## Λύσεις κριτηρίου 36

**ΘΕΜΑ Α**

**Α**1.α **Α**2.γ **Α**3.γ **Α**4.δ **Α**5. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** (**ii**)

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας από το σημείο εκτόξευσης μέχρι το δάπεδο:

$$\frac{mgh}{2}+\frac{1}{2}m\ {}_{o}^{2}=\frac{1}{2}\quad {}_{1}^{2}\Rightarrow\ {}_{1}=\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική το σφαιρίδιο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου από το δάπεδο.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας από το σημείο εκτόξευσης μέχρι την οροφή:

$$\frac{1}{2}m\ {}_{o}^{2}=\frac{1}{2}\quad {}_{2}^{2}+\frac{mgh}{2}\Rightarrow\ {}_{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική το σφαιρίδιο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου από την οροφή.

Για τη μέση τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα από το δάπεδο ισχύει:

$$N_1-mg=\frac{2m\ {}_{1}}{2}\quad (1)$$

Για τη μέση τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα από την οροφή ισχύει:

$$N_2+mg=\frac{2m\ {}_{2}}{\Delta t}\quad (2)$$

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{N_1-mg}{N_2+mg}=\frac{\frac{2m\ {}_{1}}{2}}{\frac{2m\ {}_{2}}{\Delta t}}=1\Rightarrow\quad {}_{2}=$$

Άρα το πηλίκο των δυνάμεων είναι: $\frac{N_1}{N_2}=3$

**Β2.** (**ii**)

Ο αριθμός των σημείων ενισχυτικής συμβολής ανάμεσα από τις δύο πηγές είναι:

$$x-(d-x)=N\ \Rightarrow\quad =\frac{N}{2}+\frac{}{2}\ ,\quad 0<x<d\Rightarrow -5{,}5<N<5{,}5$$

Άρα, ανάμεσα στις δύο πηγές υπάρχουν 11 σημεία ενίσχυσης, συμπεριλαμβανομένου και αυτού της μεσοκαθέτου. Όμως η κάθε υπερβολή τέμνει την περιφέρεια του κύκλου σε δύο σημεία, ένα πάνω και ένα κάτω από την ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές. Συνεπώς πάνω στην περιφέρεια του κύκλου θα υπάρχουν συνολικά 22 σημεία ενισχυτικής συμβολής.

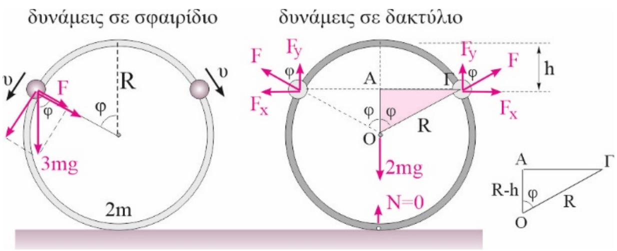
**Β3.** (**i**)

Επειδή κάθε χάντρα κάνει κυκλική κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων στην ακτινική διεύθυνση να δημιουργεί την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη. Στην αρχή και όσο η ταχύτητα είναι μικρή, η κεντρομόλος δύναμη που απαιτείται είναι μικρή και καλύπτεται από την ακτινική συνιστώσα του βάρους, οπότε η δύναμη F είναι αντίρροπη της κεντρομόλου δύναμης. Με την αύξηση της ταχύτητας της κάθε χάντρας και τη μείωση της ακτινικής συνιστώσας του βάρους, κάποια στιγμή η F αλλάζει φορά και κατευθύνεται προς το κέντρο του δακτυλίου για δημιουργήσει την απαραίτητη κεντρομόλο, όπως δείχνεται στο σχήμα.

Για τη συνισταμένη των δυνάμεων στην ακτινική διεύθυνση θα ισχύει:

$$F + 3mg \quad = \quad \frac{\upsilon^2}{R} \quad (\;)$$

Στον δακτύλιο ασκούνται οι αντιδράσεις της F, το βάρος του και η δύναμη Ν από το δάπεδο:




Ο δακτύλιος θα χάσει την επαφή με το δάπεδο (Ν=0) όταν οι δύο κατακόρυφες συνιστώσες των F γίνουν ίσες με το βάρος του δακτυλίου

$$2F_\psi = 2mg \Rightarrow F_\psi = mg \Rightarrow F \quad = \quad (\;)$$

Έστω ότι ο δακτύλιος χάνει την επαφή όταν οι χάντρες έχουν κινηθεί κατακόρυφα κατά h από την αρχική θέση που αφέθηκαν ελεύθερες. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{R - h}{R} \Rightarrow h = R - R\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων έχουμε:

$$3mgh = \frac{1}{2}3m\;^2 \Rightarrow \;^2 = \quad = \quad ( \quad - \quad ) \quad (\;)$$

Με αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1) έχουμε:

$$9 \quad {}^{2} - \quad + \quad =$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι Δ=0, άρα υπάρχει μία διπλή ρίζα: $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Από το στιγμιότυπο βλέπουμε ότι το πλάτος ταλάντωσης των σημείων είναι A=0,4m ενώ για το μήκος κύματος ισχύει ότι:

$$\frac{3}{2} = 0,3\text{m} \Rightarrow \quad =$$

Το στιγμιότυπο αντιστοιχεί στη στιγμή:

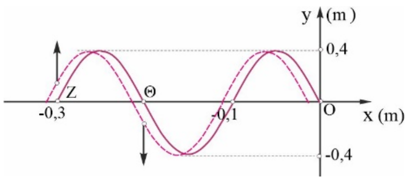
$$t_1 = \frac{3T}{2} \Rightarrow T = \frac{2t_1}{3} = \frac{1,2}{3}\ \text{s} = 0,4\ \text{s} \Rightarrow f = 2,5\text{Hz}$$

Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $\upsilon = \lambda \cdot f = 0,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Η εξίσωση του τρέχοντος κύματος είναι:

$$y = 0,4 \quad ( \quad + \quad ) = \quad ( \quad + \quad )( \quad )$$

Για τη φορά κίνησης των σημείων Ζ και Θ κάνουμε ένα στιγμιότυπο μετά από dt και βλέπουμε από το σχήμα ότι τη δεδομένη χρονική στιγμή το σημείο Ζ έχει φορά κίνησης προς τα πάνω και το Θ φορά κίνησης προς τα κάτω.




**Γ2.** Για να κάνουμε το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t_2$=0,5s μηδενίζουμε πρώτα την φάση του κύματος για να βρούμε το πιο απομακρυσμένο σημείο του μέσου στο οποίο έχει φθάσει η κυματική διαταραχή αυτή τη στιγμή:

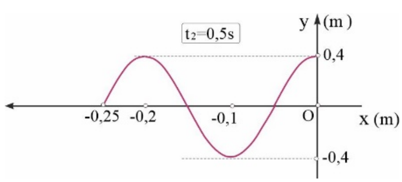
$$\varphi = 5\pi 0,5 + 10\pi x = 0 \Rightarrow x = -0,25\text{m}$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο περιγράφεται από τη σχέση

$$y = 0,4 \quad ( \quad + \ x)( \quad )$$

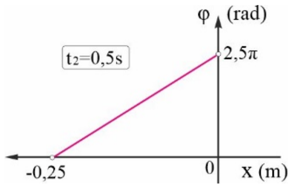
Βρίσκουμε τον αριθμό των κυματικών εικόνων:

$$N = \frac{|x|}{\lambda} = \frac{0,25\text{m}}{0,2\text{m}} = 1,25 \Rightarrow N = 1 + \frac{1}{4}$$




Άρα το στιγμιότυπο είναι όπως στο σχήμα.

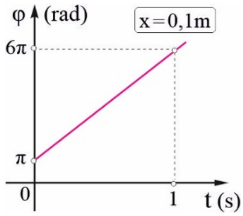
**Γ3.i.** Η γραφική παράσταση της φάσης ταλάντωσης των διάφορων σημείων του υλικού μέσου σε συνάρτηση με τη θέση τους x την $t_2$=0,5s είναι:




$$\varphi = 2,5\pi + 10\pi x \,(\text{S.I.})$$

**Γ3.ii.** Η φάση ταλάντωσης ενός σημείου του υλικού μέσου με x=0,1m σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι: $\varphi = 5\pi t + \pi\,(\text{S.I.})$

η οποία μας πληροφορεί ότι την t=0 που το κύμα φθάνει στην αρχή το υλικό σημείο με x=0,1m βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κινείται προς τα αρνητικά αφού έχει φάση ταλάντωσης π rad. Επίσης το σημείο αυτό είχε ξεκινήσει να ταλαντώνεται 0,2 sec πριν το σημείο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα x=0.




**Γ4.** Για τη διαφορά φάσης της ταλάντωσης δύο σημείων ισχύει ότι:

$$\varphi_1 = 5\pi t + 10\pi x_1 \quad , \quad \varphi_2 = 5\pi t + 10\pi x_2$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 10\pi (x_1 - x_2) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 10\pi\, \Delta x \qquad (1)$$

**i.** Δύο σημεία του μέσου που έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα και την ίδια απομάκρυνση παρουσιάζουν διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Άρα, $2 \quad = \quad \Rightarrow \quad = \quad = \quad \ldots$

**ii.** Δύο σημεία του μέσου που έχουν κάθε στιγμή αντίθετη ταχύτητα και αντίθετη απομάκρυνση παρουσιάζουν διαφορά φάσης περιττό πολλαπλάσιο του π. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων συμβαίνει όταν διέρχονται από τη θέση ισορροπίας και είναι ίση με:

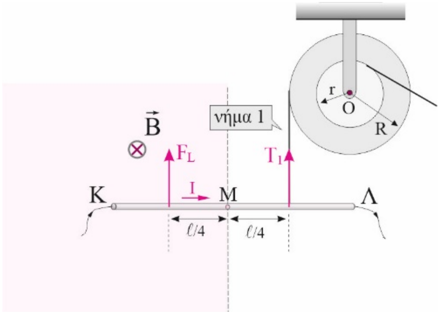
$$(2 \quad - \quad) \quad = \quad \Rightarrow \quad _{min} = \quad - \quad = \quad \ldots$$

**iii.** Η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης είναι 0,8m, οπότε η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων του μέσου που έχουν κάθε στιγμή αντίθετη ταχύτητα και αντίθετη απομάκρυνση προκύπτει από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\Delta x_{max} = \sqrt{0,64 + (0,2\kappa - 0,1)^2} \text{ με } \kappa = 1,2,3,\ldots..$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Επειδή ο αγωγός βρίσκεται κατά το ήμισυ μέσα στο μαγνητικό πεδίο η δύναμη Laplace θα ασκείται στο μέσο του τμήματος που είναι μέσα στο μαγνητικό πεδίο.




Ο αγωγός ισορροπεί άρα:

$$\Sigma F_{\psi} = 0 \Rightarrow T_1 + F_L = Mg \quad (1)$$

$$\Sigma\tau_{(M)} = 0 \Rightarrow \frac{F_L ?}{4} = \frac{{}_1 ?}{4} \Rightarrow T_1 = F_L \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$2 \ {}_1 = \quad \Rightarrow \ {}_1 = \frac{Mg}{2} =$$

Από την περιστροφική ισορροπία της διπλής τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(k)} = 0 \Rightarrow T_1 2r = T_2 r \Rightarrow T_2 = 2T_1 = 40N$$

Από την ισορροπία του $\Sigma_1$ έχουμε ότι:

$$T_2 = m_1 g \eta\mu\theta \Rightarrow m_1 = \frac{T_2}{g} = \frac{40}{} \ Kg \Rightarrow m_1 = 8Kg$$

Για να ισορροπεί η τροχαλία θα έχουμε:

$$F_x = T_{2x} = T_2 \quad {}^0 \Rightarrow \ {}_x = \sqrt{\ } \quad , \quad F_y = T_{2y} + \ {}_1 = \ {}_2 \quad {}^0 + \ {}_1 \Rightarrow \ {}_y =$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα για το μέτρο της δύναμης έχουμε:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1200 + 1600} = \sqrt{\ } \Rightarrow \ = \ \sqrt{\ }$$

και σχηματίζει γωνία με τον οριζόντιο άξονα ίση με: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**Δ2.** Βρίσκουμε την επιτάχυνση του $\Sigma_1$:

$$m_1 g \quad = \ {}_1\alpha \Rightarrow \alpha = \quad = \frac{5m}{s^2}$$

Η απόσταση που διανύει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι να συγκρουστεί είναι:

$S = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{5}{32}m$ , άρα $h = S \quad = \frac{5}{64}$

Από τη διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε την ταχύτητα του $\Sigma_1$ ελάχιστα πριν την κρούση.

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \frac{5}{4}\frac{m}{s}$$

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$m_1 \ {}_1 = ( \ {}_1 + \ {}_2 ) \ {}_k \Rightarrow \ {}_k = \ \frac{m}{s}$$

Βρίσκουμε την απόσταση της παλαιάς θέσης ισορροπίας από το φυσικό μήκος του ελατηρίου:

$$m_2 g \quad = \quad \Rightarrow \quad = \frac{m_2 g}{k} =$$

Βρίσκουμε την απόσταση της νέας θέσης ισορροπίας από το φυσικό μήκος του ελατηρίου:

$$(m_1 + m_2)g \quad = \quad {}_1 \Rightarrow \quad {}_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow \quad {}_1 =$$

Εφαρμόζουμε την  αρχή διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης:

$$\frac{1}{2}k \quad {}^2 = \frac{1}{2}( \quad {}_1 + \quad {}_2 ) {}^2_k + \frac{1}{2} \quad ( \quad {}_1 - \quad )^2 \Rightarrow \quad =$$

**Δ3.** Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά την κρούση είναι:

$$\frac{Q}{K_{αρχ}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1 \; {}_1^2 - \frac{1}{2}( \; {}_1 + \; {}_2) \; {}^2}{\frac{1}{2}m_1 \; {}_1^2}100\% \Rightarrow \frac{Q}{K_{αρχ}}100\% = 20\%$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$W_{ΣF} = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_κ^2 = -5J$$

**Δ4.** Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$υ = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Η επαγωγική τάση στα άκρα του αγωγού είναι: $E = \frac{B \boxed{?}}{2} (2)$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$E = \frac{B\sqrt{2gh}\boxed{?}}{2} \Rightarrow h = \frac{2E^2}{B^2 g \boxed{?}} \Rightarrow h = 0,8m$$

**Δ5.** Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φθάσει ο αγωγός στο έδαφος είναι:

$$Δt = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,4 \text{ s}$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα ο αγωγός κάνει μία πλήρη περιστροφή. Επειδή η δύναμη του βάρους που ασκείται στον αγωγό δεν δίνει ροπή, ο αγωγός θα κάνει ομαλή περιστροφική κίνηση με σταθερό ω. Άρα:

$$ω_o = \frac{Δφ}{Δt} = \frac{2π}{0,4}\frac{r}{s} = 5π \text{ rad / s}$$