Διαγώνισμα 4.31

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 112 (δείτε την παράγραφο στο τέλος της σελίδας).

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 143 (δείτε το σχόλιο).

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

Α4. **i)** Σ, **ii)**Σ, **iii)** Σ, **iv)**Λ, **v)**Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Αρχικά, σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έστω $A(1,f(1))\equiv(1,g(1))$ το κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων. Από τον τύπο της f, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $f(1)=3$. Επομένως, το κοινό σημείο είναι το $A(1,3)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$g(1)\Rightarrow \alpha+\beta=-3\Rightarrow \beta=-3-\alpha. \quad (1)$$

Επιπλέον, αφού σε αυτό το σημείο έχουν και κοινή εφαπτομένη, θα ισχύει ότι

$$f'(1)=g'(1).$$

Η παράγωγος της f ισούται με

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)'=\left(1+\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2},$$

για κάθε $x\neq 0$, απ' όπου προκύπτει ότι $f'(1)=-2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από την ισότητα που γράψαμε παραπάνω ότι ισχύει

$$g'(1)=f'(1)=-2. \quad (2)$$

Ισχύει όμως

$$g'(x)=\left(\alpha x^2+\beta x+6\right)'=2\alpha x+\beta,$$

οπότε προκύπτει από τη (2) ότι $2\alpha+\beta=-2\Leftrightarrow\beta=-2\alpha-2$. Χρησιμοποιώντας την (1), παίρνουμε

$$-2\alpha-2=-3-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1.$$

Έπεται από την (1) ότι $\beta=-3-\alpha=-4$, όπως θέλαμε. Η κοινή εφαπτομένη των C_f,C_g έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-3=-2(x-1)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow y=-2x+5.}$$

Β2. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι, για κάθε $x \neq 0$, ισχύει $f'(x)=-\frac{2}{x^2}<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα υποδιαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$h(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Ισχύει επίσης για κάθε $x \neq 0$ ότι $f''(x)=\left(-\frac{2}{x^2}\right)'=\frac{4}{x^3}$, οπότε το πρόσημο της f'' είναι ίδιο με το πρόσημο του x^3. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	‖	$+$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$\frown$	‖	$\smile$

Συμπεραίνουμε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=\left(x^2-4x+6\right)'=2x-4=2(x-2),$$

οπότε το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο του παράγοντα $x-2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Λόγω και της συνέχειας στη θέση $x=2$, έπεται ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Όσον αφορά την κυρτότητα, παρατηρούμε ότι $g''(x)=(2x-4)'=2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β3. Ξεκινάμε με τη συνάρτηση f. Καθώς $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, η μοναδική θέση στην οποία έχει νόημα να αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=0$. Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

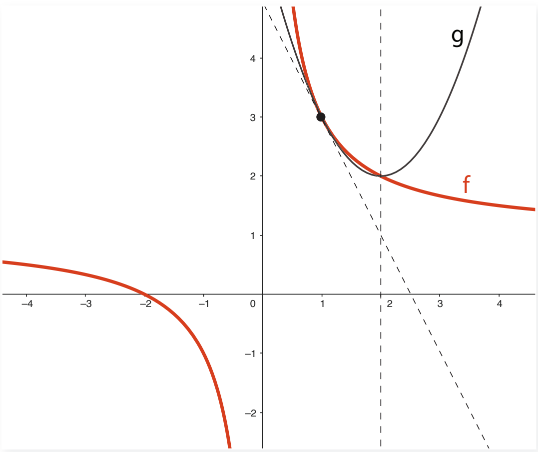
επομένως η ευθεία $x=0$ είναι πράγματι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αναζητούμε τώρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1,$$

συνεπώς η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αλλά και στο $-\infty$. Από την ύπαρξη οριζόντιας ασύμπτωτης, συμπεραίνουμε ότι η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Όσον αφορά την g, αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 2, οπότε η γραφική της παράσταση δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες (δείτε το σχόλιο στη σελ. 163 του σχολικού βιβλίου).

Β4. Από τις πληροφορίες που έχουμε συλλέξει στα προηγούμενα ερωτήματα σχετικά με τη μονοτονία, την κυρτότητα των f,g, αλλά και τις ασύμπτωτες των γραφικών τους παραστάσεων, μπορούμε να σχεδιάσουμε αυτές τις γραφικές παραστάσεις όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τη χάραξη έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει την πληροφορία ότι η C_g είναι παραβολή, ως γραφική παράσταση δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. Στο σχήμα έχουμε επίσης συμπεριλάβει την κοινή εφαπτομένη των δύο γραφικών παραστάσεων, η οποία συζητήθηκε στο Ερώτημα Β1, καθώς και την ευθεία $x=2$ που υποδεικνύει τη θέση ελαχίστου της g.



ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι (τρεις φορές) παραγωγίσιμη, ως πράξη (τρεις φορές) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει

$$f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu x-\frac{x}{x+2}\right)'=\eta\mu x-\frac{(x)'(x+2)-x(x+2)'}{(x+2)^2}=\eta\mu x-\frac{2}{(x+2)^2},$$

οπότε

$$f''(x)=\left(\eta\mu x-\frac{2}{(x+2)^2}\right)'=\sigma\upsilon\nu x+\frac{4}{(x+2)^3}.$$

Άρα η τρίτη παράγωγος της f είναι ίση με

$$f'''(x)=\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{4}{(x+2)^3}\right)'=-\eta\mu x-\frac{12}{(x+2)^4}.$$

Η τελευταία είναι αρνητική στο $[0,\pi]$, αφού για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $-\eta\mu x\le 0$ και $-\frac{12}{(x+2)^4}<0$. Η τελευταία ανισότητα μάλιστα ισχύει ευρύτερα, για κάθε $x\neq 2$, όμως εμάς μας απασχολεί μόνο το διάστημα $[0,\pi]$ για την ώρα. Αποδεικνύεται έτσι ότι η τρίτη παράγωγος της f είναι αρνητική, όπως θέλαμε.

Γ2. Αφού $f'''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, έπεται ότι η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano για να αποδείξουμε ότι η f'' έχει ρίζα στο $[0,\pi]$.

- $f''(0)=1+\frac{4}{8}>0$
- $f''(\pi)=-1+\frac{4}{(\pi+2)^3}$

  Θα αποδείξουμε ότι αυτή η ποσότητα είναι θετική. Αρκεί να δείξουμε ότι

  $$1>\frac{4}{(\pi+2)^3}\Leftrightarrow(\pi+2)^3>4.$$

  Αυτό όμως προφανώς ισχύει, καθώς $(\pi+2)^3>5^3>4$.

- Η f'' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$, έτσι ώστε $f''(\xi)=0$. Το ξ είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, διότι, όπως δείξαμε παραπάνω, η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για να δείξουμε ότι το σημείο $A(\xi,f(\xi))$ είναι πράγματι σημείο καμπής της C_f, μένει να δείξουμε ότι η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του ξ. Αυτό έπεται άμεσα από τη μονοτονία της f'', όπως δείχνουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

- $0 \le x < \xi \overset{f''\searrow[0,\pi]}{\Rightarrow} f''(x) > f''(\xi) = 0.$
- $\xi < x \le \pi \overset{f''\searrow[0,\pi]}{\Rightarrow} f''(x) < f''(\xi) = 0.$

Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας, απ' όπου είναι προφανές ότι το σημείο $A(\xi,f(\xi))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f. Προσθέτουμε σε αυτόν τον πίνακα και μια επιπλέον σειρά με τη μονοτονία της f', η οποία θα μας χρειαστεί στο επόμενο ερώτημα.

x	0		ξ		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	Σ.Κ.	$\searrow$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$	

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη των ακροτάτων, πρέπει να μελετήσουμε την f' ως προς τις ρίζες και το πρόσημο. Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου της f'' και από τη συνέχεια της f', προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,\pi]$. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f'' για να αποδείξουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \xi$. Ισχύει

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\left(\frac{\pi}{2}+3\right)^2} > 0 \overset{f''(\xi)=0}{\Leftrightarrow} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > f''(\xi) \overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2} < \xi,$$

όπως θέλαμε. Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα Bolzano για να αποδείξουμε την ύπαρξη ριζών της f'.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ –άρα και σε όλα του τα υποδιαστήματα.
- $f'(0) = -1/2 < 0$.

- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{8}{(\pi+4)^2}>0.$
- $f'(\pi)=-1-2/(\pi+2)^2<0.$

Η f' είναι συνεχής στα υποδιαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0.$ Θα δείξουμε ότι

$$\xi<x_2<\pi.$$

Χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό λοιπόν δεν ίσχυε, τότε θα έπρεπε αναγκαστικά να ισχύει

$$0<x_1<\frac{\pi}{2}<x_2<\xi<\pi.$$

Τότε όμως, αφού γνωρίζουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\xi]$, έπεται ότι

$$f'(x_1)<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<f'(x_2)\Leftrightarrow 0<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0,$$

άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$0<x_1<\frac{\pi}{2}<\xi<x_2<\pi, \qquad (1)$$

όπως θέλαμε. Μελετάμε ακολούθως το πρόσημο της f'. Θα μας χρειαστεί η μονοτονία της f', την οποία έχουμε προσδιορίσει στον πίνακα κυρτότητας προηγούμενου ερωτήματος. Χρήσιμη είναι επίσης και η σχέση (1).

- Αν $x\in[0,x_1)$, τότε $f'(x)<f'(x_1)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,x_1)\subset[0,\xi]$.
- Αν $x\in(x_1,\xi]$, τότε $f'(x)>f'(x_1)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_1,\xi]\subset[0,\xi]$.
- Αν $x\in[\xi,x_2)$, τότε $f'(x)>f'(x_2)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,x_2)\subset[\xi,\pi]$.
- Αν $x\in(x_2,\pi]$, τότε $f'(x)<f'(x_2)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_2,\pi]\subset[\xi,\pi]$.

Με βάση αυτές τις πληροφορίες, μπορούμε να σχεδιάσουμε τον πίνακα μονοτονίας της f:

x	0	x_1		ξ		x_2		π
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

- Όπως έχουμε σημειώσει και στον πίνακα, η f' είναι θετική στα διαστήματα (x_1,ξ) και (ξ,x_2). Επειδή η f είναι συνεχής στα σημεία x_1, ξ, x_2, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[x_1,x_2]$. Αυτός είναι και ο λόγος που, στη δεύτερη σειρά του πίνακα, έχουμε ενώσει αυτά τα δύο διαστήματα. Επιπλέον, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,x_1]$ και $[x_2,\pi]$.
- Από τα παραπάνω, έπεται ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στις θέσεις $x_0=0$ και x_2, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις x_1 και $x_3=\pi$. Με άλλα λόγια, η f έχει τελικά τέσσερις θέσεις τοπικών ακροτάτων, όπως θέλαμε.

Γ4. Ομαδοποιώντας και παραγοντοποιώντας τους όρους του παρονομαστή, μπορούμε να γράψουμε το δοσμένο όριο ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{x^2\left(f(x)-f(\xi)\right)-2x\xi\left(f(x)-f(\xi)\right)+\xi^2\left(f(x)-f(\xi)\right)}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{\left(f(x)-f(\xi)\right)\left(x^2-2x\xi+\xi^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)^2}=\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}.$$

Λόγω της συνέχειας της f, ο παρονομαστής τείνει στο 0. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε περισσότερες πληροφορίες για το πρόσημο του παρονομαστή, έτσι ώστε να αποφανθούμε αν το όριο είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$, ή αν δεν υπάρχει καν.

- Για $x\in(x_1,\xi)$ ισχύει $x-\xi<0$. Επίσης, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,\xi]$, ισχύει $f(x)<f(\xi)\Rightarrow f(x)-f(\xi)<0$ για κάθε $x\in(x_1,\xi)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο πληροφορίες, παίρνουμε ότι $\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)>0$ για $x\in(x_1,\xi)$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to\xi^-}\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)=0$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to\xi^-}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}=+\infty. \qquad (2)$$

- Για $x\in(\xi,x_2)$ ισχύει $x-\xi>0$. Επίσης, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,x_2]$, ισχύει $f(x)>f(\xi)\Rightarrow f(x)-f(\xi)>0$ για κάθε $x\in(\xi,x_2)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο πληροφορίες, παίρνουμε ότι $\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)>0$ για $x\in(x_1,\xi)$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to\xi^+}\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)=0$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to\xi^+}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}=+\infty. \qquad (3)$$

Συμπεραίνουμε από τις (2), (3) ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Στην εκφώνηση δίνεται ότι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε η f δεν μηδενίζεται. Εφόσον είναι και συνεχής, έπεται ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Καθώς $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε τελικά ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η δοσμένη ισότητα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+f(x)\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f(x)}{f(x)}=e^x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)=1+e^x$$

$$\Leftrightarrow\left(\ln f(x)+f(x)\right)'=\left(x+e^x\right)'$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής, προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\ln f(x)+f(x)=x+e^x+c$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού όμως $f(0)=1$, προκύπτει από την παραπάνω σχέση, αντικαθιστώντας $x=0$, ότι`

$$\ln 1+1=1+c \Leftrightarrow c=0.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\ln f(x)+f(x)=x+e^x. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε στην παραπάνω σχέση να λύσουμε απευθείας ως προς $f(x)$, και να προσδιορίσουμε έτσι τον τύπο της f. Παρατηρούμε όμως ότι τα δύο μέλη έχουν την ίδια μορφή. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+x$ για $x>0$. Τότε, η (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $g(f(x))=g(e^x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x>0$ ισχύει $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και «1-1» σε αυτό το διάστημα. Επομένως, η ισότητα $g(f(x))=g(e^x)$ συνεπάγεται την ισότητα $f(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η αντίστροφη της συνάρτησης f είναι η $f^{-1}(x)=\ln x, x>0$. Έτσι, το ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$I=\int_{1/2024}^{2024}\frac{f^{-1}(x)}{x^2+1}dx=\int_{1/2024}^{2024}\frac{\ln x}{x^2+1}dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$. Τότε, $x=\frac{1}{u}$, άρα $dx=\left(\frac{1}{u}\right)'du=-\frac{1}{u^2}du$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης.

- Για $x=1/2024$ ισχύει $u=2024$.
- Για $x=2024$ ισχύει $u=1/2024$.

Επιπλέον, $\ln x=\ln\left(\frac{1}{u}\right)=\ln u^{-1}=-\ln u$. Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$I=\int_{1/2024}^{2024}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=\int_{2024}^{1/2024}-\frac{\ln u}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=\int_{2024}^{1/2024}\frac{\ln u}{u^2+1}du=-\int_{1/2024}^{2024}\frac{\ln u}{u^2+1}du=-I.$$

Επομένως, καταλήγουμε στην ισότητα $I=-I$, απ' όπου προκύπτει ότι $2I=0$, συνεπώς $I=0$.

Δ3. Θα χρειαστεί να μελετήσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x = e\ \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\pi]$. Ισχύουν τα εξής:

- $e^x > 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.
- $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$ για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\sigma\upsilon\nu x\leq 0$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x)\geq 0$ για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $h(x)<0$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|h(x)|dx=\int_0^{\pi/2}h(x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-h(x))dx = I_1 - I_2. \quad (2)$$

Υπολογίζουμε καθένα από τα δύο ολοκληρώματα ξεχωριστά. Επειδή έχουν την ίδια μορφή –είναι και τα δύο ολοκληρώματα της h, απλώς σε διαστήματα με διαφορετικά άκρα– μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της h σε ένα γενικό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τα $[\alpha,\beta]$ με τα άκρα ολοκλήρωσης των ολοκληρωμάτων I_1, I_2. Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Ισχύει

$$\begin{aligned}
I&=\int_\alpha^\beta h(x)dx=\int_\alpha^\beta e^x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_\alpha^\beta (e^x)'\,\sigma\upsilon\nu x dx = \left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx\\
&=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x(-\eta\mu x)dx = \left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta e^x\eta\mu x dx\\
&=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta (e^x)'\,\eta\mu x dx = \left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta+\left[e^x\eta\mu x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x(\eta\mu x)'\,dx\\
&=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x\sigma\upsilon\nu x dx = \left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta - I.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από το πρώτο και το τελευταίο μέλος της παραπάνω ισότητας ότι

$$I=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta - I \Leftrightarrow 2I=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta.$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα α,β με τα άκρα ολοκλήρωσης των I_1, I_2, προκύπτει ότι

$$I_1=\frac{1}{2}\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left[e^{\pi/2}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-e^0(\eta\mu 0+\sigma\upsilon\nu 0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)$$

και

$$I_2=\frac{1}{2}\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{2}\left[e^{\pi}\left(\eta\mu(\pi)+\sigma\upsilon\nu(\pi)\right)-e^{\pi/2}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}+e^{\pi}\right).$$

Έπεται λοιπόν τελικά από τη σχέση (2) ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\boxed{E(\Omega)=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)-\left[-\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}+e^{\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+2e^{\pi/2}-1\right).}$$

Δ4. Έστω $A(\alpha,f(\alpha))\equiv(\alpha,\varphi(\alpha))$ ένα πιθανό κοινό σημείο των C_f, C_φ, στο οποίο οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη. Τότε, θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες

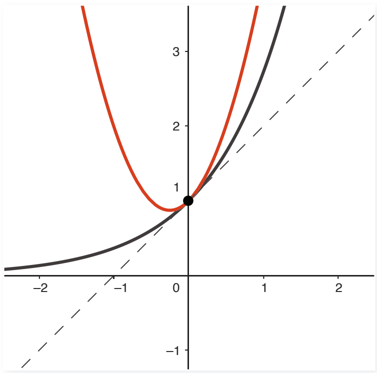
$$f(\alpha)=\varphi(\alpha)\quad\text{και}\quad f'(\alpha)=\varphi'(\alpha).$$

Καθώς $\varphi'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$, αυτό το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} f(\alpha)=\varphi(\alpha)\\ f'(\alpha)=\varphi'(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1\\ e^{\alpha}=4\alpha+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e\alpha=2\alpha^2+\alpha+1\\ 2\alpha^2+\alpha+1=4\alpha+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1\\ 2\alpha^2-3\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1\\ \alpha(2\alpha-3)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1\\ \alpha=0\quad\text{ή}\quad\alpha=\frac{3}{2}\cdot\end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι η τιμή $\alpha=0$ είναι λύση του συστήματος, καθώς $e^0=2\cdot 0^2+0+1=1$. Αντίθετα, η τιμή $\alpha=\frac{3}{2}$ δεν επαληθεύει την ισότητα $e^{3/2}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1$.

Επομένως, το μοναδικό σημείο επαφής είναι το $A(0,f(0))$ με $f(0)=e^0=1$ και η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+1.}$$