

Θέματα Δ

10.Δ.1

α. Τη χρονική στιγμή $t=6s$, το κύμα διαδόθηκε προς τα δεξιά κατά $x=3m$, επομένως η ταχύτητα διάδοσης είναι

$$v = \frac{x}{t} = \frac{3}{6} \text{ m/s} \Rightarrow v = 0,5 \text{ m/s}$$

Από το σχήμα έχουμε $\frac{\lambda}{2} = (3-1)m \Rightarrow \lambda = 4m$.

Η συχνότητα ταλάντωσης των μορίων της χορδής είναι

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,5}{4} \text{ Hz} \Rightarrow f = 0,125 \text{ Hz}$$

β. Η εξίσωση του κύματος είναι

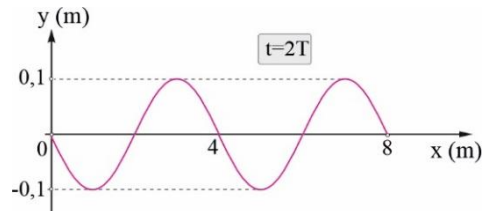
$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,1 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{8} - \frac{x}{4} \right), \text{ (S.I.)}$$

Η εξίσωση που δίνει το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t=2T$ είναι

$$y = 0,1 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{2T}{T} - \frac{x}{4} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot \eta \mu 2\pi \left(2 - \frac{x}{4} \right), \text{ (S.I.)}$$

Τη στιγμή $t=2T$ το κύμα φτάνει μέχρι το μόριο που βρίσκεται στη θέση $x=ut=2\lambda=8m$. Επίσης $A=0,1m$ και το στιγμιότυπο είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

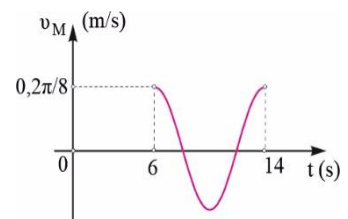


γ. $y_M = 0,1 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{8} - 0,75 \right), \text{ (S.I.)}$

$$v_M = \omega \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \frac{0,2\pi}{8} \cdot \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{t}{8} - 0,75 \right), \text{ (S.I.)}$$

Το κύμα φτάνει στο M τη στιγμή $t_1=x/v=6s$ και μέχρι την $t=14s$ έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t=14s-6s=8s=T$.

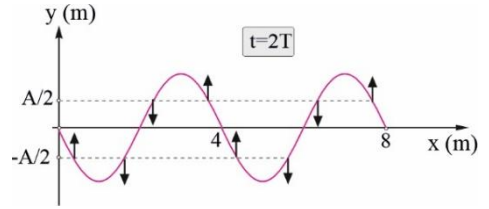
Η γραφική παράσταση είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



δ. Από την ΑΔΕΤ ισχύει ότι

$$E = K + U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow y = \pm \frac{A}{2}$$

Από το στιγμιότυπο του ερωτήματος β παρατηρούμε ότι υπάρχουν συνολικά 8 σημεία που έχουν $y = \pm \frac{A}{2}$, από τα οποία τα τέσσερα κινούνται προς τη θέση ισορροπίας τους.



10.Δ.2

α. $T=0,2s$, $4A=8cm$ ή $A=2cm$, $\lambda=40cm$

β. Δεν υπάρχει αρχική φάση, $y_0 = 0,02\eta\mu 10\pi t$ (S.I.)

γ. Τα Λ, Μ έχουν αντίστοιχα φάσεις $\phi_\Lambda = \pi/2$ rad (1/4 ταλάντωσης), $\phi_M = 12\pi$ rad (6 ταλάντωσης).

Επειδή $\phi_M > \phi_\Lambda$ το κύμα διαδίδεται από το Μ προς το Λ.

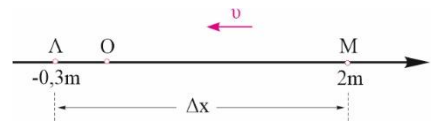
$$\phi_M = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\phi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\phi_M - \phi_\Lambda = 2\pi \frac{(x_M - x_\Lambda)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$12\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 2\pi \frac{(x_M - (-0,3m))}{0,4} \Rightarrow$$

$$11,5\pi \text{ rad} = 5\pi(x_M + 0,3m) \Rightarrow x_M = 2m$$



δ. $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\Delta x}{\lambda \cdot f} \Rightarrow \Delta t = 1,15s$

ε. $y_\Lambda = 0,02\eta\mu 2\pi \left(5t - \frac{3}{4} \right)$ (S.I.)

$y_M = 0,02\eta\mu 2\pi(5t + 5)$ (S.I.)

10.Δ.3

α. $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,8s$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$

$$\lambda = 2 \cdot \Delta x = 0,08m$$

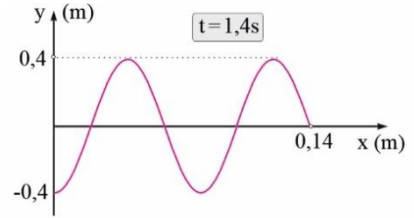
$$E_T = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow A = 0,4m$$

$$\beta. y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0,4\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,8} - \frac{x}{0,08}\right), \text{ (S.I.)}$$

Η $t_1=1,4\text{s}$ αντιστοιχεί σε $T+3T/4$, οπότε το κύμα έχει προχωρήσει κατά $\lambda+3\lambda/4$ και το στιγμιότυπο περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,4\eta\mu 2\pi\left(1,75 - \frac{x}{0,08}\right), \text{ (S.I.)}$$

και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



$$\gamma. K + U = E, y = \frac{A}{2} \Rightarrow U = \frac{E}{4}$$

$$K = \frac{3E}{4} = \frac{15}{4}\pi^2 10^{-7} \text{ J}$$

$$\delta. y_P = A\eta\mu\varphi_P \Rightarrow 0,4 = 0,4\eta\mu\varphi_P \Rightarrow \varphi_P = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$$

$$\varphi_S = \varphi_P - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_S = 2\kappa\pi - \pi$$

$$v_S = \omega A \sigma\upsilon\nu\varphi_S = -\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.Δ.4

α. Τη στιγμή $t_1=1\text{s}$: $x_M=2\text{m}$ και $\phi=0\text{rad}$.

Τη στιγμή $t_2=2\text{s}$: $\phi_M=2\pi \text{ rad}$.

Την $t_1=1\text{s}$ το Μ ξεκινά να ταλαντώνεται ($\phi_M=0\text{rad}$) και τη στιγμή t_2 το Μ έχει εκτελέσει δύο ταλαντώσεις, άρα $\phi_M=4\pi \text{ rad}$.

Για το Μ:

$$t_1 = 1\text{s}: 0 = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{2}{\lambda}\right) \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{2}{\lambda} \quad (1)$$

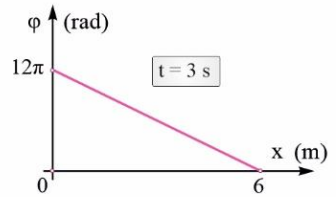
$$t_2 = 2\text{s}: 4\pi = 2\pi\left(\frac{2}{T} - \frac{2}{\lambda}\right) \xrightarrow{(1)} 4\pi = 2\pi\left(\frac{2}{T} - \frac{1}{T}\right) \Rightarrow T = 0,5\text{s}$$

$$\beta. \phi_M - \phi_N = 4\pi \text{ rad} - 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \phi_M - \phi_N = 2\pi \text{ rad}$$

Όταν $\phi_N=7\pi$ rad τότε $\phi_M=9\pi$ rad.

γ. Από τη σχέση (1) έχουμε $\lambda=2T$ ή $\lambda=1\text{m}$.

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi = 2\pi\left(\frac{3}{0,5} - \frac{x}{1}\right) \text{ (S.I.)}$$



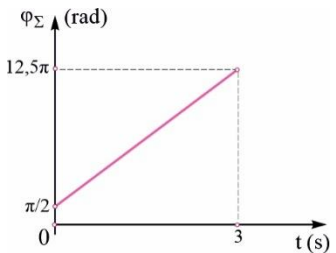
Το διάγραμμα $\phi=f(x)$ δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

δ. Το σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση $x=-0,25\text{m}$ ξεκινά να ταλαντώνεται πριν από το Ο, άρα η φάση που έχει τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ θα θεωρηθεί ως η αρχική φάση της ταλάντωσής του

$$\phi_{\Sigma(0)} - \phi_{0(0)} = 2\pi \frac{x_0 - x_{\Sigma}}{\lambda} \Rightarrow \phi_{\Sigma(0)} = 2\pi \frac{0,25}{1} \text{ m} \Rightarrow \phi_{\Sigma(0)} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η εξίσωση φάσης - χρόνου για το σημείο Σ είναι

$$\phi_{\Sigma} = 4\pi t + \frac{\pi}{2} \text{ (S.I.)}$$



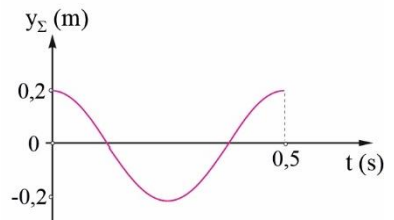
Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

ε. Σε μία περίοδο το υλικό σημείο διανύει διάστημα

$$4A = 0,8\text{m} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Η απομάκρυνση του Σ σε σχέση με το χρόνο περιγράφεται από τη σχέση

$$y_{\Sigma} = 0,2\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ (S.I.)}$$



Και η γραφική παράσταση απομάκρυνσης - χρόνου για μία ολοκληρωμένη ταλάντωση του σημείου Σ από την $t=0\text{s}$ και μετά είναι όπως στο σχήμα.

10.Δ.5

α. Επειδή $\phi_M < \phi_0$, το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x' Οx και το Μ βρίσκεται δεξιά του Ο.

β. $f=0,25\text{Hz}$ ή $T=4\text{s}$, $\lambda=u/f=0,4\text{m}$

Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη γενική εξίσωση του κύματος προκύπτει

$$3 = \frac{x_1}{\lambda} \text{ ή } x_1=1,2\text{m}$$

γ. $\phi_2 = 3 \cdot 2\pi \text{ rad} = 6\pi \text{ rad}$ και $\phi_1 = \pi/2 \text{ rad}$.

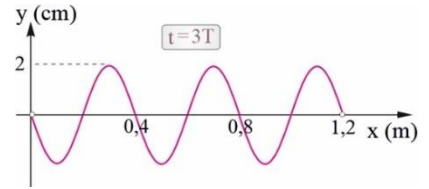
$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} \Rightarrow \frac{11\pi}{2} = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{0,4} \Rightarrow x_2 = 0,1\text{m}$$

δ. Η διαταραχή φτάνει στο Μ τη στιγμή $t_1 = x/u = 12\text{s} = 3T$ και η απόσταση που έχει φτάσει το κύμα αντιστοιχεί σε 3λ .

Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο είναι η

$$y = 0,02 \cdot \eta\mu 2\pi \left(3 - \frac{x}{0,4} \right), \text{ (S.I.)}$$

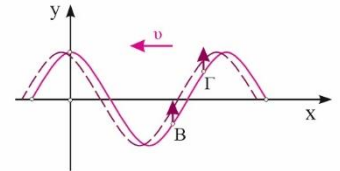
και η γραφική παράσταση δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



10.Δ.6

α. $\phi_B < \phi_\Gamma$, άρα το κύμα διαδίδεται από το Γ προς το Β.

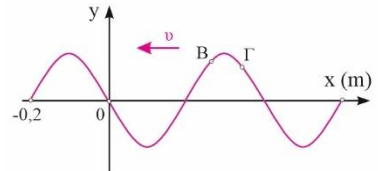
β. Το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά. Στη διάδοσή του κάθε σημείο επαναλαμβάνει την κίνηση του προηγούμενου του, οπότε η φορά κίνησης των σημείων Β και Γ είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



γ. Από το διάγραμμα έχουμε $A = 0,04\text{m}$ και $\lambda/4 = 0,1\text{m}$ ή $\lambda = 0,4\text{m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = T/2$ το κύμα διαδόθηκε προς τα αριστερά επιπλέον κατά $\lambda/4$. Το στιγμιότυπο περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,04\eta\mu 2\pi \left(0,5 + \frac{x}{0,4} \right) \text{ (S.I.)}$$



και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

δ. Τη στιγμή $t = T/4$ το σημείο της θέσης $x = 0\text{m}$ έχει απομάκρυνση $y = +A$, άρα δεν έχει αρχική φάση και η εξίσωση του κύματος είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,04\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0,2} + \frac{x}{0,4} \right) \text{ (S.I.)}$$

10.Δ.7

α. $f = 10\text{Hz}$, $y_0 = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \eta\mu 20\pi t$ (S.I.)

β. $\lambda = \frac{v}{f} = 2\text{cm}$

$$\gamma. y = 2 \cdot 10^{-2} \eta\mu 2\pi \left(10t - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}} \right), \text{ (S.I.)}$$

$$\delta. |\Delta\phi| = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4} = 0,5 \text{ cm}$$

ε. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση προκύπτει

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow |v| = \omega\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow |v| = 0,2\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

10.Δ.8

α. Συγκρίνοντας την $y = 0,02\eta\mu(20\pi t - 2\pi x) = 0,02\eta\mu 2\pi(10t - x)$ με την $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ παίρνουμε:

$$\text{Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι } v = \frac{\lambda}{T} = 10 \text{ m/s}.$$

β. Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που έχουν τη χρονική στιγμή $t = 0,15\text{s}$ απομάκρυνση $y = 1\text{cm}$ έχουμε

$$1 = 2\eta\mu 2\pi(10 \cdot 0,15 - x) \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu 2\pi(1,5 - x)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει δύο σειρές λύσεων

$$\frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi = 3\pi - 2\pi x \quad (1), \quad (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{6} = 3\pi - 2\pi x \quad (2)$$

Οι λύσεις της (1) ανήκουν στο 1^ο τεταρτημόριο και έχουν $v > 0$. Οι λύσεις της (2) ανήκουν στο 2^ο τεταρτημόριο και έχουν $v < 0$.

$$\text{Η (1) για } \kappa=0, 1 \text{ δίνει } x = \frac{17}{12} \text{ m (Δ)}, x = \frac{5}{12} \text{ m (B)}$$

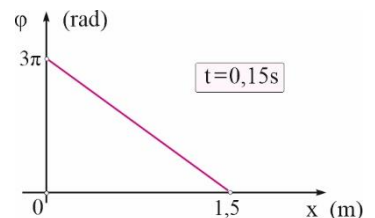
$$\text{Η (2) για } \kappa=0, 1 \text{ δίνει } x = \frac{13}{12} \text{ m (Γ)}, x = \frac{1}{12} \text{ m (Α)}$$

$$\gamma. x = \frac{17}{12} \text{ m (Δ)}, x = \frac{5}{12} \text{ m (B)}$$

δ. Η φάση των σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή $t = 0,15\text{s}$ είναι

$$\phi = 3\pi - 2\pi x \quad \text{(S.I.)}$$

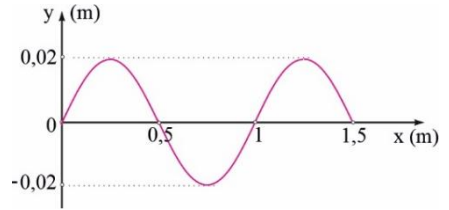
Η γραφική παράσταση δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



ε. Το στιγμιότυπο την $t=0,15s$ περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,02 \cdot \eta\mu 2\pi(1,5 - x) \quad (\text{S.I.})$$

και η γραφική παράσταση δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



10.Δ.9

α. Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων του σημείου Ο είναι 0,4m, άρα το πλάτος του κύματος θα είναι

$$2A = 0,4\text{m} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις. Το χρονικό διάστημα απευθείας μετάβασης από τη μία ακραία θέση στην άλλη είναι ίσο με μισή περίοδο της ταλάντωσης, άρα έχουμε

$$\frac{T}{2} = 0,1\text{s} \Rightarrow T = 0,2\text{s}$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι $f = \frac{1}{T} = 5\text{Hz}$.

Επειδή σε κάθε περίοδο το κάθε υλικό σημείο διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας, η συχνότητα των περασμάτων από τη θέση ισορροπίας είναι διπλάσια από τη συχνότητα της ταλάντωσης επομένως

$$f_{\text{οι}} = 2f \Rightarrow f_{\text{οι}} = 10\text{Hz}$$

Το μήκος κύματος βρίσκεται από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{1,25}{5} \text{m} = 0,25\text{m}$$

β. Η εξίσωση του κύματος είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu 2\pi(5t + 4x) \quad (\text{S.I.})$$

Μηδενίζοντας τη φάση του κύματος τη στιγμή 0,25s βρίσκουμε τη μέγιστη απόσταση στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα από την αρχή του άξονα

$$2\pi(5t + 4x_{\text{max}}) = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0,25 + 4x_{\text{max}} = 0 \Rightarrow x_{\text{max}} = -0,3125\text{m}$$

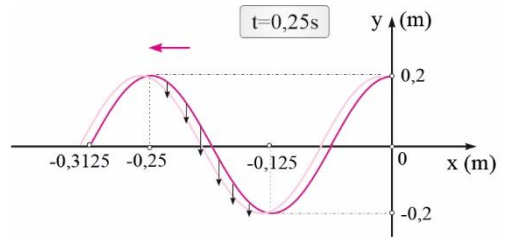
Ο αριθμός των κυματικών εικόνων είναι

$$N = \frac{|x_{\max}|}{\lambda} = \frac{0,3125}{0,25} = 1,25$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου είναι

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi(1,25 + 4x) \text{ (S.I.)}$$

και η γραφική παράσταση είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

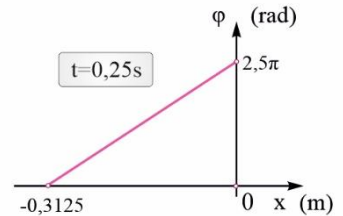


Η φορά κίνησης όλων των σημείων του μέσου που βρίσκονται στο διάστημα $-0,25\text{m} < x < -0,125\text{m}$ είναι προς τα κάτω (δες σχήμα).

γ. Η εξίσωση της φάσης με το x τη στιγμή 0,25s είναι

$$\varphi = 2\pi(5 \cdot 0,25 + 4x) \text{ (S.I.)} \Rightarrow \varphi = 2,5\pi + 8\pi x \text{ (S.I.)}$$

Για $\varphi=0\text{rad}$ είναι $x=-0,3125\text{m}$ ενώ για $x=0\text{m}$ είναι $\varphi=2,5\pi\text{ rad}$, άρα η γραφική παράσταση της φάσης - θέσης των διαφόρων σημείων του αρνητικού ημιάξονα τη χρονική στιγμή $t=0,25\text{s}$ είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



δ. Από τη σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης βρίσκουμε το μέτρο της απομάκρυνσης του σημείου

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - y^2) \Rightarrow |y| = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m}$$

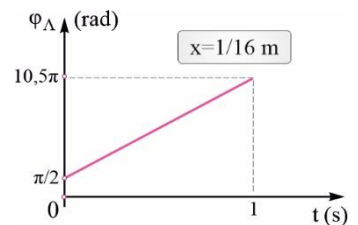
Από τη σχέση επιτάχυνσης - απομάκρυνσης βρίσκουμε το μέτρο της επιτάχυνσης

$$|\alpha| = \omega^2 |y| \Rightarrow |\alpha| = 100\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

ε. Η συνάρτηση φάσης - χρόνου για το σημείο Λ που βρίσκεται στη θέση $x=1/16\text{m}$ είναι

$$\varphi_{\Lambda} = 2\pi \left(5t + 4 \frac{1}{16} \right) \text{ (S.I.)} \Rightarrow \varphi_{\Lambda} = 10\pi t + \frac{\pi}{2} \text{ (S.I.)}$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



10.Δ.10

α. Από το στιγμιότυπο του κύματος συμπεραίνουμε ότι το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου είναι $A=4\text{cm}=0,04\text{m}$ και το μήκος κύματος είναι ίσο με $\lambda=2\text{cm}=0,02\text{m}$. Από την κλίση στο διάγραμμα φάσης - χρόνου βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα των σημείων του μέσου

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,35 - 0,25} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,1} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 20\pi \text{ rad/s}$$

Άρα η περίοδος ταλάντωσης των σημείων είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{20\pi} \text{ s} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Τα δεδομένα του προβλήματος δεν μας πληροφορούν τι κάνει το σημείο Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα την χρονική στιγμή $t=0\text{s}$. Θα ελέγξουμε αν υπάρχει αρχική φάση.

Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι τη στιγμή $t_1=0,125\text{s}$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $\lambda + \frac{\lambda}{4}$

από το σημείο Ο. Όμως η στιγμή t_1 αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $T + \frac{T}{4}$, οπότε έχοντας υπόψη

ότι το κύμα σε χρόνο μιας T διαδίδεται κατά λ , προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σημείο Ο ξεκινάει να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα θετικά και επομένως δεν έχει αρχική φάση. Άρα η εξίσωση του κύματος είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,04\eta\mu 2\pi(10t - 50x) \text{ (S.I.)}$$

β. Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{0,02}{0,1} \text{ m/s} \Rightarrow v = 0,2 \text{ m/s}$$

Από το διάγραμμα φάσης - χρόνου βλέπουμε ότι το σημείο Σ ξεκινάει να ταλαντώνεται τη στιγμή $0,25\text{s}$, άρα η θέση του σημείου Σ στον άξονα θα είναι

$$x_{\Sigma} = vt_{\Sigma} \Rightarrow x_{\Sigma} = 0,2 \cdot 0,25 \text{ m} \Rightarrow x_{\Sigma} = 0,05 \text{ m}$$

γ. Η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το σημείο Μ που βρίσκεται στη θέση $x_M=2\text{cm}$ έχει απομάκρυνση $y=+2\text{cm}$ για 3^η φορά βρίσκεται από την εξίσωση του κύματος

$$0,02 = 0,04\eta\mu 2\pi(10t - 50 \cdot 0,02) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(10t - 1) = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 20\pi t - 2\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ 20\pi t - 2\pi = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

$$(1) : k = 0, \quad 20\pi t = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow 20\pi t = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow t' = \frac{13}{120} \text{ s}$$

$$(2) : k = 0, \quad 20\pi t = 2\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 20\pi t = \frac{17\pi}{6} \Rightarrow t'' = \frac{17}{120} \text{ s}$$

$$(1) : k = 1, \quad 20\pi t = 4\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow 20\pi t = \frac{25\pi}{6} \Rightarrow t''' = \frac{25}{120} \text{ s} = \frac{5}{24} \text{ s}$$

Άρα η τρίτη φορά αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1=5/24s$.

δ. Για να βρούμε πόσα σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου έχουν τη χρονική στιγμή t_1 απομάκρυνση 2cm σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή t_1 . Μηδενίζουμε τη φάση για να βρούμε μέχρι που έχει φτάσει το κύμα

$$0 = 2\pi\left(10\frac{5}{24} - 50x\right) \Rightarrow 50x_{\max} = \frac{50}{24}m \Rightarrow x_{\max} = \frac{1}{24}m$$

Βρίσκουμε τον αριθμό των κυματικών εικόνων

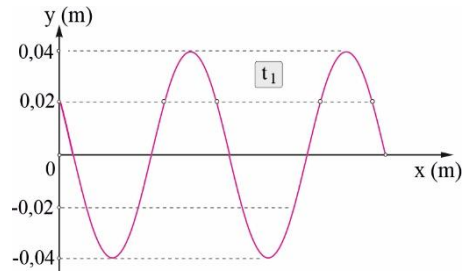
$$N = \frac{x_{\max}}{\lambda} \Rightarrow N = \frac{\frac{1}{24}m}{\frac{1}{50}m} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12}$$

Επειδή ο αριθμός των εικόνων δεν είναι πολλαπλάσιο του $\lambda/4$, υπολογίζουμε και την απομάκρυνση του σημείου O, $x_0=0m$, τη στιγμή αυτή. Έχουμε

$$y_0 = 0,04\eta\mu 2\pi\left(10t - 50x\right) = 0,04\eta\mu 2\pi\left(10\frac{5}{24}\right) \Rightarrow$$

$$y_0 = 0,04\eta\mu \frac{50\pi}{12} \Rightarrow y_0 = 0,04\eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow y_0 = 0,02m$$

Άρα ο αριθμός των σημείων που έχουν απομάκρυνση 0,02m τη στιγμή t_1 είναι ίσος με 5.



10.Α.11

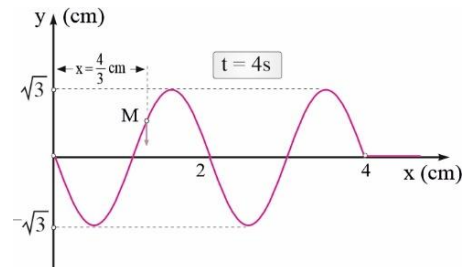
$$\alpha. y = \sqrt{3} \cdot \eta\mu\pi(t - x) \Rightarrow y = \sqrt{3} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$T = 2s, \lambda = 2cm$$

Τη χρονική στιγμή $4s=2T$ το κύμα έχει προχωρήσει 2 μήκη κύματος. Το στιγμιότυπο περιγράφεται από τη σχέση

$$y = \sqrt{3} \cdot \eta\mu 2\pi\left(2 - \frac{x}{2}\right) \quad (y, x \text{ σε cm})$$

και δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



$$\beta. \upsilon = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow -\frac{v_{\max}}{2} = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right), y > 0 \\ \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right), y < 0 \end{cases}$$

Δεχόμαστε την εξίσωση με $y > 0$ και παίρνουμε

$$\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} = 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{10}{3} - 2\kappa$$

Για $\kappa=0, 1$ προκύπτουν οι θέσεις: $\frac{10}{3} \text{ cm}$, $\frac{4}{3} \text{ cm}$

Το πλησιέστερο σημείο απέχει από το Ο κατά $\frac{4}{3} \text{ cm}$.

$$\gamma. F_{\epsilon\pi} = -m\omega^2 y$$

Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση προκύπτει

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{v_{\max}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

Με πράξεις και αντικατάσταση $v_{\max} = \omega A$ προκύπτει $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A$.

από τις δύο λύσεις δεκτή είναι μόνο η θετική και η δύναμη επαναφοράς είναι

$$F_{\epsilon\pi} = -2 \cdot 10^{-6} (2\pi \cdot 0,5)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ N} \Rightarrow F_{\epsilon\pi} = -3\pi^2 10^{-8} \text{ N}$$

δ. Όταν το κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης η συχνότητά του μένει σταθερή, $f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$.

Η νέα ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι

$$\upsilon' = \upsilon + \frac{100}{100} \upsilon \Rightarrow \upsilon' = 2\upsilon = 0,02 \text{ m/s}$$

Το νέο μήκος κύματος θα είναι

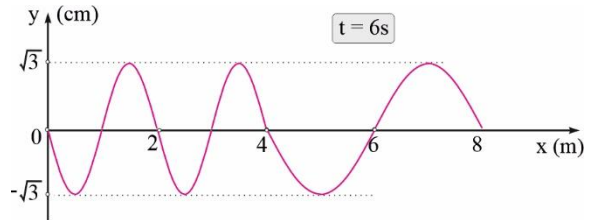
$$\lambda' = \frac{\upsilon'}{f} \Rightarrow \lambda' = \frac{0,02}{0,5} \text{ m} \Rightarrow \lambda' = 0,04 \text{ m}$$

Άρα η νέα εξίσωση του κύματος στο δεύτερο μέσο θα είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(f't - \frac{x}{\lambda'}\right) \Rightarrow$$

$$y = 10^{-2}\sqrt{3}\eta\mu 2\pi(0,5t - 25x) \text{ (S.I.)}, x \geq 0,04\text{m}$$

Στο στιγμιότυπο, το κύμα τη στιγμή $t_2=6\text{s}$, σε σχέση με αυτό της στιγμής $t_1=4\text{s}$, θα έχει διαδοθεί επιπλέον κατά ένα μήκος κύματος $\lambda' = 0,04\text{m}$ και θα είναι όπως στο σχήμα.



10.Δ.12

$$\alpha. y = A \cdot \eta\mu(t - 2x) = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - \frac{2x}{2\pi}\right), \text{ (S.I.)}$$

Άρα $T = 2\pi\text{s}$, $\lambda = \pi\text{cm}$

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3}{\pi} \text{ rad} \Rightarrow |\Delta\varphi| = 6\text{rad}$$

β. Επειδή το Μ παρουσιάζει διαφορά φάσης $2\pi\text{ rad}$ με το Ο βρίσκεται στη θέση $x_M = \lambda$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύματος και έχουμε

$$A = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - \frac{\pi}{\pi}\right) \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{2} = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} = t - 2\pi$$

όπου $\kappa=0, 1, 2 \dots$ Η 3^η φορά αντιστοιχεί σε $\kappa=2$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\frac{13\pi}{2}\text{s}$.

$$\gamma. \frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - \frac{2 \cdot 1}{2\pi}\right) \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\right)$$

Από τις δύο σειρές λύσεων που προκύπτουν δεχόμαστε μόνο αυτές του 1^{ου} τεταρτημόριου γιατί $u > 0$.

Άρα $t = 2 + \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi$ με $\kappa=0, 1, 2, \dots$

δ. Η εξίσωση επιτάχυνσης - χρόνου για όλα τα σημεία του υλικού μέσου είναι

$$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \alpha = -0,1\eta\mu(t - 2x) \quad (x \text{ σε cm}, t \text{ σε s})$$

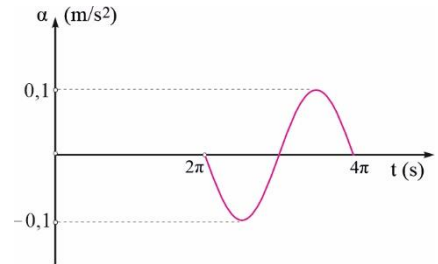
Το σημείο Ν ξεκινάει να ταλαντώνεται τη στιγμή

$$t = \frac{x_N}{v} \Rightarrow t = \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi \cdot 10^{-2}}{2\pi}} \text{ s} \Rightarrow t = 2\pi \text{ s}$$

Άρα η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου N θα είναι

$$a = -0,1\eta\mu(t - 2\pi) \quad (\text{για } t \geq 2\pi \text{ s})$$

Επομένως η γραφική παράσταση θα είναι όπως στο σχήμα.



10.Δ.13

α. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του σημείου M παίρνουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow v^2 + \omega^2y^2 = \omega^2A^2 \Rightarrow \omega = 4 \text{ rad/s} \quad \text{και} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

$$\beta. \lambda = \frac{v}{f} = 5\pi \text{ cm}$$

$$y = 2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{2t}{\pi} - \frac{x}{5\pi} \right) \quad (y, x \text{ cm})$$

$$\gamma. y_M = 2 \cdot \eta\mu(4t - 1,2) \text{ (cm)}, \quad t \geq 0,3 \text{ s}$$

δ. Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχει αρνητική απομάκρυνση και θετική ταχύτητα όταν βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο. Επειδή είναι η 1^η φορά που συμβαίνει αυτό, η αποδεκτή λύση του t πρέπει να είναι τέτοια ώστε $3\pi/2 \text{ rad} < \phi_M < 2\pi \text{ rad}$ (2)

$$-\sqrt{3} = 2 \cdot \eta\mu(4t - 1,2) \Rightarrow \eta\mu(4t - 1,2) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Προκύπτουν 2 σειρές λύσεων

$$4t - 1,2 = -\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi \quad (3) \quad \text{λύσεις 4^{ου} τεταρτημόριου}$$

$$4t - 1,2 = \frac{4\pi}{3} + 2\kappa\pi \quad (4) \quad \text{λύσεις 3^{ου} τεταρτημόριου}$$

Με αντικατάσταση στην (3), $\kappa=1$ βρίσκουμε φάση $5\pi/3 \text{ rad}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (2). Άρα

$$4t - 1,2 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t = \left(0,3 + \frac{5\pi}{12}\right) \text{ s}$$

10.Δ.14

α. $y_0 = 0,2\eta\mu 20\pi t$ (S.I) άρα: $A = 0,2\text{m}$, $\omega = 20\pi\text{rad/s}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,1\text{s}$

$v_A = \frac{x_A}{5T} \Rightarrow v_A = 5\text{m/s}$, $v_B = \frac{x_B}{5T} \Rightarrow v_B = 8\text{m/s}$

β. A: $\lambda_A = v_A T = 0,5\text{m}$, $y_A = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_A}\right) \Rightarrow y_A = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,1} - \frac{x}{0,5}\right)$ (S.I.)

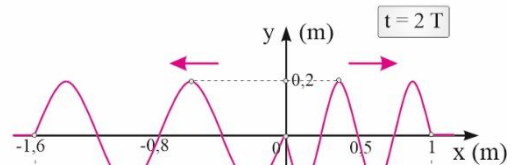
B: $\lambda_B = v_B T = 0,8\text{m}$, $y_B = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda_B}\right) \Rightarrow y_B = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,1} + \frac{x}{0,8}\right)$ (S.I.)

γ. Το διάγραμμα απομάκρυνσης - θέσης την $t=2T$ περιγράφεται από τις σχέσεις

$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2 - \frac{x}{0,5}\right)$ (S.I.)

$y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2 + \frac{x}{0,8}\right)$ (S.I.)

και δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

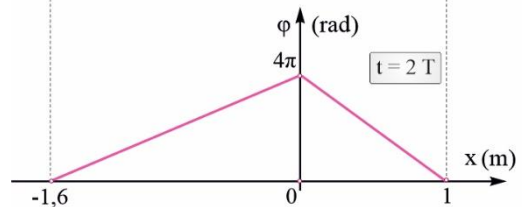


δ. Το διάγραμμα φάσης - θέσης την $t=2T$ περιγράφεται από τις σχέσεις

$\varphi_A = 2\pi\left(2 - \frac{x}{0,5}\right)$ (S.I.)

$\varphi_B = 2\pi\left(2 + \frac{x}{0,8}\right)$ (S.I.)

και δείχνεται στο διπλανό σχήμα



ε. Για το M:

$y_M = +A \Rightarrow A = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{0,5}{0,5}\right) \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{2} = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right) \Rightarrow \frac{t}{T} = 1,25 + \kappa$ (1)

Για το N:

$v_N = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{0,5}{0,8}\right) \xrightarrow{(1)} v_N = 0,2 \cdot 20\pi \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow v_N = -2\pi\sqrt{2}\text{m/s}$

10.Δ.15

α. $v_{\max} = \omega A = 2\pi f A \Rightarrow f = 0,5 \text{ Hz}$

β. $v = \lambda f = 10 \text{ cm/s}$

γ. $x = \frac{7\lambda}{4}$, $t_0 = \frac{7T}{4} \Rightarrow t_0 = 3,5 \text{ s}$

δ. $\left. \begin{array}{l} K = 3U \\ K + U = E \end{array} \right\} 4U = E \Rightarrow U = \frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow y = \pm \frac{A}{2}$

Για $y = +A/2$ έχουμε $\frac{A}{2} = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(1 - \frac{x}{20} \right)$

Προκύπτουν δύο σειρές λύσεων:

$$\frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi = 2\pi - \frac{\pi x}{10} \Rightarrow x = \frac{110}{6} - 20\kappa \quad (1)$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\kappa\pi = 2\pi - \frac{\pi x}{10} \Rightarrow x = \frac{70}{6} - 20\kappa \quad (2)$$

Από τις (1), (2) για $\kappa=0$ παίρνουμε:

$$x = \frac{110}{6} \text{ cm } (M_4), \quad x = \frac{70}{6} \text{ cm } (M_3)$$

Για $y = -A/2$ έχουμε $-\frac{A}{2} = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(1 - \frac{x}{20} \right)$

Προκύπτουν δύο σειρές λύσεων:

$$\frac{7\pi}{6} + 2\kappa\pi = 2\pi - \frac{\pi x}{10} \Rightarrow x = \frac{50}{6} - 20\kappa \quad (3)$$

$$\frac{11\pi}{6} + 2\kappa\pi = 2\pi - \frac{\pi x}{10} \Rightarrow x = \frac{10}{6} - 20\kappa \quad (4)$$

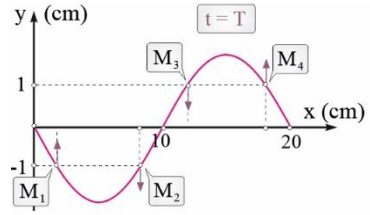
Από τις (3), (4) για $\kappa=0$ παίρνουμε:

$$x = \frac{50}{6} \text{ cm } (M_2), \quad x = \frac{10}{6} \text{ cm } (M_1)$$

ε. Το στιγμιότυπο την $t=T$ περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,02\eta\mu 2\pi\left(1 - \frac{x}{0,2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

και το κύμα έχει προχωρήσει κατά λ . Στο στιγμιότυπο δείχνονται τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και οι ταχύτητές τους.



10.Δ.16

α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης του σημείου Ο της ελαστικής χορδής με τη γενική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης προκύπτει:

$$A=0,1\text{m}, \quad \omega=2\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow T = 1\text{s}$$

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = vT = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{s} \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$$

Το σημείο Ν τη χρονική στιγμή $t=2,75\text{s}$ φτάνει για 1^η φορά στην ακραία αρνητική του θέση. Από τη στιγμή που το σημείο Ν άρχισε να ταλαντώνεται μέχρι να βρεθεί στην ακραία αρνητική του απομάκρυνση πέρασε χρονικό διάστημα $3T/4$. Χρειάστηκε όμως και ένα χρονικό διάστημα t_1 για να φτάσει το κύμα από το Ο στο Ν. Άρα

$$t = t_1 + \frac{3T}{4} \Rightarrow 2,75\text{s} = \frac{x_N}{v} + \frac{3T}{4} \Rightarrow x_N = 4\text{m}.$$

β. Η ταχύτητα του σημείου Ν γίνεται μηδέν για 1^η φορά όταν αυτό φτάσει στην ακραία θετική θέση, δηλαδή μετά από $T/4$ από τη στιγμή που άρχισε να ταλαντώνεται. Άρα από την αρχή διάδοσης του κύματος η ταχύτητα του σημείου Ν γίνεται μηδέν για 1^η φορά τη χρονική στιγμή t_2 για την οποία ισχύει

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{4} = \frac{x_N}{v} + \frac{T}{4} = \frac{4\text{m}}{2\text{m/s}} + \frac{1\text{s}}{4} \Rightarrow t_2 = 2,25\text{s}$$

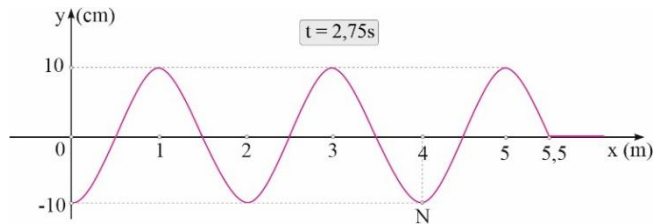
Η φάση του σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_2 είναι

$$\varphi = \omega t_2 = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2,25\text{s} = 4,5\pi \text{ rad}$$

γ. Όλα τα σημεία της χορδής που απέχουν από το Ν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $\lambda/2$ μένουν ακίνητα ταυτόχρονα με το σημείο Ν, δηλαδή βρίσκονται ταυτόχρονα με το Ν στις ακραίες τους θέσεις (είτε θετικές είτε αρνητικές).

Το στιγμιότυπο την $t=2,75s$ περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2,75 - \frac{x}{2} \right), \text{ (SI)}$$



και δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

Μεταξύ των Ο και Ν τρία μόνο σημεία μένουν ακίνητα ταυτόχρονα με το Ν, τα σημεία στις θέσεις: $x=1m$, $x=2m$ και $x=3m$.

δ. Η απομάκρυνση του σημείου Ν υπολογίζεται με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωσή του

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow m \omega^2 A^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-1} \text{ m.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του θέματος, το σημείο Ν τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα $v_N=0,1\pi$ m/s επιταχύνεται, δηλαδή κινείται προς τη θέση ισορροπίας έχοντας θετική ταχύτητα, οπότε βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς, άρα δεκτή είναι η αρνητική απομάκρυνση,

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} 10^{-1} \text{ m.}$$

10.Α.17

$$\alpha. \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi \text{ rad/s}, f = 4\text{Hz}$$

$$f = \frac{N}{t} \Rightarrow N = 40 \text{ ταλ.}$$

άρα 80 διελεύσεις από τη θέση ισορροπίας.

$$\beta. T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{1}{4} = 2\pi\sqrt{\frac{0,5}{k}} \Rightarrow k = 320 \text{ N/m}$$

$$\gamma. y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Οι ακραίες θέσεις απέχουν 2cm, οπότε $2A=2\text{cm}$ ή $A=1\text{cm}$.

Την $t=0,25\text{s}$ το σημείο της θέσης $x_M=16\text{cm}$ έχει φάση μηδέν, οπότε από τη φάση του κύματος βρίσκουμε το λ

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow 0 = 2\pi\left(\frac{0,25}{0,25} - \frac{16}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = 16\text{cm}$$

Άρα η εξίσωση του κύματος είναι

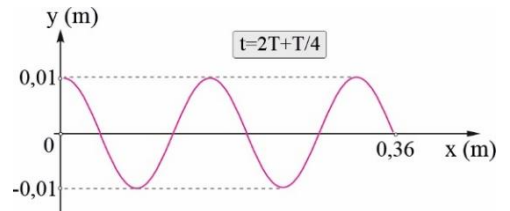
$$y = 0,01 \cdot \eta\mu 2\pi\left(4t - \frac{x}{0,16}\right), \text{ (S.I.)}$$

δ. Η χρονική στιγμή $t=0,5625\text{s}$ αντιστοιχεί σε $2T+T/4$.

Το στιγμιότυπο περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,01 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2,25 - \frac{x}{0,16}\right), \text{ (S.I.)}$$

και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



$$\epsilon. \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -k \frac{A}{2} v, \quad (1)$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \pm \omega A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dK}{dt} = -k \frac{A}{2} \left(-\omega A \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,064\pi\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

10.Α.18

α. Από την εξίσωση της επιτάχυνσης βρίσκουμε:

$$T = 2\text{s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$$

$$\lambda = 8\text{m}$$

$$\omega^2 A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{\pi^2} \text{m} = 0,4\text{m}$$

Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{8}{2} \text{m/s} = 4\text{m/s}$$

Το σημείο που έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_1=3,5s$ βρίσκεται στη θέση

$$x_{\max} = vt_1 = 4 \cdot 3,5m = 14m$$

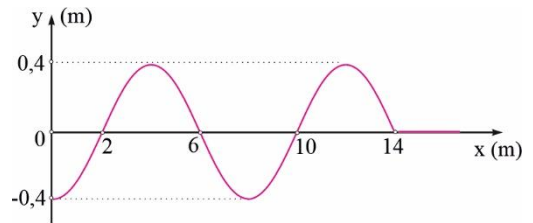
β. Ο αριθμός των κυματικών εικόνων είναι

$$N = \frac{x_{\max}}{\lambda} \Rightarrow N = \frac{14m}{8m} = 1 + 3/4$$

Η συνάρτηση που θα σχεδιάσουμε γραφικά είναι η

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,4\eta\mu 2\pi\left(1,75 - \frac{x}{8}\right) \text{ (S.I.)}$$

Άρα το στιγμιότυπο είναι όπως στο σχήμα.



γ. Η μέγιστη ταχύτητα των σημείων του μέσου είναι

$$v_{\max} = \omega A = 0,4\pi \text{ m/s}$$

οπότε τα σημεία του μέσου που τη χρονική στιγμή t_1 έχουν ταχύτητα με μέτρο $0,4\pi \text{ m/s}$ είναι αυτά που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής τους, άρα με βάση το στιγμιότυπο τα σημεία αυτά είναι 4.

δ. Το σημείο Ο την t_1 έχει φάση

$$\varphi_0 = \omega t_1 = 3,5\pi \text{ rad}$$

Άρα το σημείο Λ την ίδια στιγμή έχει φάση

$$\varphi_\lambda = \varphi_0 - \frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7\pi}{2} \text{ rad} - \frac{7\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \varphi_\lambda = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

Επομένως η απομάκρυνση του Λ από τη θέση ισορροπίας του είναι

$$y = 0,4\eta\mu \frac{7\pi}{6} \text{ m} = -0,2\text{m}$$

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια του σημείου Λ την ίδια στιγμή είναι

$$\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2}{\frac{1}{2}m\omega^2 y^2} = \frac{A^2 - y^2}{y^2} = \frac{0,4^2 - (-0,2)^2}{(-0,2)^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = \frac{0,16 - 0,04}{0,04} = 3$$

10.Δ.19

α. Από τη διαφορά φάσης βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$\varphi_K - \varphi_\Lambda = 2\pi \frac{(x_\Lambda - x_K)}{\lambda} \Rightarrow 3,5\pi = 2\pi \frac{14\text{m}}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 8\text{m}$$

Ο χρόνος που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα από το Κ στο Λ είναι 7s οπότε η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{14}{7} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

Η συχνότητα του κύματος είναι

$$f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{2}{8} \text{ Hz} = 0,25 \text{ Hz}$$

β. Η εξίσωση της απομάκρυνσης των σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,05\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} + \frac{x}{8}\right) \text{ (S.I.)}$$

γ. Η χρονική στιγμή που ξεκινάει να ταλαντώνεται το σημείο Κ είναι

$$t_K = \frac{|x_K|}{v} = \frac{4}{2} \text{ s} = 2 \text{ s}$$

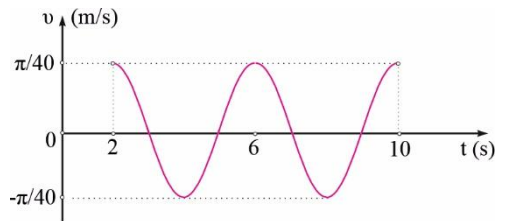
Στο χρονικό διάστημα από $t=0\text{s}$ έως $t=10\text{s}$ το σημείο Κ έχει εκτελέσει αριθμό ταλαντώσεων ίσο με

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{10\text{s} - 2\text{s}}{4\text{s}} = 2$$

Η συνάρτηση που πρόκειται να σχεδιάσουμε είναι η

$$v = \frac{\pi}{40} \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

και δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Το Κ έχει για 10^η φορά ταχύτητα με μέγιστο μέτρο τη στιγμή

$$t = t_K + 4,5T \Rightarrow t = 2\text{s} + 4,5 \cdot 4\text{s} = 20\text{s}$$

Η θέση του σημείου Λ στον άξονα είναι

$$x_{\Lambda} = x_{\kappa} - 14\text{m} = -4\text{m} - 14\text{m} = -18\text{m}$$

Η επιτάχυνση του σημείου Λ όταν το Κ έχει για 10^η φορά ταχύτητα με μέγιστο μέτρο είναι

$$\alpha_{\Lambda} = -\omega^2 y_{\Lambda} = -\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} \right) \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = -(0,5\pi)^2 \cdot 0,05 \eta \mu 2\pi \left(\frac{20}{4} - \frac{18}{8} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha_{\Lambda} = -0,125 \eta \mu 5,5\pi = 0,125 \text{m/s}^2$$

10.Δ.20

α. Από τη γραφική παράσταση βρίσκουμε:

$$\text{την περίοδο, } \frac{3T}{2} = 6,5\text{s} - 3,5\text{s} \Rightarrow T = 2\text{s}$$

το μήκος του κύματος λ , $\lambda = vT = 0,5 \cdot 2\text{m} \Rightarrow \lambda = 1\text{m}$

β. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Κ είναι $A=0,1\text{m}$ και η θέση του σημείου Κ είναι

$$x_{\kappa} = vt_{\kappa} = 0,5 \cdot 3,5\text{s} = 1,75\text{m}$$

Η εξίσωση της ταλάντωσης του Κ σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$y_{\kappa} = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\kappa}}{\lambda} \right) \Rightarrow y_{\kappa} = 0,1 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - 1,75 \right) \text{ (S.I.)}$$

γ. Το σημείο Κ βρίσκεται για 2^η φορά στην ακραία αρνητική του απομάκρυνση τη στιγμή

$$t_1 = t_{\kappa} + \frac{7T}{4} \Rightarrow t_1 = 3,5\text{s} + \frac{7 \cdot 2}{4}\text{s} = 7\text{s}$$

Η φάση του σημείου Ο τη στιγμή αυτή είναι

$$\varphi_0 = \omega t_1 = \frac{2\pi}{2} \cdot 7\text{rad} = 7\pi\text{rad}$$

δ. Όταν η δυναμική ενέργεια τριπλάσια της κινητικής του από την Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε

$$E = K + U = \frac{4U}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,1 = \pm 0,05\sqrt{3}\text{m}$$

Η τρίτη φορά μετά της έναρξης της ταλάντωσης του σημείου θα συμβεί όταν η απομάκρυνση του σημείου θα είναι αρνητική για πρώτη φορά, οπότε η ζητούμενη λύση θα βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς

$$-0,05\sqrt{3} = 0,1\eta\mu(\pi t - 3,5\pi) \Rightarrow \eta\mu(\pi t - 3,5\pi) = \eta\mu\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi t - 3,5\pi = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \quad (1) \\ \pi t - 3,5\pi = 2k\pi + \pi - \frac{4\pi}{3} \quad (2) \end{array} \right\}$$

Από τη σχέση (1) για $k=0$ παίρνουμε

$$t = 3,5s + \frac{4}{3}s = \frac{29}{6}s$$

10.Δ.21

α. Από τη γραφική παράσταση το πλάτος είναι 0,2m και το μήκος κύματος είναι

$$2\lambda + \frac{\lambda}{4} = 4,5m \Rightarrow \frac{9\lambda}{4} = 4,5m \Rightarrow \lambda = 2m$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $v = \frac{x}{t} = \frac{4,5m}{2,25s} \Rightarrow v = 2m/s$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2m/s}{2m} \Rightarrow f = 1Hz \text{ και } T=1s$$

β. Η εξίσωση της φάσης των σημείων του μέσου σε σχέση με τη θέση τους, για τη χρονική στιγμή $t_1=2,25s$ είναι

$$\varphi = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} \Rightarrow \varphi = 2\pi\frac{2,25}{1} - 2\pi\frac{x}{2} \Rightarrow \varphi = 4,5\pi - \pi x \text{ (S.I.)}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $0m \leq x \leq 4,5m$.

γ. Η ταχύτητα του σημείου K, που βρίσκεται στη θέση $x_K=2,25m$, τη χρονική στιγμή $t_1=2,25s$ είναι

$$v_K = \omega A \sin 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow v_K = 2\pi \cdot 0,2 \sin 2\pi\left(2,25 - \frac{2,25}{2}\right) \text{ (SI)} = 0,4\pi \sin \frac{\pi}{4} \text{ m/s} \Rightarrow v_K = 0,2\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

δ. Από τη στιγμή που τα δύο σημεία ταλαντώνονται η διαφορά φάσης τους είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου. Αφού το Λ είναι το 2^ο πιο κοντινό συμφασικό σημείο με το σημείο Ο θα απέχει από αυτό δύο μήκη κύματος, άρα θα βρίσκεται στη θέση $x_\Lambda=4m$. Η διαφορά φάσης των δύο σημείων είναι

$$\varphi_K - \varphi_\Lambda = 2\pi\frac{(x_\Lambda - x_K)}{\lambda} = 2\pi\text{rad}\frac{4m - 2,25m}{2m} \Rightarrow \varphi_K - \varphi_\Lambda = 1,75\pi\text{rad}$$

10.Α.22

α. Από την κλίση στο διάγραμμα φάσης - θέσης βρίσκουμε το μήκος κύματος

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \right| = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{10\pi}{6} \frac{1}{\text{m}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1,2\text{m}$$

β. Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1} \Rightarrow v = \frac{6\text{m} - 3\text{m}}{3\text{s}} \Rightarrow v = 1\text{m/s}$$

Η περίοδος του κύματος είναι

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{1,2}{1} \text{s} = 1,2\text{s}$$

Από τη φάση ($10\pi \text{ rad}$) του Ο τη στιγμή t_2 παίρνουμε

$$\varphi_0 = \omega t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{10\pi}{\frac{2\pi}{1,2}} \text{s} = 6\text{s}$$

γ. Η χρονική στιγμή t_1 είναι $t_1 = t_2 - 3\text{s} = 3\text{s}$. Τη στιγμή αυτή το Ο έχει εκτελέσει

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{3\text{s}}{1,2\text{s}} = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}$$

και επειδή στο ίδιο χρονικό διάστημα έχει διανύσει μήκος διαδρομής 4m, το πλάτος είναι

$$s = 2,5 \cdot 4\text{A} = 10\text{A} \Rightarrow \text{A} = \frac{4\text{m}}{10} = 0,4\text{m}$$

Ο λόγος της ταχύτητας διάδοσης του κύματος προς τη μέγιστη ταχύτητα της πηγής είναι

$$\frac{v}{v_{\max}} = \frac{\frac{\lambda}{T}}{\frac{2\pi}{T} \text{A}} \Rightarrow \frac{v}{v_{\max}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{1,2} 0,4} \Rightarrow \frac{v}{v_{\max}} = \frac{1,5}{\pi}$$

δ. Βρίσκουμε τις απομακρύνσεις των δύο σημείων τη στιγμή $t_1 = 3\text{s}$:

$$y_K = \text{A}\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow y_K = 0,4\eta\mu 2\pi \left(\frac{3}{1,2} - \frac{0,3}{1,2} \right) (\text{m}) = 0,4\eta\mu 4,5\pi (\text{m}) \Rightarrow y_K = 0,4\text{m}$$

$$y_o = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_o}{\lambda}\right) \Rightarrow y_o = 0,4\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{1,2}\right)(m) = 0,4\eta\mu 5\pi(m) \Rightarrow y_o = 0m$$

Η απόσταση των δύο σημείων προκύπτει από το πυθαγόρειο θεώρημα

$$d = \sqrt{y_k^2 + x_k^2} = \sqrt{(0,4m)^2 + (0,3m)^2} = 0,5m$$

10.Δ.23

α. Από την εξίσωση ταλάντωσης του Ο βρίσκουμε:

$$A = 0,2m, \quad \omega = \pi \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} \text{s} = 2\text{s}$$

Το μήκος κύματος είναι $\lambda = vT = 4 \cdot 2m = 8m$.

Ένα υλικό σημείο που εκτελεί α.α.τ. χωρίς αρχική φάση φτάνει για 2^η φορά στην ακραία θετική του απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $\frac{T}{4} + T$, οπότε αν με t_k συμβολίσουμε τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο Κ έχουμε

$$t_1 = t_k + \frac{5T}{4} \Rightarrow t_k = t_1 - \frac{5T}{4} \Rightarrow t_k = 5,75\text{s} - \frac{5 \cdot 2}{4}\text{s} \Rightarrow t_k = 3,25\text{s}$$

Η θέση του σημείου Κ είναι

$$x_k = -vt_k = -4 \cdot 3,25m \Rightarrow x_k = -13m$$

β. Η φάση του σημείου Κ γίνεται $3\pi/2$ rad τη στιγμή

$$\varphi_k = 2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x_k}{\lambda} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = 2\pi \frac{t}{2} - 2\pi \frac{(-13)}{8} \Rightarrow t = \frac{19}{4}\text{s}$$

Η επιτάχυνση του σημείου Ο αυτή τη στιγμή είναι

$$\alpha_o = -\omega^2 y_o = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - 0\right) \Rightarrow \alpha_o = -(\pi)^2 \cdot 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{19}{4 \cdot 2}\right)(\text{S.I.}) \Rightarrow$$

$$\alpha_o = -2\eta\mu 4,75\pi (\text{S.I.}) \Rightarrow \alpha_o = -\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

γ. Αφού το Κ είναι σε ακραία θέση τα άλλα σημεία μεταξύ του Ο και του Κ που έχουν μηδενική ταχύτητα τη στιγμή αυτή θα είναι όλα τα σημεία που είναι συμφασικά και αντιφασικά με το Κ, οπότε βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_1 = x_K + \lambda = -13\text{m} + 8\text{m} = -5\text{m}$$

$$x_2 = x_K + \frac{\lambda}{2} = -13\text{m} + 4\text{m} = -9\text{m}$$

$$x_3 = x_K + \frac{3\lambda}{2} = -13\text{m} + 12\text{m} = -1\text{m}$$

Η μέγιστη απόσταση στην οποία έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή 4,75s είναι

$$x_{\max} = -vt_2 = -4 \cdot 4,75\text{m} = -19\text{m}$$

Ο αριθμός των κυματικών εικόνων θα είναι

$$N = \frac{|x_{\max}|}{\lambda} = \frac{19\text{m}}{8\text{m}} = 2,375$$

Η εξίσωση που παριστάνουμε στο στιγμιότυπο είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

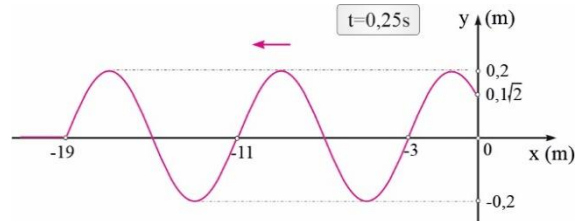
$$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2,375 + \frac{x}{8}\right) \text{ (S.I.)}$$

Το σημείο $x=0\text{m}$ τη στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση

$$y_0 = 0,2\eta\mu 2\pi(2,375) \text{ (S.I.)} = 0,2\eta\mu 4,75\pi \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

$$y_0 = 0,1\sqrt{2}\text{m}$$

Οπότε το στιγμιότυπο θα είναι όπως στο σχήμα.



δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Ο τη στιγμή $t_2=4,75\text{s}$, αν θεωρηθεί υλικό σημείο μάζας $\Delta m=2\text{gr}$, είναι

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -\Delta m \cdot \omega^2 y_0 \cdot v = -\Delta m \cdot \omega^2 \cdot y_0 \cdot \omega \cdot A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\Delta m \cdot \omega^3 \cdot y_0 \cdot A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -2 \cdot 10^{-3} \cdot (\pi)^3 \cdot 0,1\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{4,75}{2} + 0\right) \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (\pi)^3 \cdot 0,1\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (SI)} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ J/s}$$

10.Δ.24

α. Από την εξίσωση του κύματος βρίσκουμε:

$$A = 0,5\text{m}, \omega = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} \text{s} = 0,25\text{s}, \lambda = 0,5\text{m}$$

Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{0,5\text{m}}{0,25\text{s}} = 2\text{m/s}$$

Το σημείο που έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_1 = 11/16 \text{ s}$ βρίσκεται στη θέση

$$x = vt_1 = 2 \cdot \frac{11}{16} \text{m} = 1,375\text{m}$$

β. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα $u = 2\pi \text{ m/s}$ βρίσκεται από την Α.Δ.Ε.Τ.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{\omega^2A^2 - v^2}{\omega^2}} \Rightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(8\pi)^2(0,5)^2 - (2\pi)^2}{(8\pi)^2}} \text{m} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \text{m}$$

Ένα υλικό σημείο που εκτελεί α.α.τ. έχει θετική ταχύτητα και επιταχύνεται όταν βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς, οπότε $y_K = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{m}$.

γ. Το κύμα τη στιγμή t_1 έχει φτάσει μέχρι τα 1,375m, άρα ψάχνουμε τα συμφασικά με το Κ σημεία που θα ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\left. \begin{cases} x = x_K \pm k\lambda \\ 0\text{m} \leq x \leq 1,375\text{m} \end{cases} \right\} k = 1, x_1 = \frac{7}{16}\text{m} + \frac{1}{2}\text{m} = \frac{15}{16}\text{m}$$

Η εξίσωση ταχύτητας - θέσης των σημείων του μέσου την ίδια στιγμή είναι

$$v = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow v = 4\pi \sin 2\pi \left(4 \cdot \frac{11}{16} - 2x \right) \text{ (S.I.)} \Rightarrow v = 4\pi \sin 2\pi (2,75 - 2x) \text{ (S.I.)}$$

Η μέγιστη απόσταση στην οποία έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή t_1 είναι 1,375m.

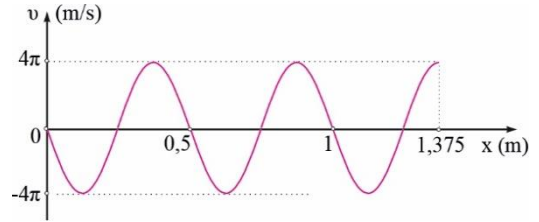
Ο αριθμός των κυματικών εικόνων θα είναι

$$N = \frac{x_{\max}}{\lambda} = \frac{1,375\text{m}}{0,5\text{m}} = 2,75$$

Το σημείο $x=0\text{m}$ τη στιγμή t_2 έχει ταχύτητα

$$v_0 = 4\pi \sin 2\pi(2,75 - 2x) = 4\pi \sin 5,5\pi \text{ (S.I.)} \Rightarrow v_0 = 0\text{m/s}$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



δ. Τα μόρια του μέσου έχουν υποδιπλάσια μέγιστη επιτάχυνση και διπλάσιο πλάτος σε σχέση με το αρχικό κύμα, οπότε έχουμε

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha'_{\max}} = \frac{\omega^2 A}{\omega'^2 2A} \Rightarrow 2 = \frac{\omega^2}{2\omega'^2} \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{2} = 4\pi \text{ rad/s}$$

Το μέσο είναι ίδιο, η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια, οπότε το νέο μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{\frac{\omega'}{2\pi}} \Rightarrow \lambda' = \frac{2\pi \cdot 2}{4\pi} \text{m} = 1\text{m}$$

Άρα η εξίσωση της ταχύτητας - χρόνου των διαφόρων σημείων του μέσου είναι

$$v = \omega' A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T'} - \frac{x}{\lambda'}\right) \Rightarrow v = 4\pi \cdot 2 \cdot 0,5 \sin 2\pi(2t - x) \Rightarrow v = 4\pi \sin 2\pi(2t - x) \text{ (S.I.)}$$

10.Α.25

α. Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{8\text{m}}{4\text{s}} = 2\text{m/s}$$

Οι χρόνοι άφιξης του κύματος στα διάφορα σημεία του μέσου είναι:

$$t_M = \frac{x_M}{v} \Rightarrow t_M = \frac{\frac{3\lambda}{4}}{v} \Rightarrow t_M = \frac{3\lambda}{4v} \Rightarrow t_M = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 2} \text{s} = 3\text{s}$$

$$t_K = \frac{x_K}{v} \Rightarrow t_K = \frac{\frac{3\lambda}{2}}{v} \Rightarrow t_K = \frac{3\lambda}{2v} \Rightarrow t_K = \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 2} \text{s} = 6\text{s}$$

$$t_A = \frac{x_A}{v} \Rightarrow t_A = \frac{2\lambda}{v} \Rightarrow t_A = \frac{2 \cdot 8}{2} \text{s} = 8\text{s}$$

β. Τη στιγμή $t_1=2T=8\text{s}$ το σημείο M έχει εκτελέσει

$$N_M = \frac{\Delta t}{T} = \frac{t_1 - t_M}{T} \Rightarrow N_M = \frac{8\text{s} - 3\text{s}}{4\text{s}} = 1,25 \text{ ταλαντώσεις,}$$

άρα έχει διαγράψει διάστημα

$$s_M = 1,25 \cdot 4A = 5A = 5 \cdot 0,1\text{m} = 0,5\text{m}$$

Το σημείο Κ έχει εκτελέσει

$$N_K = \frac{\Delta t}{T} = \frac{t_1 - t_K}{T} \Rightarrow N_K = \frac{8s - 6s}{4s} = 0,5 \text{ ταλάντωση}$$

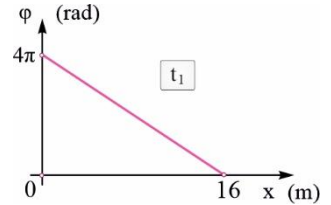
άρα έχει διαγράψει διάστημα

$$s_K = 0,5 \cdot 4A = 2A = 2 \cdot 0,1m = 0,2m$$

γ. Η εξίσωση της φάσης συναρτήσει της θέσης των σημείων για τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi = 2\pi\left(\frac{8}{4} - \frac{x}{8}\right) \Rightarrow \varphi = 4\pi - \frac{\pi x}{4} \text{ (S.I.)}, 0m \leq x \leq 16m$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

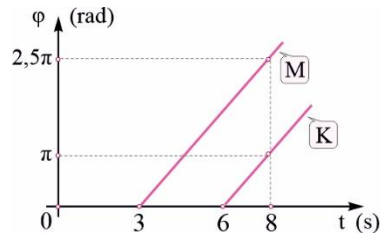


δ. Οι εξισώσεις φάσης - χρόνου για τα σημεία Μ και Κ, από τη χρονική στιγμή $t=0s$ μέχρι τη στιγμή t_1 είναι:

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{4} - 0,75\right) \text{ (S.I.)}, 3s \leq t \leq 8s$$

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{4} - 1,5\right) \text{ (S.I.)}, 6s \leq t \leq 8s$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις είναι όπως στο σχήμα.



ε. Η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στα δύο σημεία θα είναι όταν βρίσκονται στην ίδια απομάκρυνση με αντίθετες ταχύτητες. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$d_{\min} = x_A - x_M = 2\lambda - \frac{3\lambda}{4} = \frac{5\lambda}{4} = 10m$$

Εξισώνουμε τις απομακρύνσεις των δύο σημείων και έχουμε

$$y_M = y_A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_M = A\eta\mu\varphi_A \Rightarrow \eta\mu(\varphi_A + 2,5\pi) = \eta\mu\varphi_A \Rightarrow \text{συν}\varphi_A = \eta\mu\varphi_A \Rightarrow \epsilon\varphi\varphi_A = 1 = \epsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\varphi_A = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Το χρονικό διάστημα μετά την t_1 που συμβαίνει για πρώτη φορά είναι

$$(1), k = 0: \varphi_A = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \Rightarrow \omega\Delta t = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{4 \cdot \frac{2\pi}{4}} \text{ s} = 0,5s$$

Άρα η χρονική στιγμή που συμβαίνει για πρώτη φορά είναι

$$t = t_1 + 0,5s = 8,5s$$

Επικαιροποιήθηκε 15-3-2026