}):y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

$$\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+\left(f(x_0)-x_0f'(x_0)\right).$$

Άρα, για να είναι η ευθεία $y=-5x+27$ εφαπτόμενη της $C_f$, θα πρέπει το $x_0$ να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις

$$\begin{cases} f'(x_0)=-5 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}$$

Αυτό το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2-4x_0-2}{(x_0-2)^2}=-5 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0-2=-5(x_0^2-4x_0+4) \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0-2=-5x_0^2+20x_0-20 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_0^2-24x_0+18=0 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0+3=0 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_0^2-4x_0+3$ είναι ίση με

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4.$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $x_0^2-4x_0+3$ είναι οι

$$\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4+2}{2}=3 \quad \text{και} \quad \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4-2}{2}=1.$$

Θα βρούμε ποια από αυτές τις δύο τιμές ικανοποιεί και την ισότητα $f(x_0)-x_0f'(x_0)=27$. Αν $x_0=1$, τότε

$$f(x_0)-x_0f'(x_0)=f(1)-f'(1)=\frac{1^2+1}{1-2}-(-5)=-2+5=3\neq27,$$

άρα αυτή η τιμή του $x_0$ απορρίπτεται. Αν $x_0=3$, τότε

$$f(x_0)-x_0f'(x_0)=f(3)-3f'(3)=\frac{3^2+3}{3-2}-3\cdot(-5)=12+15=27,$$

άρα αυτή η τιμή του $x_0$ γίνεται δεκτή.

Επομένως, η ευθεία $y=-5x+27$ εφάπτεται της $C_f$ στο σημείο $A(3,f(3))$.

## ΘΕΜΑ Γ
## Λύση

**Γ1.** Αρχικά, υπολογίζουμε το $f(1)$ κατευθείαν από τη σχέση που δίνεται στην εκφώνηση:

$$f(1)=\frac{12}{5}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\right)\overset{0/0}{=}\frac{12}{5}\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2x}=-\frac{6}{5},$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Από την υπόθεση, γνωρίζουμε επίσης ότι $f(-1)=f(1)$, οπότε, από τον παραπάνω υπολογισμό, προκύπτει και ότι $f(-1)=-\frac{6}{5}$.

Για να υπολογίσουμε το $f(3)$, χρησιμοποιούμε την άλλη συνθήκη που μας έχει δοθεί, αυτή που περιέχει το ολοκλήρωμα. Για να απλοποιήσουμε το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_{-2}^{3}xf''(x)dx=\int_{-2}^{3}x\left(f'(x)\right)'dx=\left[xf'(x)\right]_{-2}^{3}-\int_{-2}^{3}f'(x)dx$$

$$=3f'(3)-(-2)f'(-2)-\left[f(x)\right]_{-2}^{3}=0-0-\left[f(3)-f(-2)\right]$$

$$=f(-2)-f(3)=\frac{1}{2}-f(3).$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι το ολοκλήρωμα στο πρώτο βήμα ισούται με $-\frac{8}{5}$, οπότε προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι

$$-\frac{8}{5}=0-f(3)\Leftrightarrow f(3)=\frac{8}{5}.$$

**Γ2.** Από το γράφημα της παραγώγου προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,0)$, οπότε, λόγω συνέχειας, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0]$.
- $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,3)$, οπότε, λόγω συνέχειας, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.
- $f'(0)=0$, άρα το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της $f$.

Σχεδιάζουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

| $x$ | $-2$ | $0$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Σύμφωνα με το δεύτερο σχόλιο στη σελ. 146 του σχολικού βιβλίου, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της $f$ στα άκρα του κλειστού διαστήματος $[2,3]$, καθώς και στο κρίσιμο σημείο $x=0$.

- Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $f(0)=-\frac{5}{2}$.
- Επίσης, από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $f(2)=0$.
- Στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίσαμε ότι $f(3)=\frac{8}{5}$.

Η μεγαλύτερη από αυτές τις τιμές είναι το $\frac{8}{5}$, άρα αυτή είναι η μέγιστη τιμή της $f$. Αντίστοιχα, το $-\frac{5}{2}$ είναι η ελάχιστη τιμή της $f$. Από τον πίνακα μονοτονίας, μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-2$, με τιμή $f(-2)=0$.

**Γ3.** Από το γράφημα της παραγώγου προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2,-1]$ και $[1,3]$, οπότε η $f$ είναι κοίλη σε αυτά τα διαστήματα.
- Η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, οπότε η $f$ είναι κυρτή σε αυτό το διάστημα.
- Τέλος, η $C_f$ παρουσιάζει δύο σημεία καμπής, αυτά στα οποία αλλάζει η κυρτότητα της $f$. Αυτά τα σημεία είναι το $A(-1,f(-1))\equiv\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$ και το $\Gamma(1,f(1))\equiv\left(1,-\frac{6}{5}\right)$.

Συνοψίζουμε αυτά τα συμπεράσματα στον ακόλουθο πίνακα κυρτότητας:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $\smile$ | | $\smile$ |

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A$ είναι

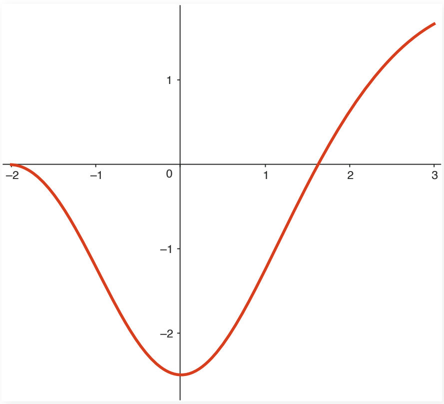
$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2(x-1)-\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow y=2x-\frac{10}{5}-\frac{6}{5} \Leftrightarrow y=2x-\frac{16}{5}.$$

Η $f$ είναι κυρτή στο $[-1,1]$, άρα η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(1,f(1))$ θα βρίσκεται «κάτω» από τη $C_f$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Συνεπώς για κάθε $x\in[-1,1]$ θα ισχύει οτι

$$\boxed{f(x)\geq 2x-\frac{16}{5},\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

**Γ4.** Σύμφωνα με όσες πληροφορίες έχουμε συλλέξει για τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα της $f$ και τα σημεία καμπής της $C_f$, μπορούμε πλέον να σχεδιάσουμε τη $C_f$. Χρησιμοποιούμε επίσης όλες τις πληροφορίες που γνωρίζουμε για τις τιμές της $f$ στα σημεία $-3,-2,-1,0,1,2$. Η $C_f$ φαίνεται λοιπόν στο παρακάτω σχήμα:




**Γ5. i.** Το πρώτο όριο ισούται με

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+f(1-h)+\frac{6}{5}}{h^2} \overset{0/0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1-h)}{2h}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f''(1+h)+f''(1-h)}{2} \overset{f''\text{συν.}}{=} f''(1),$$

όπου στο πρώτο και στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$ και στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της $f''$.

**Σημείωση:**
Αν δεν μας είχε δοθεί ότι η $f''$ είναι συνεχής, δεν θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε το τελευταίο βήμα. Πράγματι, χωρίς την υπόθεση της συνέχειας, δεν ισχύει απαραίτητα ότι

$$\lim_{h\to 0} f''(1+h)=f''(1) \quad \text{ούτε ότι} \quad \lim_{h\to 0} f''(1-h)=f''(1)$$

Παρ' όλα αυτά, θα μπορούσαμε και πάλι να αποδείξουμε το ζητούμενο, απλώς αυτήν τη φορά με διαφορετικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, αντί να χρησιμοποιήσουμε για δεύτερη φορά τον κανόνα De L' Hospital, θα εφαρμόζαμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση $f'$. Έχουμε δει αυτήν τη λύση στο Ερώτημα Δ5 του Διαγωνίσματος 4.2.

Περνάμε τώρα στο δεύτερο όριο: Αυτό ισούται με

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{(x^2-1)(5f(x)-10x+16)}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{5f(x)-10x+16}\right). \quad (1)$$

Ο πρώτος όρος ισούται με

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^-}e^{x-1}=1, \quad (2)$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Για τον δεύτερο παράγοντα, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 1^-}\left(5f(x)-10x+16\right)=0 \quad (3)$$

Όμως, από το προηγούμενο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι

$$f(x)\ge 2x-\frac{16}{5}\Rightarrow 5f(x)-10x+16\ge 0$$

για κάθε $x\in[-1,1]$, με ισότητα μόνο για $x=1$. Σε συνδυασμό με την (3), αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{5f(x)-10x+16}=+\infty.$$

Συνδυάζοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $+\infty$.

**ii.** Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου $\Omega$ θα δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega)=\int_0^1 |f(x)|dx.$$

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι

$$f(x)\le f(1)=-\frac{6}{5}. \qquad (4)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Αρχικά, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E(\Omega)=\int_0^1 |f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx.$$

Επίσης, εφόσον η ισότητα στην (4) ισχύει μόνο για $x=1$, συμπεραίνουμε ότι για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει γνήσια ανισότητα, δηλαδή

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left(-\frac{6}{5}\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<-\frac{6}{5} \Leftrightarrow -\int_0^1 f(x)dx>\frac{6}{5} \Leftrightarrow E(\Omega)>\frac{6}{5}, \qquad (5)$$

η οποία αποδεικνύει το αριστερό κομμάτι της ζητούμενης ανισότητας. Για να αποδείξουμε το δεξιό μέρος, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ3, σύμφωνα με το οποίο ισχύει $f(x)\ge 2x-\frac{15}{6}$ για κάθε $x\in[0,1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Συμπεραίνουμε ότι, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ισχύει γνήσια ανισότητα, δηλαδή

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(2x-\frac{16}{5}\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\left[x^2-\frac{16}{5}x\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=1-\frac{16}{5}=\frac{-11}{5} \Leftrightarrow -\int_0^1 f(x)dx<\frac{11}{5}$$

$$\Leftrightarrow E(\Omega)<\frac{11}{5}.$$

Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με την (5), αποδεικνύουν το ζητούμενο αποτέλεσμα.

## ΘΕΜΑ Δ
### Λύση

**Δ1.** Εφόσον η $f$ είναι παραγωγίσιμη και εφόσον για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) \neq 0$ και $e^x - 1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x + 1}. \qquad (1)$$

Όμως, γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $(e^{2x} - 1)f'(x) - 2e^x f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq 0$, αυτή η ισότητα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} f(x).$$

Αντικαθιστώντας την $f'$ με $\frac{2e^x}{e^x + 1} f(x)$ στη σχέση (1), παίρνουμε ισοδύναμα ότι

$$g'(x) = \frac{\frac{2e^x}{e^{2x} - 1} f(x)}{f(x)} - \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} + \frac{e^x(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} - \frac{e^x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1}$$

$$= \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} - \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} = 0, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ., συμπεραίνουμε ότι η $g$ θα είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν σταθεροί πραγματικοί αριθμοί $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι, ώστε

- $g(x) = c_1$ για κάθε $x < 0$,
- $g(x) = c_2$ για κάθε $x > 0$.

Ξεκινάμε με την πρώτη από αυτές τις σχέσεις, η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln|f(x)| - \ln|e^x - 1| + \ln(e^x + 1) = c_1.$$

Όμως, για κάθε $x < 0$ ισχύει $e^x < 1$ και άρα $|e^x - 1| = 1 - e^x$. Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln|f(x)| - \ln(1 - e^x) + \ln(e^x + 1) = c_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \ln\left(\frac{1 - e^x}{e^x + 1}\right) + c_1. \qquad (2)$$

Επειδή η $f$ είναι περιττή, προκύπτει ότι $f(-1) = -f(1) = -\frac{e - 1}{e + 1} < 0$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση $x = -1$, παίρνουμε ότι

$$\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{1-e^{-1}}{e^{-1}+1}\right)+c_1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0.$$

Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x<0$, έπεται ότι η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$. Είδαμε παραπάνω ότι $f(-1)<0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x<0$. Ισχύει λοιπόν $|f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Συνεπώς, η σχέση (2), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $c_1=0$, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln(-f(x))=\ln\left(\frac{1-e^x}{e^x+1}\right)\Leftrightarrow -f(x)=\frac{1-e^x}{e^x+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}. \qquad (3)$$

Εξετάζουμε τώρα το διάστημα $(0,+\infty)$. Η σχέση $g(x)=c_2$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln|f(x)|-\ln|e^x-1|+\ln(e^x+1)=c_1.$$

Όμως, για κάθε $x>0$, ισχύει ότι $e^x>1$, άρα $|e^x-1|=e^x-1$. Συνεπώς, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\ln|f(x)|-\ln(e^x-1)+\ln(e^x+1)=c_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)|=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+c_2 \qquad (4)$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $f(1)=\frac{e-1}{e+1}$. Άρα, για $x=1$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)+c_2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)+c_2 \Leftrightarrow c_2=0.$$

Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$, έπεται ότι η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Είδαμε παραπάνω ότι $f(1)=\frac{e-1}{e+1}>0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς, ισχύει $|f(x)|=f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Συνεπώς, η σχέση (4), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $c_2=0$, συνεπάγεται ότι

$$\ln(f(x))=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

για κάθε $x>0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ για κάθε $x\neq 0$. Επίσης, αντικαθιστώντας $x=0$ στη σχέση $(e^{2x}-1)f'(x)-2e^x f(x)=0$, παίρνουμε

$f(0)=0$, οπότε η $f$ συμφωνεί με την $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ και για $x=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}.}$$

**Δ2.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0.$$

Έπεται ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται. Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $f$. Εφόσον η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έπεται ότι

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,1),$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής: Το όριο στο $-\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1,$$

ενώ το όριο στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το σύνολο $A_{f^{-1}}=(-1,1)$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της $f^{-1}$, θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in(-1,1)$ ισχύει η ισοδυναμία

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Leftrightarrow y\left(e^x+1\right)=e^x-1\Leftrightarrow e^x\left(y-1\right)=-y-1$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει

$$\boxed{f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

**Δ3. i.** Η $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{2e^x(e^x+1)^2-4e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{2e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}=\frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Ο παρονομαστής, καθώς και ο παράγοντας $(e^x+1)^3$, είναι θετικοί για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, το πρόσημο της $f''$ είναι ίδιο με το πρόσημο του παράγοντα $1-e^x$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0.$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $1-e^x<0$ για $x>0$ και ότι ο όρος $1-e^x$ μηδενίζεται για $x=0$. Αυτά τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | | $\frown$ |

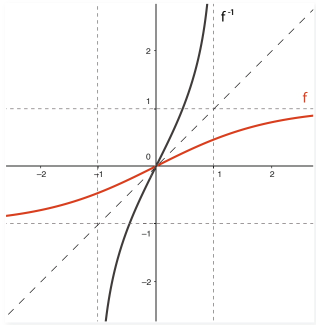
- Η $f$ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Η $C_f$ παρουσιάζει σημείο καμπής στο $O(0,0)$.

**ii.** Ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=\dfrac{2\cdot 1}{(e^0+1)^2}=1$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $O(0,0)$ είναι

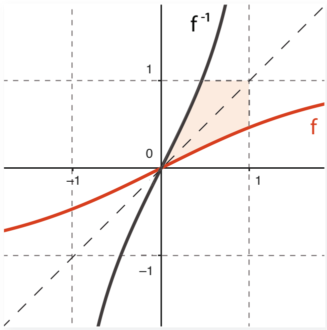
$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x.$$

Αφού η $f$ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, η εφαπτόμενή της στο $O(0,0)$ θα βρίσκεται «πάνω» από τη $C_f$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Επομένως, για κάθε $x>0$ θα ισχύει ότι $f(x)<x$.

**iii.** Στο Δ2 δείξαμε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, οπότε οι ευθείες $y=-1$ και $y=1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της $C_f$ στο $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα. Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο όπως και στο ερώτημα Δ3 μπορούμε να δείξουμε ότι $f(x)>x$ για $x<0$. Αυτή η παρατήρηση χρησιμεύει για να σχεδιάσουμε τη $C_{f^{-1}}$, καθώς ξέρουμε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Με βάση λοιπόν αυτήν τη συμμετρία και σύμφωνα με όλες τις πληροφορίες που έχουμε βρει στα προηγούμενα ερωτήματα για τη μονοτονία, την κυρτότητα της $f$ και τις ασύμπτωτες της $C_f$, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των $f, f^{-1}$, οι οποίες παρατίθενται στο παραπάνω σχήμα. Στο σχήμα φαίνονται επίσης οι οριζόντιες ασύμπτωτες $y=1$ και $y=-1$ της $C_f$, καθώς και οι κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=-1$, οι οποίες οριοθετούν το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$.




**Δ4.** Το χωρίο που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του διπλανού σχήματος: Λόγω συμμετρίας, αυτό το χωρίο ισούται με δύο ίσα μικρότερα χωρία, αυτό που ορίζεται από τη $C_f$, την ευθεία $y=x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=1$, και εκείνο που ορίζεται από τη $C_{f^{-1}}$, την ευθεία $y=x$ και την οριζόντια ευθεία $y=1$. Επομένως, για να υπολογίσουμε το συνολικό εμβαδόν, αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του πρώτου χωρίου και να πολλαπλασιάσουμε με το $2$. Αυτό το εμβαδόν ισούται με




$$E_1=\int_0^1 |f(x)-x|dx.$$

Έχουμε όμως δείξει στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(x)<x$ για κάθε $x<0$ (για $x=0$ ισχύει η ισότητα), οπότε συμπεραίνουμε από την παραπάνω έκφραση ότι

$$E_1=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx. \quad (5)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το ολοκλήρωμα του καθενός από τους δύο όρους. Το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$E_2 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Για τον δεύτερο όρο, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = e^x$. Ισχύει τότε $du = e^x dx$, οπότε

$$dx = \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{u} du.$$

Τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι $u_0 = e^0 = 1$ και $u_1 = e^1 = e$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$E_3 = \int_0^1 \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) dx = \int_1^e \left(\frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{1}{u}\right) du = \int_1^e \frac{u-1}{u(u+1)} du$$

$$= \int_1^e \left(\frac{u}{u(u+1)} - \frac{1}{u(u+1)}\right) du = \int_1^e \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u(u+1)}\right) du. \qquad (7)$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι η παράγωγος του λογάριθμου $\left(\ln|u+1|\right)'$. Για τον δεύτερο παράγοντα, χρησιμοποιούμε ανάλυση σε απλά κλάσματα (κάτι που έχουμε ήδη κάνει και σε άλλα θέματα –δείτε, π.χ., το Ερώτημα Γ3 του Διαγωνίσματος 4.18). Για να το κάνουμε αυτό, γράφουμε

$$\frac{2}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \qquad (8)$$

και στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και υπολογίζουμε τα $A, B$ Συγκεκριμένα, για κάθε $u \notin \{0,1\}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \Leftrightarrow 1 = A(u+1) + Bu \Leftrightarrow 1 = (A+B)u + A.$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε τιμή του $u \notin \{0,1\}$, θα πρέπει να ισχύουν οι επιμέρους ισότητες

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}.$$

Τελευταίο σύστημα έχει προφανώς μοναδική λύση την $A = 1$ και $B = -1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (8) ότι

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}.$$

Προκύπτει τώρα από την (7) ότι

$$E_3=\int_1^e\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u(u+1)}\right)du=\int_1^e\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)du=\int_1^e\left(\frac{2}{u+1}-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\left[2\ln|u+1|-\ln|u|\right]_1^e=\left(2\ln(e+1)-\ln e\right)-\left(2\ln 2-\ln 1\right)$$

$$=2\ln(e+1)-2\ln 2-1$$

Τέλος, από τις σχέσεις (5) και (6), προκύπτει ότι

$$E_1=\frac{1}{2}-\left(\ln(e+1)-\ln 2-1\right)=\frac{3}{2}-2\ln(e+1)+2\ln 2.$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση στην αρχή της λύσης, το ζητούμενο εμβαδόν είναι διπλάσιο από το $E_1$, δηλαδή ίσο με $E=3-4\ln(e+1)+4\ln 2$.