Διαγώνισμα 4.28

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 77.

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

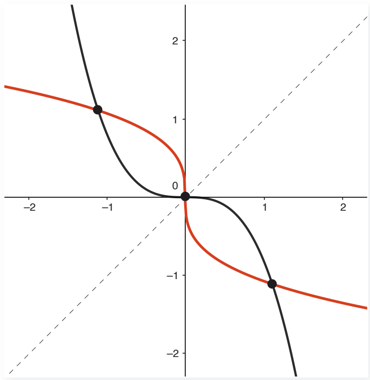
Α4. i) Σ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)**Σ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Δείτε τη συζήτηση στο τέλος της σελ. 74 του σχολικού βιβλίου.

ii. Η παράγωγος είναι ίση με $\frac{1}{x}$. Δείτε τη σελ. 117 του σχολικού βιβλίου για περισσότερες λεπτομέρειες. Είναι καλό να γνωρίζουμε και την απόδειξη αυτής της ισότητας.

iii. Αυτή η πρόταση στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Παρότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, αυτό δεν συνεπάγεται ότι όλα τα κοινά τους σημεία βρίσκονται πάνω σε αυτήν την ευθεία. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x)=-x^3$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε σχεδιάσει επίσης την ευθεία $y=x$ και τη συμμετρική της C_f ως προς αυτήν την ευθεία, δηλαδή τη $C_{f^{-1}}$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν τρία κοινά σημεία, όμως μόνο ένα από αυτά βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$. Έτσι, καταρρίπτεται ο ισχυρισμός ότι όλα τα κοινά σημεία βρίσκονται πάνω σε αυτήν την ευθεία. Είναι όμως χρήσιμο να τονίσουμε ότι, αν κάναμε την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε ο ισχυρισμός θα ήταν αληθής! Εδώ, η συνάρτηση $f(x)=-x^3$ δεν είναι γνησίως αύξουσα, οπότε δεν εμπίπτει σε αυτήν την κατηγορία και γι' αυτό άλλωστε αποτελεί αντιπαράδειγμα.



iv. Ισχύει $x^{2\nu}>0$ για x κοντά στο 0 και επιπλέον ισχύει $\lim_{x\to 0} x^{2\nu}=0$.

v. Όπως έχουμε δει αρκετές φορές σε προηγούμενα διαγωνίσματα, αυτός ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος –μόνο η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι σωστή. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε το ερώτημα Α4i στο διαγώνισμα 4.6.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Το πεδίο ορισμού της $f = g \circ \varphi$ είναι το σύνολο $A_f = \{x \in A_\varphi \mid \varphi(x) \in A_g\}$. Λύνουμε αυτό το σύστημα των περιορισμών:

$$\begin{cases} x \in A_\varphi \\ \varphi(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 < \sqrt{x-1} < 1 \end{cases}$$

Το σκέλος $\sqrt{x-1} > -1$ ισχύει για κάθε $x \geq 1$. Η ανίσωση $\sqrt{x-1} < 1$ είναι, για κάθε $x \geq 1$, ισοδύναμη της

$$\sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow x-1 < 1 \Leftrightarrow x < 2.$$

Επομένως, το παραπάνω σύστημα περιορισμών είναι ισοδύναμο με τις ανισότητες $1 \leq x$ και $x < 2$, απ' όπου έπεται τελικά ότι $A_f = [1,2)$. Για κάθε $x \in [1,2)$ ισχύει

$$f(x) = (g \circ \varphi) = g(\varphi(x)) = \ln(1 - \varphi^2(x)) = \ln\left(1 - \sqrt{x-1}^2\right) \boxed{= \ln(2-x).}$$

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2)$ και για κάθε $x \in [1,2)$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{2-x}(2-x)' = -\frac{1}{2-x}.$$

Καθώς $x < 2$, θα ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε και «1-1» σε αυτό. Από αυτό προκύπτει ότι η f αντιστρέφεται. Για τον τύπο της αντίστροφης, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

όπως έχουμε κάνει πολλές φορές σε προηγούμενα αντίστοιχα θέματα. Αντικαθιστώντας τον τύπο της f, αυτή η ισοδυναμία γράφεται στη μορφή

$$y = \ln(2-x) \Leftrightarrow 2 - x = e^y \Leftrightarrow x = 2 - e^y.$$

Πρέπει όμως να ισχύει $x \in A_f = [1,2)$, άρα, για να είναι αποδεκτή η παραπάνω ισότητα, θα πρέπει

$$1 \leq 2 - e^y < 2 \Leftrightarrow -2 < e^y - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 0 < e^y \leq 1.$$

Το αριστερό μέλος αυτής της διπλής ανίσωσης δεν αποτελεί στην πραγματικότητα περιορισμό, αφού ισχύει για κάθε τιμή του $y \in \mathbb{R}$. Το δεξιό μέλος γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^y \leq e^0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} y \leq 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το $A_{f^{-1}}=(-\infty,0]$ και για κάθε $x\in(-\infty,0]$ ισχύει ότι $f^{-1}(x)=2-e^x$.

B3. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0]$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\le 0$ ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(2-e^x\right)'=-e^x<0,$$

οπότε η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία (σελ. 53 του σχολικού βιβλίου) ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$. Επομένως, για κάθε $x<0$ ισχύει

$$|\eta\mu x|<|x|\overset{x<0}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|<-x\Rightarrow-(-x)<\eta\mu x<-x$$

$$\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x \quad (1)$$

Γνωρίζουμε επίσης από τη βασική θεωρία τριγωνομετρικών συναρτήσεων ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ ισχύει $\eta\mu x<0$. Εφόσον $f\searrow(-\infty,0]$, έπεται από τη σχέση (1), και συγκεκριμένα από το αριστερό της μέλος, ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ ισχύει $f^{-1}(x)>f^{-1}(\eta\mu x)$.

B4. i. Το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)-1}{\eta\mu 3x}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{\eta\mu 3x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{3\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{1}{3},$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

ii. Το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3^x-f^{-1}(x)}{5^x+4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-3^x}{5^x+4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(\left(\frac{e}{3}\right)^x-1\right)}{5^x\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1}=0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0.$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|ημx| \leq |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$-|x| \leq ημx \leq |x|. \quad (1)$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $|x| = x$, οπότε η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-x < ημx < x.$$

Προκύπτει έτσι ότι $x - ημx > 0$, δηλαδή $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Αντίστοιχα, για κάθε $x < 0$ ισχύει $|x| = -x$, οπότε η (2) γράφεται στη μορφή

$$x < ημx < -x.$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι $x - ημx < 0$, δηλαδή $\boxed{g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0).}$ Ισχύει επίσης $g(0) = 0$.

Γ2. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = 2x - 2ημx = 2(x - ημx) = 2g(x).$$

Από το Γ1 προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. Επίσης, $f'(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$, με τιμή $f(0) = 0^2 - συν0 = -1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x) = (2x - 2ημx)' = 2 - 2συνx = 2(1 - συνx).$$

Εφόσον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$, έπεται ότι $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, η εξίσωση $f''(x)=0$ λύνεται ως εξής:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Έπεται από αυτό ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Σημείωση:

Η απόδειξη της κυρτότητας της f ενδεχομένως να χρειάζεται λίγη παραπάνω δικαιολόγηση. Συγκεκριμένα, το θεώρημα στη σελ. 156 του σχολικού βιβλίου (το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος της σελ. 135 και το οποίο θα θέλαμε ιδανικά να χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε την κυρτότητα) δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα, καθώς απαιτεί από την f'' να είναι γνησίως θετική στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ. Παρότι εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα αυτό το θεώρημα (αφού η f'' μηδενίζεται σε άπειρα σημεία), μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα επιχείρημα που εξηγεί γιατί το συμπέρασμα (δηλαδή η κυρτότητα) συνεχίζει να ισχύει. Το επιχείρημα είναι το εξής:

Θεωρούμε αρχικά το διάστημα $\Delta_1 = [0, 2\pi]$. Στο εσωτερικό αυτού του διαστήματος, δηλαδή στο $(0, 2\pi)$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu x < 1$, άρα $f''(x) > 0$. Επομένως, από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ., έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το Δ_1. Όμοιο επιχείρημα αποδεικνύει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2\pi,4\pi],[4\pi,6\pi],[6\pi,8\pi],\ldots$, αλλά και στα διαστήματα $[-2\pi,0],[-4\pi,-2\pi],\ldots$ Εφόσον αυτά τα κλειστά διαστήματα έχουν κοινά άκρα, έπεται τελικά ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στην ένωσή τους, δηλαδή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ3. Εξηγήσαμε στο Ερώτημα Γ2 ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα, αφού $0 < \pi$, έπεται ότι $f(0) < f(\pi)$. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε τη σχέση

$$f(0) < \frac{2f(0)+3f(\pi)}{5} < f(\pi). \qquad (2)$$

Πράγματι, η αριστερή ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(0) < \frac{2f(0)+3f(\pi)}{5} \Leftrightarrow 5f(0) < 2f(0)+3f(\pi)$$

$$\Leftrightarrow 3f(0) < 3f(\pi) \Leftrightarrow f(0) < f(\pi),$$

το οποίο, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, είναι αληθές. Ομοίως, η δεξιά ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}<f(\pi)\Leftrightarrow 2f(0)+3f(\pi)<5f(\pi)$$
$$\Leftrightarrow 2f(0)<2f(\pi)\ \Leftrightarrow f(0)<f(\pi),$$

το οποίο, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, είναι αληθές. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της σχέσης (1).

Συνοψίζοντας, ισχύει ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f(0)\neq f(\pi)$.
- Από τη σχέση (1), την οποία αποδείξαμε παραπάνω, προκύπτει ότι η ποσότητα $\eta=\frac{2f(0)+3f(\pi)}{2}$ βρίσκεται ανάμεσα στα $f(0)$ και $f(\pi)$.

Συνεπώς, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.), προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)=\eta=\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}.$$

Για το δεύτερο ζητούμενο, παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,\pi]$, οπότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε αυτά τα διαστήματα. Έτσι, από το Θ.Μ.Τ., προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1\in(0,\xi)$ και $\xi_2\in(\xi,\pi)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}-f(0)}{\xi}=\frac{\frac{2f(0)+3f(\pi)-5f(0)}{5}}{\xi}$$

$$=\frac{3f(\pi)-3f(0)}{5\xi}=\frac{3}{5\xi}\big(f(\pi)-f(0)\big)$$

και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\pi)-f(\xi)}{\pi-\xi}=\frac{f(\pi)-\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}}{\pi-\xi}=\frac{\frac{5f(\pi)-2f(0)-3f(\pi)}{5}}{\pi-\xi}$$

$$=\frac{2f(\pi)-2f(0)}{5(\pi-\xi)}=\frac{2}{5(\pi-\xi)}\big(f(\pi)-f(0)\big).$$

Καθώς $0<\xi_1<\xi<\xi_2<\pi$ και αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα), έπεται ότι

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{3}{5\xi}\big(f(\pi)-f(0)\big)<\frac{2}{5(\pi-\xi)}\big(f(\pi)-f(0)\big).$$

Αφού όμως $f(\pi)>f(0)$, δηλαδή $f(\pi)-f(0)>0$, μπορούμε να διαιρέσουμε με $f(\pi)-f(0)$ χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας. Μετά από αυτήν τη διαίρεση, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{3}{5\xi}<\frac{2}{5(\pi-\xi)}\overset{\xi>0,\pi-\xi>0}{\Leftrightarrow}15\pi-15\xi<10\xi\Leftrightarrow25\xi>15\pi\boxed{\Leftrightarrow\xi>\frac{15\pi}{25}=\frac{3\pi}{5},}$$

όπως θέλαμε.

Γ5. Για την εξίσωση $f(x)=h(x)$ δουλεύουμε ως εξής:

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2-2\sigma\upsilon\nu x=x^2-2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=1$$
$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\sigma\upsilon\nu x}{x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}}.\qquad(3)$$

Για κάθε $x\neq0$ ισχύει

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Rightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$$

Αφού όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Επομένως, η σχέση (3) συνεπάγεται ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{1-0}{1-0}=1.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$h'(x) = (e^x)' f(x) + e^x f'(x) + 2e^x = e^x f(x) + e^x f'(x) + 2e^x.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $f'(x) + f(x) = -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ισοδύναμα γράφεται στη μορφή $f'(x) = -2 - f(x)$. Επομένως, αντικαθιστώντας το $f'(x)$ με $-2 - f(x)$ στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$h'(x) = e^x f(x) + e^x(-2 - f(x)) + 2e^x = e^x f(x) - 2e^x - e^x f(x) + 2e^x = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έπεται ότι η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $h(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Ισχύει όμως εξ ορισμού ότι $h(x) = e^x f(x) + 2e^x$, οπότε η σχέση $h(x) = c$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x f(x) + 2e^x = c \Leftrightarrow e^x f(x) = c - 2e^x \boxed{\Leftrightarrow f(x) = ce^{-x} - 2.}$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $f(0) = 2$, οπότε, αντικαθιστώντας $x = 0$ στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε ότι $2 = c \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow c = 4$. Έπεται λοιπόν ότι $f(x) = 4e^{-x} - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = (4e^{-x} - 2)' = -4e^{-x}$, οπότε η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με $f''(x) = 4e^{-x} > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τώρα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Πράγματι, η αριστερή ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta,$$

που ισχύει. Η δεξιά ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta,$$

που ισχύει. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\alpha < \dfrac{\alpha + \beta}{2} < \beta$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, έτσι ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}}=\frac{2\left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}$$

και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\left(f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha}.$$

Επιπλέον, ισχύει από τον ορισμό των ξ_1,ξ_2 ότι $\alpha<\xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta$. Από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει λοιπόν ότι

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{2\left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}<\frac{2\left(f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha}. \qquad (1)$$

Εφόσον $\alpha<\beta$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με τον θετικό παράγοντα $\beta-\alpha$ χωρίς να αλλάξει η φορά της ανίσωσης. Επομένως, η (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2},\ \text{που είναι το ζητούμενο.}}$$

Σημείωση:

Η ανισότητα που αποδείξαμε είναι «διάσημη» μαθηματική ανισότητα, η οποία είναι ευρέως γνωστή ως ανισότητα Jensen. Φυσικά, δεν αποτελεί μέρος της θεωρίας της Γ΄ Λυκείου, οπότε, αν μας ζητηθεί να την αποδείξουμε, τότε πρέπει να γράψουμε ένα λεπτομερές επιχείρημα, όπως το παραπάνω. Αυτή η ανισότητα τέθηκε και στις εξετάσεις, το 2012, στο Ερώτημα Δ3, σε λίγο διαφορετική μορφή.

Δ3. Το πεδίο ορισμού της $\varphi = f \circ g$ είναι το σύνολο $A_\varphi = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\}$. Καθώς οι f,g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η παραπάνω συνθήκη γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $A_\varphi = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\varphi(x) = f(g(x)) = 4e^{-g(x)} - 2 = 4e^{(x-1)^2 - \ln 2} - 2 = 4e^{(x-1)^2} \cdot e^{-\ln 2} - 2$$
$$= 4e^{(x-1)^2} \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 2 = 4e^{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2} - 2 = 2e^{(x-1)^2} - 2 = 2\left[e^{(x-1)^2} - 1\right].$$

Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $(x-1)^2 > 0$. Αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι $e^{(x-1)^2} > e^0 = 1$ για κάθε $x \neq 1$. Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι, για κάθε $x \neq 1$, ισχύει $e^{(x-1)^2} - 1 > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$, όπως θέλαμε.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x) = \varphi(x) - 4ex + 6e + 2 - 6e(x-2)^2$ για $x \in [1,2]$. Η κ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει

$$\kappa'(x) = \varphi'(x) - 4e - 12(x-2) = 2\left(e^{(x-1)^2} - 1\right)' + 24 - 12x$$
$$= 2e^{(x-1)^2} \cdot \left[(x-1)^2\right]' + 24 - 12x = 4\left((x-1)e^{(x-1)^2} + 6 - 3x\right). \quad (2)$$

Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύουν τα εξής:

- $x - 1 \geq 0$, οπότε $(x-1)e^{(x-1)^2} \geq 0$. Μάλιστα, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.
- $x \leq 2$, οπότε $6 - 3x = 3(2-x) \geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Από αυτές τις δύο ανισότητες και από τη σχέση (2) έπεται με πρόσθεση κατά μέλη ότι $\kappa'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Λόγω συνέχειας έπεται ότι η κ είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[1,2]$. Παρατηρούμε όμως ότι

$$\kappa(2) = \varphi(2) - 4e \cdot 2 + 6e + 2 - 6e \cdot (2-2)^2$$
$$= 2\left[e^{(2-1)^2} - 1\right] - 8e + 6e + 2 = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι, λόγω της μονοτονίας, θα ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$ ότι

$$\kappa(x) \le \kappa(2) \Leftrightarrow \varphi(x) - 4ex + 6e + 2 - 6e(x-2)^2 \le 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \varphi(x) \le 4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2.}$$

Μάλιστα, σημειώνουμε ότι, λόγω της μονοτονίας, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Δ5. Αφού $\varphi(x) \le 4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2$ για κάθε $x \in [1,2]$ και αφού η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, έπεται ότι για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει

$$\int_1^2 \varphi(x)dx < \int_1^2 \left(4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2\right)dx. \quad (3)$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι ίσο με

$$\int_1^2 \left(4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2\right)dx = \int_1^2 \left(2ex^2 - 6ex - 2x + 2e(x-2)^3\right)' dx$$

$$= \left[2ex^2 - 6ex - 2x + 2e(x-2)^3\right]_1^2$$

$$= 8e - 12e - 4 - (2e - 6e - 2 - 2e)$$

$$= -4e - 4 + 4e + 2 + 2e = 2e - 2 = 2(e-1).$$

Αυτή η ισότητα, σε συνδυασμό με τη σχέση (3), συνεπάγεται ότι

$$\int_1^2 \varphi(x)dx < 2(e-1). \quad (4)$$

Επιπλέον, από το Ερώτημα Δ3, γνωρίζουμε ότι $\varphi(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$. Επομένως, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ισχύει ότι

$$\int_1^2 \varphi(x)dx > \int_1^2 0dx = 0. \quad (5)$$

Από τις (4), (5) έπεται ότι $\boxed{0 < \int_1^2 \varphi(x)dx < 2(e-1).}$