Διαγώνισμα 4.32

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 112.

A2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

A3. i. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

ii. Για να καταρρίψουμε τον ισχυρισμό, θα κατασκευάσουμε ένα αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x$ για $x\in[-1,1]$. Η f είναι συνεχής και, επιπλέον,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Παρ' όλα αυτά όμως, η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$.

A4. i) Λ, **ii)**Σ, **iii)** Λ, **iv)**Λ, **v)**Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$f'(x)=\left[\frac{1}{3}\left(x^4+\alpha x^3-\beta x^2+8x-3\right)\right]'=\frac{4}{3}x^3-\alpha x^2-\frac{2\beta}{3}x+\frac{8}{3}.$$

Εφόσον η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=-2$ και εφόσον αυτό το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, έπεται από το Θεώρημα του Fermat ότι

$$f'(-2)=0\Rightarrow\frac{4}{3}(-8)-4\alpha+\frac{4\beta}{3}+\frac{8}{3}=0\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}-32-12\alpha+4\beta+8=0$$

$$\Rightarrow -12\alpha+4\beta=24\overset{:4}{\Rightarrow}-3\alpha+\beta=6\Rightarrow\beta=6+3\alpha.\qquad(1)$$

Επιπλέον, προκύπτει από την υπόθεση του προβλήματος ότι

$$f'(2)=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{32}{3}-4\alpha-\frac{4\beta}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}32-12\alpha-4\beta+8=16$$

$$\overset{:4}{\Leftrightarrow}3\alpha+\beta=6\Rightarrow\beta=6-3\alpha.\quad(2)$$

Έπεται λοιπόν από τις σχέσεις (1) και (2) ότι $6+3\alpha=6-3\alpha \Rightarrow \alpha=0$. Από τη σχέση (1), προκύπτει τώρα ότι $\beta=6$, όπως θέλαμε. Ισχύει λοιπόν τελικά

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^4-6x^2+8x-3\right)=\frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

B2. Ισχύει $f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\left(x^3-3x+2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, πρέπει να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της f'. Για να το κάνουμε αυτό, ο ευκολότερος τρόπος είναι να την παραγοντοποιήσουμε. Θα αφήσουμε στην άκρη προς το παρόν τον πολλαπλασιαστή $\frac{4}{3}$ και θα εστιάσουμε στο πολυώνυμο x^3-3x+2, που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση. Εξάλλου, το πρόσημο της f' είναι ίδιο με το πρόσημο αυτού του πολυωνύμου. Από την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, γνωρίζουμε ότι οι πιθανές ακέραιες ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 2, δηλαδή οι αριθμοί ±1 και ±2. Αντικαθιστώντας το x με αυτές τις τιμές, βρίσκουμε πως πράγματι η $x=1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου. Εκτελούμε λοιπόν σχήμα Horner για τη διαίρεση του x^3-3x+2 με το $x-1$:

1	0	-3	2	1
1	1	-2	0	

Έτσι, προκύπτει ότι $x^3-3x+2=(x-1)\left(x^2+x-2\right)$. Θα εντοπίσουμε τώρα τις ρίζες του δεύτερου παράγοντα. Η διακρίνουσά του ισούται με

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9,$$

οπότε οι ρίζες του είναι οι

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1+3}{2}=1 \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Επομένως, το τριώνυμο x^2+x-2 παραγοντοποιείται ως $(x-1)(x+2)$ –θυμηθείτε την παραγοντοποίηση τριωνύμου από την Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. Έπεται λοιπόν ότι

$$x^3-3x+2=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2).$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου x^3-3x+2, άρα και της f' φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
x^3-3x+2	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,1]$ και $[1,+\infty)$. Επειδή είναι συνεχής στη θέση $x=1$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[-2,+\infty)$ –αυτός είναι και ο λόγος που μπορούμε να ενώσουμε τις δύο στήλες στην τελευταία σειρά.

- Σύμφωνα με τον πίνακα, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=-2$, με τιμή $f(-2)=-9$. Πράγματι, αν $x\in(-\infty,-2]$, τότε $f(x)\geq f(-2)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$. Από την άλλη, αν $x\in[-2,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(-2)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,+\infty)$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει ότι $f(x)\geq f(-2)$, οπότε το $x=-2$ είναι πράγματι θέση ακροτάτου της f.

Β3. Ορίζουμε $\Delta_1=(-\infty,-2]$ και $\Delta_2=[-2,+\infty)$, τα διαστήματα μονοτονίας της f.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα

$$f(\Delta_1)=\left[f(-2),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right).$$

Ισχύει $f(-2)=-9$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{3}=+\infty$, επομένως $f(\Delta_1)=[-9,+\infty)$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2, άρα

$$f(\Delta_2)=\left[f(-2),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Ισχύει $f(-2)=-9$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{3}=+\infty$, επομένως $f(\Delta_2)=[-9,+\infty)$.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τη δοσμένη εξίσωση μέσω της f. Αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$x^4-6x^2+8x-15=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x^4-6x^2+8x-15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-1=4 \Leftrightarrow f(x)=4.$$

Εφόσον $4\in f(\Delta_1), f(\Delta_2)$, έπεται ότι υπάρχουν $x_1\in\Delta_1$ και $x_2\in\Delta_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=4$. Το x_1 είναι το μοναδικό στο Δ_1 με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1. Το x_2 είναι επίσης το μοναδικό στο Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η δοσμένη εξίσωση έχει πράγματι δύο ακριβώς ρίζες. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η μία είναι θετική και η άλλη αρνητική. Η ρίζα x_1 είναι σίγουρα αρνητική, καθώς ανήκει στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-2]$. Για το x_2 δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα, καθώς ανήκει στο διάστημα $\Delta_2=[-2,+\infty)$, το οποίο περιέχει και θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε ότι $x_2>0$ ως εξής: Παρατηρούμε ότι $f(1)=0<4=f(x_2)$. Επίσης, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$. Επομένως, συμπεραίνουμε από την παραπάνω ανισότητα ότι $1<x_2$, το οποίο πράγματι αποδεικνύει ότι $x_2>0$ και ολοκληρώνει την απόδειξη.

B4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{4}{3}x^3-4x+\frac{8}{3}\right)'=4x^2-4x=4\left(x^2-1\right)=4(x-1)(x+1).$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι κοίλη στο $[-1,1]$.
- Τα σημεία καμπής της C_f είναι τα $A(-1,f(-1))\equiv\left(-1,-\frac{16}{3}\right)$ και $B(1,f(1))\equiv(1,0)$.

Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f, θα βρούμε επιπλέον τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-1=0 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} x^4-6x^2+8x-3=0.$$

Για να λύσουμε την τελευταία πολυωνυμική εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε σχήμα Horner και παραγοντοποίηση. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του τελευταίου πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -3, δηλαδή οι ±1 και ±3. Κάνοντας έλεγχο αυτών των τιμών, διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=1$ πράγματι μηδενίζει το πολυώνυμο. Επομένως, κοιτάζουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση με το $x-1$:

1	0	-6	8	-3	1
1	1	-5	3	0	

Από το σχήμα Horner, έπεται ότι

$$x^4-6x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+x-5x+3)=0. \quad (3)$$

Συνεχίζουμε με σχήμα Horner για το πολυώνυμο $x^3+x-5x+3$. Με έλεγχο των τιμών $x=\pm1$ και $x=\pm3$, διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=1$ είναι πράγματι ρίζα αυτού του πολυωνύμου.

1	1	-5	3	1
1	2	-3	0	

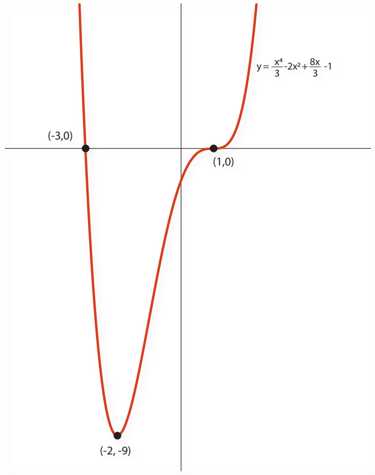
Από το νέο σχήμα Horner και από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^2(x^2+2x-3).$$

Τώρα που το πολυώνυμο είναι παραγοντοποιημένο, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες του μέσω των ριζών του κάθε παράγοντα. Ο πρώτος παράγοντας έχει προφανώς μοναδική ρίζα την $x=1$. Ο δεύτερος παράγοντας έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$, οπότε έχει ρίζες

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2+4}{2}=1 \quad \text{και} \quad x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2-4}{2}=-3.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το αρχικό πολυώνυμο, άρα και η συνάρτηση f έχουν ρίζες τους αριθμούς $x=1$ και $x=-3$. Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $(-3,0)$ και $(1,0)$.



Τέλος, το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,f(0))\equiv(0,-1)$. Με βάση όλες τις παραπάνω πληροφορίες, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τη χάραξη έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει όσες πληροφορίες έχουμε συλλέξει στα προηγούμενα ερωτήματα για τα διαστήματα μονοτονίας και κυρτότητας της f, τα ακρότατά της και τα σημεία καμπής της C_f.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$, θα πρέπει να επιλέξουμε δύο οποιαδήποτε $y_1,y_2\in f(\mathbb{R})$ με $y_1<y_2$ και να αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι $f\left(f^{-1}(y_1)\right)=y_1$ και $f\left(f^{-1}(y_2)\right)=y_2$. Άρα θα ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$y_1<y_2\Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right)<f\left(f^{-1}(y_2)\right)\overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2).$$

Από αυτήν τη συνεπαγωγή, έπεται ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$.

Γ2. Έστω $I=\int_0^{2024}f(u)du$. Παρατηρήστε ότι ο I είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε, στο ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{2024}\left(\frac{f(x)}{\int_{\alpha}^{2024} f(u)du}\right)dx,$$

δεν εξαρτάται από το x. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα –δηλαδή το παραπάνω– ισούται λοιπόν με

$$\int_{\alpha}^{2024}\left(\frac{f(x)}{\int_{\alpha}^{2024} f(u)du}\right)dx = \int_{\alpha}^{2024}\frac{f(x)}{I}dx = \frac{1}{I}\int_{\alpha}^{2024} f(x)dx$$

$$\boxed{=\frac{1}{I}\cdot I = 1.}$$

Παρότι έχουμε ορίσει το I χρησιμοποιώντας το u ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, γράφοντάς το με άλλη μεταβλητή δεν κάνει καμία διαφορά. Αυτό είναι κάτι που έχουμε ήδη συζητήσει σε λύσεις προηγούμενων προβλημάτων.

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_1): y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=f'(-1)x+f'(-1)+f(-1).$$

Δίνεται όμως στην υπόθεση ότι η (ε_1) έχει εξίσωση $y=2x+6$. Έπεται λοιπόν από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(-1)=2 \quad \text{και} \quad f'(-1)+f(-1)=6,$$

απ' όπου μπορούμε πολύ άμεσα να υπολογίσουμε ότι $\boxed{f'(-1)=2 \text{ και } f(1)=4\,.}$

Ομοίως, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(2,f(2))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_2): y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=f'(2)x-2f'(2)+f(2).$$

Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση, η (ε_2) έχει εξίσωση $y=3x-2$. Έπεται λοιπόν από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(2)=3 \quad \text{και} \quad -2f'(2)+f(2)=4,$$

απ' όπου έπεται άμεσα ότι $\boxed{f'(2)=3 \text{ και } f(2)=4.}$

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $K(\xi,f(\xi))$ είναι

$$(\varepsilon_\xi): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi).$$

Αυτή η ευθεία διέρχεται από το $(3,4)$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες $x=3$ και $y=4$ επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή αν και μόνο αν

$$4=f(\xi)+(3-\xi)f'(\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-4}{\xi-3}. \qquad (1)$$

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-4}{x-3}$ για $x\in[-1,2]$. Ισχύουν τα εξής:

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $g(-1)=\dfrac{f(-1)-4}{-4}=\dfrac{4-4}{-4}=0$
- $g(2)=\dfrac{f(2)-4}{2-3}=0.$

Άρα έπεται από το θεώρημα του Rolle ότι υπάρχει $\xi\in(-1,2)$ για το οποίο $g'(\xi)=0$. Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $x\in(-1,2)$ ισχύει

$$g'(x)=\frac{(f(x)-4)'(x-3)-(f(x)-4)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)f'(x)-(f(x)-4)}{(x-3)^2}.$$

Επομένως, η εξίσωση $g'(\xi)$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)(\xi-3)-(f(\xi)-4)}{(\xi-3)^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-3)=f(\xi)-4$$
$$\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-4}{\xi-3},$$

η οποία είναι ακριβώς η εξίσωση (1) που θέλαμε να αποδείξουμε. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $K(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $(3,4)$.

Γ5. Παρατηρούμε αρχικά ότι η ζητούμενη ισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{f'(\xi_1)-f'(-1)}{f'(2)-f'(\xi_1)}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4(f'(\xi_1)-f'(-1))=5(f'(2)-f'(\xi_1))$$
$$\Leftrightarrow 9f'(\xi_1)=5f'(2)+4f'(-1)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{5}{9}f'(2)+\frac{4}{9}f'(-1). \quad (2)$$

Η έκφραση στο δεξιό μέλος μάς παραπέμπει στο θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ.). Θέτουμε

$$\eta=\frac{5}{9}f'(2)+\frac{4}{9}f'(-1).$$

Η f' είναι συνεχής στο $[-1,2]$, καθώς μας έχει δοθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι ο αριθμός η βρίσκεται μεταξύ των $f'(-1)$ και $f'(2)$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ3, ισχύει $f'(-1)=2<f'(2)=3$. Με βάση την τελευταία ανισότητα, είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$f'(-1)<\eta<f'(2).$$

Για να το δείτε αυτό, μπορείτε να αντικαταστήσετε το η με $\frac{5}{9}f'(2)+\frac{4}{9}f'(-1)$ και να δουλέψετε με ισοδυναμίες, ξεχωριστά για καθένα από τα μέλη της παραπάνω διπλής ανισότητας. Οι υπολογισμοί είναι άμεσοι και γι' αυτό τους παραλείπουμε.

Με βάση την παραπάνω διπλή ανισότητα και λόγω της συνέχειας της f', έπεται από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών ότι υπάρχει $\xi_1\in(-1,2)$, έτσι ώστε

$$f'(\xi_1)=\eta=\frac{4f'(-1)+5f'(2)}{9},$$

το οποίο, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, στη σχέση (2), αποδεικνύει το ζητούμενο. Ο παράγοντας $\sqrt{x}$ που εμφανίζεται στον παρονομαστή είναι ο λόγος που υπολογίζουμε την παράγωγο στο $(0,\pi^2/4)$, εξαιρώντας το $x_0=0$. Αυτή η παρατήρηση σχετίζεται με τη σημείωση που κάναμε στο τέλος του προηγούμενου ερωτήματος.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Αφού η f είναι συνεχής, θα είναι ειδικότερα συνεχής στο σημείο $x_0=0$. Θα ισχύει λοιπόν

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x-\frac{x^2}{2}+2\right). \quad (1)$$

Ο μόνος όρος του ορίου που παρουσιάζει προβλήματα είναι ο πρώτος, καθώς έχει την απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$. Κατά τη συνήθη τακτική, την οποία έχουμε χρησιμοποιήσει και σε άλλα αντίστοιχα προβλήματα, μετατρέπουμε αυτόν τον όρο σε πηλίκο, με σκοπό να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Με άλλα λόγια, γράφουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{-\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Έπεται τώρα από τη σχέση (1) ότι

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x - \frac{x^2}{2} + 2\right) = 0 - \frac{0^2}{2} + 2 = 2$$

Εξετάζουμε τώρα την παραγωγισιμότητα στη θέση $x_0 = 0$. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό, δηλαδή εξετάζουμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Καθώς η f ορίζεται μόνο από τα δεξιά του $x_0 = 0$, μπορούμε να περιοριστούμε στο δεξιό πλευρικό όριο. Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x\ln x - \frac{x^2}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \frac{x}{2}\right) = (-\infty) - 0 = -\infty.$$

Εφόσον το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι δεν ορίζεται η παράγωγος της f στο $x_0 = 0$.

Δ2. Η f είναι (δύο φορές) παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη (δύο φορές) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για να αποδείξουμε ότι δεν έχει ακρότατα στο $(0,+\infty)$, θα δείξουμε ότι η f' δεν έχει ρίζες σε αυτό το διάστημα. Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) = \left(x\ln x - \frac{x^2}{2} + 2\right)' = \ln x + 1 - x \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του παράγοντα $1-x$ και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Συμπεριλαμβάνουμε στον πίνακα τη μονοτονία της f'.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$. Έχει λοιπόν ολικό μέγιστο στη θέση $x=1$, με τιμή $f'(1)=\ln1+1-1=0$. Επομένως, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας, ισχύει $f'(x)<f'(1)=0$ για κάθε $x\neq1$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο 0 και στο 1 και εφόσον $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Επομένως, δεν έχει ακρότατα στο ανοιχτό διάστημα $(0,+\infty)$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Δ3. Από τον παραπάνω πίνακα, είναι φανερό ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το σημείο $A(1,f(1))\equiv\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Για να αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,+\infty)$, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano. Θα αποδείξουμε μάλιστα ότι αυτή η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(1,4)$.

Σε αυτό το ερώτημα υπάρχει αρκετή ελευθερία. Θα μπορούσε κανείς, αντί για το 4, να επιλέξει ένα άλλο άνω άκρο για το διάστημα εφαρμογής του θεωρήματος Bolzano. Σε αυτήν την περίπτωση, η προσέγγιση του πιθανότατα δεν θα ήταν απαραίτητη.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$.
- $f(1)=\dfrac{3}{2}>0$.
- $f(4)=4\ln4-\dfrac{16}{2}+2=8\ln2-6=8\left(\ln2-\dfrac{6}{8}\right)<0$,

  όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\ln2\approx0.69<0.75=\dfrac{6}{8}$.

Έπεται λοιπόν από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $\xi\in(1,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$. Αυτό το ξ. είναι η μοναδική ρίζα της f., καθώς, όπως αποδείξαμε στη λύση του προηγούμενου ερωτήματος, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ4. i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ είναι

$$(\varepsilon): y-\frac{3}{2}=f'(1)(x-1)\overset{f'(1)=0}{\Leftrightarrow} y=\frac{3}{2}.$$

ii. Όπως δείξαμε στο Ερώτημα Δ2, η f είναι κοίλη στο διάστημα $[1,+\infty)$. Άρα, σε αυτό το διάστημα, η C_f βρίσκεται «κάτω» από την εφαπτόμενή της στο $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Με άλλα λόγια, για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f(x) \leq \frac{3}{2}$, για κάθε $x \in [1,+\infty)$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από την ισότητα

$$E = \int_1^2 \left|\frac{3}{2} - f(x)\right| dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{2} - f(x)\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{2} - x\ln x + \frac{x^2}{2} - 2\right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{2} - x\ln x + \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[-\frac{x}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2 - \int_1^2 x\ln x\,dx$$

$$= \left[-1 + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{8}{6} - \frac{1}{6}\right] - \int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{2}{3} - \int_1^2 x\ln x\,dx$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που απομένει, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}(\ln x)'\,dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Σε συνδυασμό με την παραπάνω ισότητα, προκύπτει ότι $\boxed{E = \frac{17}{12} - 2\ln 2.}$