

ΘΕΜΑ 1.1

Λύση

A. Είναι $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, για το πεδίο ορισμού της $f \circ f$, θα είναι

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, θα είναι $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \alpha(\alpha x + \beta) + \beta = \alpha^2 x + \beta(\alpha + 1).$$

Αφού $f(2) = -3$, έπεται ότι $2\alpha + \beta = -3$. Αφού $f(f(x)) = 16x - 15$, έπεται ότι

$$\alpha^2 x + \beta(\alpha + 1) = 16x - 15 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Το τελευταίο μπορεί να είναι αληθές αν και μόνο αν $\alpha^2 = 16$ και $\beta(\alpha + 1) = -15$. Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \alpha^2 = 16 \text{ και } \beta(\alpha + 1) = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \alpha = \pm 4 \text{ και } \beta(\alpha + 1) = -15 \end{cases}$$

- Αν $\alpha = 4$, τότε το σύστημα θα γίνει

$$\begin{cases} 8 + \beta = -3 \\ 5\beta = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -11 \\ \beta = -3 \end{cases}, \text{ το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, } \alpha \neq 4.$$

- Αν $\alpha = -4$, τότε το σύστημα θα γίνει

$$\begin{cases} -8 + \beta = -3 \\ -3\beta = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = 5.$$

Έτσι, προκύπτει τελικά ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 5$, οπότε $f(x) = -4x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- B. Για το D_g θα πρέπει να ισχύει $f(x) > 0$, επομένως $-4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$. Έπεται ότι $D_g = (-\infty, \frac{5}{4})$. Όμως, $D_f = \mathbb{R} \neq D_g$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού. Ωστόσο, αν $x \in D_g$, τότε $g(x) = e^{\ln f(x)} = f(x)$. Άρα, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο σύνολο D_g .

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$-\frac{\sqrt[3]{-y}}{2} + 1 = e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{\sqrt[3]{-y}}{2} \Leftrightarrow 1 > -\frac{y}{8} \Leftrightarrow y > -8.$$

Συμπεραίνουμε ότι $x = \ln\left(-\frac{\sqrt[3]{-y}}{2} + 1\right)$ για κάθε $-8 < y < 0$.

Προκύπτει τελικά ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} + 1\right), & x \geq 0 \\ \ln\left(-\frac{\sqrt[3]{-x}}{2} + 1\right), & -8 < x < 0 \end{cases}$$

Γ. Θα δείξουμε αρχικά ότι η συνάρτηση $f^{-1}(f(x) + \eta\mu x - x + \pi)$ ορίζεται για $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Πράγματι, για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$-\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2}, \text{ καθώς επίσης και } -1 \leq \eta\mu x \leq 1.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$-\frac{3\pi}{2} - 1 + \pi \leq \eta\mu x - x + \pi \leq 1 - \frac{\pi}{2} + \pi \text{ και άρα } -\frac{\pi}{2} - 1 \leq \eta\mu x - x + \pi.$$

Επιπλέον, για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι $e^x - 1 > 0$, οπότε και $(e^x - 1)^3 > 0$ συνεπώς,

$$f(x) > 0 \text{ στο } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Έτσι, για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$f(x) + \eta\mu x - x + \pi > -\frac{\pi}{2} - 1 > -8$$

Επομένως, για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $f(x) + \eta\mu x - x + \pi \in (-8, +\infty)$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}(f(x) + \eta\mu x - x + \pi)$.

Αφού $f(0)=0$, η ανίσωση για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f^{-1}(f(x) + \eta\mu x - x + \pi) - x > 0$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(f(x) + \eta\mu x - x + \pi) > x \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(f(x) + \eta\mu x - x + \pi)) > f(x)$$

$$\stackrel{f(f^{-1}(x))=x}{\Rightarrow} f(x) + \eta\mu x - x + \pi > f(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \pi > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x - x + \pi$ για $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

με $x_1 < x_2$. Τότε, επειδή $\eta\mu x \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, προκύπτει ότι

$$\eta\mu x_1 > \eta\mu x_2. \quad (1)$$

Επίσης,

$$-x_1 > -x_2. \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2), προκύπτει ότι $\eta\mu x_1 - x_1 > \eta\mu x_2 - x_2$, επομένως

$$\eta\mu x_1 - x_1 + \pi > \eta\mu x_2 - x_2 + \pi \Rightarrow h(x_1) > h(x_2),$$

απ' όπου έπεται ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$h(\pi) = \eta\mu\pi - \pi + \pi = 0$$

Έτσι, η αρχική ανίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\eta\mu x - x + \pi > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(\pi) \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} \frac{\pi}{2} \leq x < \pi.$$

Δ. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$(2e^x + x - 4)^3 > -8 \Leftrightarrow 2e^x + x - 4 > -2$$

$$\Leftrightarrow 2e^x + x > 2 \Leftrightarrow 2(e^x - 1) + x > 0$$

Η τελευταία όμως ισχύει για κάθε $x > 0$, καθώς έχουμε ότι $e^x > 1$, δηλαδή $e^x - 1 > 0$. Επομένως, η συνάρτηση $f^{-1}\left((2e^x + x - 4)^3\right)$ ορίζεται για $x > 0$.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left(2e^x + x - 4\right)^3\right) - 2 = 0 &\Leftrightarrow f^{-1}\left(\left(2e^x + x - 4\right)^3\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow \left(2e^x + x - 4\right)^3 = f(2) \Leftrightarrow \left(2e^x + x - 4\right)^3 = \left(2e^2 - 2\right)^3 \\ &\Leftrightarrow 2e^x + x - 4 = 2e^2 - 2 \Rightarrow 2e^x + x - 2e^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2e^x + x - 2e^2 - 2$ για $x > 0$. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \quad (3)$$

Τότε, θα είναι

$$e^{x_1} < e^{x_2}, \quad (4)$$

καθώς η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη, λαμβάνουμε ότι

$$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Rightarrow e^{x_1} + x_1 - 2e^2 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2e^2 - 2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα είναι «1-1» σε αυτό το διάστημα. Η δοσμένη εξίσωση όμως γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2e^x + x - 2e^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(2)$$

$$\Leftrightarrow x = 2, \text{ που ολοκληρώνει τη λύση.}$$

ΘΕΜΑ 1.4

Λύση

A. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 8) = 16$.

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16.$$

B. Η αρχική ανίσωση ισοδύναμα γράφεται στη μορφή

$$2x^2 + 4x \leq f(x) \leq x^3 + 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 16 \leq f(x) - 16 \leq x^3 - 8.$$

• Για $x > 2$, διαιρούμε την παραπάνω ανίσωση με $x - 2 > 0$. Τότε,

$$\frac{2x^2 + 4x - 16}{x - 2} \leq \frac{f(x) - 16}{x - 2} \leq \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 + 4x - 16}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 + 2x - 8)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x+4) = 12.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x + 4) = 12.\end{aligned}$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12.$$

- Για $x < 2$, διαιρούμε την παραπάνω ανίσωση με $x - 2 < 0$. Τότε αλλάζει η φορά της και γράφεται στη μορφή

$$\frac{2x^2 + 4x - 16}{x - 2} \geq \frac{f(x) - 16}{x - 2} \geq \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

Για ευκολία ξαναγράφουμε την ίδια ανίσωση, αυτήν τη φορά από τα δεξιά προς τ' αριστερά:

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} \leq \frac{f(x) - 16}{x - 2} \leq \frac{2x^2 + 4x - 16}{x - 2}.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 + 4x - 16}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x^2 + 2x - 8)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x-2)(x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2(x+4) = 12.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x + 4) = 12.\end{aligned}$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12.$$

Από την ισότητα των δύο πλευρικών ορίων προκύπτει λοιπόν ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12.$$

- Γ. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (9 - f(x)) = 9 - 16 = -7 < 0$, επομένως ισχύει $9 - f(x) < 0$ για x κοντά στο 2. Άρα θα είναι $|9 - f(x)| = f(x) - 9$ για x κοντά στο 2. Έτσι,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|9 - f(x)| - 7}{\sqrt{4x + 1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 9 - 7}{\sqrt{4x + 1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{\sqrt{4x + 1} - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - 16}{(\sqrt{4x + 1} - 3)(\sqrt{4x + 1} + 3)} (\sqrt{4x + 1} + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{4x + 1 - 9} (\sqrt{4x + 1} + 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{4x - 8} (\sqrt{4x + 1} + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4} \frac{f(x) - 16}{x - 2} (\sqrt{4x + 1} + 3) = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 6 = 18. \end{aligned}$$

- Δ. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sin(f(x) - 16)}{32 - 2f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(\sin(f(x) - 16) - 1)}{-2(f(x) - 16)}.$$

Θέτουμε $u = f(x) - 16$. Τότε, καθώς $x \rightarrow 2$, ισχύει

$$u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 16) = 0.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(\sin(f(x) - 16) - 1)}{-2(f(x) - 16)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin u - 1}{2u} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1 - \sin u}{u} = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα στο τέλος της σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

Ε. Ισχύει ότι $f(x) \geq 2x^2 + 4x$ για κάθε $x \geq -2$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Επομένως, αφού η f είναι ακόμη μεγαλύτερη από το $2x^2 + 4x$, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Θέτουμε $u = f(x)$. Τότε, καθώς $x \rightarrow +\infty$, θα ισχύει

$$u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Έτσι, θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x) + 5}{f^5(x) + 2f^2(x) - 3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5f^2(x)}{f(x) - 2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5u^2}{u - 2}\right).$$

Για u κοντά στο $+\infty$, ισχύει ότι

$$\left| \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5u^2}{u - 2}\right) \right| \leq \left| \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \right|,$$

συνεπώς,

$$-\left| \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \right| \leq \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5u^2}{u - 2}\right) \leq \left| \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \right|.$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^2} = 0,$$

άρα ισχύει και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{u^3 + 5}{u^5 + 2u^2 - 3} \right| = 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x) + 5}{f^5(x) + 2f^2(x) - 3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5f^2(x)}{f(x) - 2}\right) = 0.$$

ΘΕΜΑ 1.5**Λύση**

A. Για $x=0$, έχουμε $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(4) = 84$, άρα το σημείο τομής της $C_{f \circ f}$ με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $A(0,84)$.

B. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε, ισχύει

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3. \quad (1)$$

Επίσης

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 + 4 < 4x_2 + 4 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη, παίρνουμε ότι

$$x_1^3 + 4x_1 + 4 < x_2^3 + 4x_2 + 4 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε και «1-1». Άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Άρα, για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(y) \end{cases}, x \in \mathbb{R} \cap f(\mathbb{R}).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο \mathbb{R} , το σύνολο τιμών της f δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

όπου ο υπολογισμός των ορίων στο δεύτερο βήμα έγινε ως εξής:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$

Έτσι, το σύστημα ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} \cap f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y - x = f(x) - f(y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y + f(y) = x + f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ h(y) = h(x) \end{cases} \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε $h(x) = x + f(x)$. Θα αποδείξουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα και «1-1». Πράγματι, αν $x_1 < x_2$, τότε από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, είναι άμεσο ότι

$$x_1 + f(x_1) < x_2 + f(x_2) \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Έτσι, το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} y = f(x) \\ h(y) = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

απ' όπου έπεται ότι $f(x) = x$. Όμως η εξίσωση $f(x) = x$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 4x + 4 = x \Leftrightarrow x^3 + 3x + 4 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + 3x + 4$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(-1) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε, ισχύει ότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3, \quad (3)$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 4 < 3x_2 + 4. \quad (4)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3), (4) κατά μέλη, παίρνουμε

$$x_1^3 + 3x_1 + 4 < x_2^3 + 3x_2 + 4 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2),$$

οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Είναι λοιπόν και «1-1», οπότε η προφανής ρίζα $x_0 = -1$ είναι και η μοναδική. Επομένως, το σημείο τομής των δύο καμπυλών θα είναι το $\boxed{B(-1, -1)}$.

Γ. Επειδή η συνάρτηση f είναι «1-1», έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f\left(f\left(2^{|x|+5} - 8^{|x|-1}\right) + 2x - 1\right) &= f(2x + 3) \Leftrightarrow f\left(2^{|x|+5} - 8^{|x|-1}\right) + 2x - 1 = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow f\left(2^{|x|+5} - 8^{|x|-1}\right) = 4 \Leftrightarrow f\left(2^{|x|+5} - 8^{|x|-1}\right) = f(0). \end{aligned}$$

Όμως, η f είναι «1-1», οπότε η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2^{|x|+5} - 8^{|x|-1} = 0 \Leftrightarrow 2^{|x|+5} = 8^{|x|-1} \Leftrightarrow 2^{|x|+5} = (2^3)^{|x|-1} \Leftrightarrow 2^{|x|+5} = 2^{3|x|-3}.$$

Εφόσον η εκθετική συνάρτηση 2^x είναι επίσης «1-1», η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$|x| + 5 = 3|x| - 3 \Leftrightarrow 2|x| = 8 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 4.}$$

Δ. Ισχύει $f(4) = 84$, οπότε $f^{-1}(84) = 4$. Συνεπώς,

$$f^{-1}(84) > f(f(x^2 - 8) - 9) \Leftrightarrow 4 > f(f(x^2 - 8) - 9) \stackrel{f(0)=4}{\Leftrightarrow} f(0) > f(f(x^2 - 8) - 9).$$

Η f όμως είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η τελευταία ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} 0 > f(x^2 - 8) - 9 &\Leftrightarrow 9 > f(x^2 - 8) \stackrel{f(1)=9}{\Leftrightarrow} f(1) > f(x^2 - 8). \\ &\stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \quad \boxed{\Leftrightarrow -3 < x < 3.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 1.6

Λύση

A. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ δίνεται από τις συνθήκες

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \frac{1}{3-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3.$$

Έτσι, θα έχουμε $D_{g \circ f} = (-\infty, 3)$. Για κάθε $x < 3$ ισχύει

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\frac{1}{3-x}\right) + 1 = 1 - \ln(3-x).$$

B. Για κάθε $x \in (-\infty, 3)$ ισχύει

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{3-x}\right) + 1 = 1 - \ln(3-x).$$

Θα δείξουμε ότι η h είναι «1-1». Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$ για τα οποία ισχύει ότι $h(x_1) = h(x_2)$. Τότε, ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} 1 - \ln(3-x_1) &= 1 - \ln(3-x_2) \Leftrightarrow \ln(3-x_1) = \ln(3-x_2) \\ &\stackrel{\ln:1-1}{\Leftrightarrow} 3-x_1 = 3-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

άρα η h είναι «1-1» στο $(-\infty, 3)$. Συνεπώς, η h αντιστρέφεται. Για να προσδιο-

ρίσουμε την αντίστροφη της, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y = h(x)$ ως προς x . Για κάθε $x < 3$ ισχύει η ισοδυναμία

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = 1 - \ln(3 - x) \Leftrightarrow \ln(3 - x) = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = e^{1-y} \Leftrightarrow x = 3 - e^{1-y}.$$

Πρέπει όμως να ισχύει $3 - e^{1-y} = x < 3$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $e^{1-y} > 0$. Αυτό όμως ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το \mathbb{R} . Σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει

$$h^{-1}(x) = 3 - e^{1-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ. i. Το όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^{1-x}).$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $u = 1 - x$. Καθώς $x \rightarrow -\infty$, είναι $u \rightarrow +\infty$ και το όριο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (3 - e^u) = -\infty.$$

ii. Το όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - e^{1-x}).$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $u = 1 - x$. Καθώς $x \rightarrow +\infty$, είναι $u \rightarrow -\infty$ και το όριο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (3 - e^u) = 3 - 0 = 3.$$

iii. Το όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + \ln(x^2 - 3x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \ln(3 - x) + \ln(x^2 - 3x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \ln \left(\frac{x^2 - 3x}{3 - x} \right) \right).$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{3 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty,$$

οπότε, κάνοντας την αντικατάσταση $u = \frac{x^2 - 3x}{3 - x}$, έχουμε ότι $u \rightarrow +\infty$, καθώς

$x \rightarrow -\infty$. Το όριο γράφεται λοιπόν ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \ln \left(\frac{x^2 - 3x}{3 - x} \right) \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 + \ln u) = +\infty.$$

ΘΕΜΑ 1.7

Λύση

A. Αφού η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Επομένως,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad (1)$$

Όμως:

- $f(0) = 0 + \alpha = \alpha$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \alpha$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-x} + \ln(x+1)) = -1 + \ln(0+1) = -1$.

Έτσι, θα πρέπει λόγω της σχέσης (1) να ισχύει $\alpha = -1$.

B. Αφού $\alpha = -1$, ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ -e^{-x} + \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Θεωρούμε $x_1, x_2 \leq 0$, για τα οποία $x_1 < x_2$. Ισχύει ότι $x_1 - 1 < x_2 - 1$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(0, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Ισχύει

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 < -x_2 \xrightarrow{e^x} e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1} < -e^{-x_2}, \quad (2)$$

όπως επίσης και η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \xrightarrow{\ln x} \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1). \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (2), (3) κατά μέλη βρίσκουμε $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επιπλέον, επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} . Αν θεωρήσουμε $x_1 < 0 < x_2$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, προκύπτει ότι $f(x_1) < f(0)$ και, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, θα είναι και $f(0) < f(x_2)$. Ισχύει δηλαδή $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Γ. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R},$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x} + \ln(x+1))$.

Για τον πρώτο όρο κάνουμε την αντικατάσταση $u = -x$. Καθώς $x \rightarrow +\infty$, θα ισχύει $u \rightarrow -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$. Για τον δεύτερο όρο ισχύει προφανώς ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1)) = +\infty$.

Το όριο ισούται λοιπόν τελικά με

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x} + \ln(x+1)) = +\infty.$$

Δ. Για $x > 0$, η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ως

$$\begin{aligned} e^x \ln(x+1) = 1 + 3e^x &\stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln(x+1) = e^{-x} + 3 \\ &\Leftrightarrow -e^{-x} + \ln(x+1) = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, θα ισχύει ότι

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, +\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$ λόγω της συνέχειας της f στο $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, όπως υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Ισχύει $3 \in f((0, +\infty)) = (-1, +\infty)$, άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$.

Αυτό το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 1.8

Λύση

A. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε θα ισχύουν και οι σχέσεις

$$\bullet f^5(x_1) = f^5(x_2) \text{ και άρα } 2f^5(x_1) = 2f^5(x_2) \quad (1)$$

$$\bullet f^3(x_1) = f^3(x_2) \text{ και άρα } 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2) \quad (2)$$

$$\bullet \text{Ισχύει επίσης } 4f(x_1) = 4f(x_2) \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) κατά μέλη, έχουμε

$$2x_1 + 4 = 2x_2 + 4 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2,$$

συνεπώς $x_1 = x_2$, άρα η f είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της, οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο $A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Για τον τύπο της αντίστροφης χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Έτσι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θα είναι

$$2y^5 + 2y^3 + 4y = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = 2y^5 + 2y^3 + 4y - 4$$

$$\Leftrightarrow x = y^5 + y^3 + 2y - 2.$$

Επομένως,

$$f^{-1}(x) = x^5 + x^3 + 2x - 2, x \in \mathbb{R}.$$

B. Δείχνουμε αρχικά ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$, ισχύει ότι:

$$y_1^5 < y_2^5 \quad (4)$$

$$y_1^3 < y_2^3 \quad (5)$$

$$2y_1 < 2y_2 \quad (6)$$

Προσθέτοντας τις (4), (5), (6) κατά μέλη, έχουμε

$$y_1^5 + y_1^3 + 2y_1 < y_2^5 + y_2^3 + 2y_2 \stackrel{+(-2)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Επομένως, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Θα δείξουμε τώρα ότι και η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \stackrel{f^{-1} \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Γ. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2f^5(x) + 2f^3(x) + 4f(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow 2f(x)(f^4(x) + f^2(x) + 2) = 2x + 4.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^4(x) + f^2(x) + 2 > 0.$$

Για $x = 1$, η δοσμένη ισότητα μας δίνει ότι

$$2f(1)(f^4(1) + f^2(1) + 2) = 6 > 0$$

και, επειδή $f^4(1) + f^2(1) + 2 > 0$, θα πρέπει $f(1) > 0$. Για $x = -3$, η δοσμένη ισότητα μας δίνει ότι

$$2f(-3)(f^4(-3) + f^2(-3) + 2) = -2 < 0$$

και, επειδή $f^4(-3) + f^2(-3) + 2 > 0$, θα πρέπει $f(-3) < 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-3, 1]$.
- $f(-3)f(1) < 0$.

Από το **θεώρημα Bolzano**, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-3,1)$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 1.9

Λύση

A. Από το γράφημα είναι άμεσο ότι $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.

B. i. Από το γράφημα προκύπτει ότι

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Επιπλέον, $f(x) > 0$ για x κοντά στο 0 , άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2024}{f(x)} \right) = +\infty.$$

ii. Από το γράφημα προκύπτει ότι

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$. Παρατηρούμε όμως ότι $f(x) > 0$ για $x \in (2,3)$ και $f(x) < 0$ για $x \in (3, +\infty)$. Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty,$$

άρα το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

iii. Με βάση το γράφημα, βλέπουμε ότι

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$, επομένως θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} = 0$. Έτσι, είναι άμεσο ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sigmaυνx + 3}{f(x)} = 0$, καθώς

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sigmaυνx + 3) = 3 + \sigmaυν(-2) \in \mathbb{R}.$$

iv. Με βάση το γράφημα, βλέπουμε ότι

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-1+x) = 3$, γιατί, αν θέσουμε $u = x-1$, τότε, καθώς $x \rightarrow 0^+$, θα είναι $u \rightarrow (-1)^+$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-1+x) = \lim_{u \rightarrow -1^+} f(u) = 3$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-1-x) = -1$, γιατί, αν θέσουμε $u = -x-1$, τότε, καθώς $x \rightarrow 0^+$, θα είναι $u \rightarrow (-1)^-$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-1-x) = \lim_{u \rightarrow -1^-} f(u) = -1$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(-1+x) + f(-1-x) - 2] = 0.$$

Επίσης,

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-1+x) = -1$, γιατί, αν θέσουμε $u = x-1$, τότε, καθώς $x \rightarrow 0^-$, θα είναι $u \rightarrow (-1)^-$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-1+x) = \lim_{u \rightarrow -1^-} f(u) = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-1-x) = 3$, γιατί, αν θέσουμε $u = -x-1$, τότε, καθώς $x \rightarrow 0^-$, θα είναι $u \rightarrow (-1)^+$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-1-x) = \lim_{u \rightarrow -1^+} f(u) = 3$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(-1+x) + f(-1-x) - 2] = 0$, συνεπώς, αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} [f(-1+x) + f(-1-x) - 2] = 0$.

Γ. Για κάθε $x \neq 0$, αν διαιρέσουμε τη δοσμένη ισότητα με x^5 , θα έχουμε

$$\frac{g^5(x)}{x^5} + \frac{\sigmaυνx - 1}{x} \cdot \frac{g^4(x)}{x^4} + \frac{\eta\mu^2x}{x^2} \cdot \frac{g^3(x)}{x^3} + \frac{\eta\mu^3x}{x^3} \cdot \frac{g^2(x)}{x^2} + \frac{\eta\mu^5x}{x^5} = f(x),$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)^5 + \frac{\sigmaυνx - 1}{x} \cdot \left(\frac{g(x)}{x}\right)^4 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{g(x)}{x}\right)^3 + \frac{\eta\mu^3x}{x^3} \cdot \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^5 = f(x). \quad (1)$$

Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \kappa \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, όπως δείξαμε στο **Ερώτημα (Bi)**.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις στο τέλος της **σελ. 53** του σχολικού βιβλίου.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x / x) = 1$, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις στο τέλος της **σελ. 53** του σχολικού βιβλίου.

Με βάση αυτές τις τρεις παρατηρήσεις και παίρνοντας όρια στη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \kappa^5 + \kappa^3 + \kappa^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow \kappa^3(\kappa^2 + 1) + \kappa^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\kappa^3 + 1)(\kappa^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^3 + 1 = 0 \text{ ή } \kappa^2 + 1 = 0 \text{ (αδύνατη)} \\ &\Leftrightarrow \kappa = -1. \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = -1$.

Δ. Αφού το $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ υπάρχει, θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x). \quad (4)$$

Για κάθε $x \in [2, 3)$ ισχύει ότι $f(x) > 0$, επομένως μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών χωρίς να αλλάξουμε τη φορά: Αυτό μας δίνει

$$g(x) + 1 \geq f(x)(3x^2 + 4),$$

δηλαδή $g(x) \geq f(x)(3x^2 + 4) - 1$. Υπενθυμίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$. Εφόσον το $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ υπάρχει στο \mathbb{R} , έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow 3^-} [(3x^2 + 4)f(x) - 1] = -1, \quad (3)$$

οπότε και $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \geq -1$. Για κάθε $x \in (3, +\infty)$ ισχύει $f(x) < 0$ και, επομένως, για να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά. Αυτό μας δίνει

$$g(x)+1 \leq f(x)(3x^2+4)$$

δηλαδή $g(x) \leq f(x)(3x^2+4) - 1$. Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$ και το $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ υπάρχει στο \mathbb{R} , παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 3^+} [(3x^2+4)f(x) - 1] = -1 \quad (4)$$

Από τις (2), (3), (4) προκύπτει ότι $-1 \geq \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \geq -1$, άρα τελικά $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -1$.

ΘΕΜΑ 1.10

Λύση

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x) = f(x) - \ln(x-1)$, $x \in (1,3]$. Ισχύουν τότε τα εξής:

- $T(3) = f(3) - \ln 2 = -3^6 - 27 + 2 - \ln 2 < 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^6 - 3x + 2 - \ln(x-1))$.

Παρατηρούμε όμως θέτοντας $u = x - 1$, ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty,$$

άρα το παραπάνω όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^6 - 3x + 2 - \ln(x-1)) = +\infty.$$

Εφόσον λοιπόν $\lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = +\infty$, προκύπτει ότι υπάρχει $\alpha > 1$, κοντά στο 1, έτσι ώστε $T(\alpha) > 0$.

Η T είναι συνεχής στο $[\alpha, 3]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, $T(\alpha)T(3) < 0$. Από το **θεώρημα Bolzano** προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 3) \subset (1, 3)$, για το οποίο ισχύει $T(x_0) = 0$, όπως θέλαμε.

B. Ισχύει ότι

- $f(0) = 2$,
- $f(2) = -2^6 - 6 + 2 = -64 - 4 = -68$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και επιπλέον $f(2) < \eta = -10 < f(0)$, άρα από το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.)** υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, έτσι ώστε

$$f(\xi) = -10.$$

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - (x-3)\ln(2-x)$, $x \in [-2, 1]$. Η φ είναι συνεχής στα υποδιαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 1]$. Θα βρούμε τώρα το πρόσημο των $\varphi(-2), \varphi(0), \varphi(1)$ με σκοπό να εφαρμόσουμε στη συνέχεια το **θεώρημα Bolzano**.

Ισχύει

$$\varphi(-2) = f(-2) + 5 \ln 4 = -(-2)^6 - 3(-2) + 2 + 5 \ln 4 = -56 + 5 \ln 4.$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι αρνητικός. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} \varphi(-2) < 0 &\Leftrightarrow -56 + 5 \ln 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow \ln 4 < \frac{56}{5} \Leftrightarrow 4 < e^{\frac{56}{5}} \quad \text{ή} \quad e^{11,2} \quad \text{ή} \quad \ln 4 < e^{\frac{56}{5}} < e^{12} \end{aligned}$$

που είναι προφανώς αληθής. Επίσης,

$$\varphi(0) = f(0) + 3 \ln 2 = 2 + 3 \ln 2 > 0.$$

Τέλος, ισχύει

$$\varphi(1) = f(1) = -2 < 0$$

- Αφού $\varphi(-2)\varphi(0) < 0$, έπεται από το **θεώρημα Bolzano** ότι υπάρχει $x_1 \in (-2, 0)$, έτσι ώστε $\varphi(x_1) = 0$.
- Αφού $\varphi(0)\varphi(1) < 0$, έπεται από το **θεώρημα Bolzano** ότι υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, έτσι ώστε $\varphi(x_2) = 0$.

Έτσι, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\ln(2-x) = f(x)$ θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-2, 1)$.

ΘΕΜΑ 1.11

Λύση

A. Για $\kappa = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^{-2} + \frac{x^{-2}}{2}, & x > 0 \\ (-x)^3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2x^2}, & x > 0 \\ -x^3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ρητή. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $x_1^2 < x_2^2$ και, συνεπώς,

$$\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2} \Rightarrow \frac{3}{2x_1^2} > \frac{3}{2x_2^2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας προκύπτει ότι

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty),$$

όπου τα όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2x^2} = +\infty.$

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $(-\infty, 0)$. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 < -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Συνεπώς, λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας, ισχύει για το σύνολο τιμών ότι

$$f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty),$$

όπου για τον υπολογισμό των ορίων στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} -x^3 = 0$.

Τέλος, ισχύει $f(0) = 0$. Άρα προκύπτει τελικά ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \cup \{0\} = [0, +\infty)$.

B. Για $\kappa = 0$, επειδή από το **Ερώτημα A** έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Επομένως, δεν ισχύουν οι **προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano** στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\right]$.

Γ. Για $\kappa = 1$ και $x > 0$ έχουμε $f(x) = \frac{1}{x} \sin(\pi x) + \frac{1}{2x}$. Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, έχουμε:

- $f(1) = 1 \sin(\pi) + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$
- $f(2) = \frac{1}{2} \sin(2\pi) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > 0.$

Καθότι $f(1)f(2) < 0$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1,2) \subseteq (0,\pi)$.

Δ. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$, θα πρέπει να ισχύει

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Εξετάζουμε καθένα από τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{k-2} \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{x^{k-2}}{2} \right)$. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

▶ Αν $\kappa = 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sigma\upsilon\nu(2\pi x) + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$.

▶ Αν $\kappa > 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{k-2} \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{x^{k-2}}{2} \right)$.

Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο όριο είναι ίσο με μηδέν. Για κάθε $x > 0$ προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα ότι

$$\left| x^{k-2} \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{x^{k-2}}{2} \right| \leq x^{k-2} + \frac{x^{k-2}}{2},$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται ως

$$-\left(x^{k-2} + \frac{x^{k-2}}{2} \right) \leq \left(x^{k-2} \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{x^{k-2}}{2} \right) \leq x^{k-2} + \frac{x^{k-2}}{2}.$$

όμως,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{k-2} + \frac{x^{k-2}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\left(x^{k-2} + \frac{x^{k-2}}{2} \right) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{k-2} \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{x^{k-2}}{2} \right) = 0, \text{ όπως θέλαμε.}$$

▶ Αν $\kappa < 2$, τότε έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{k-2} \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{x^{k-2}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{k-2} \left(\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{1}{2} \right) = +\infty,$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{k-2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x) + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$.

Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\nu} = +\infty$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ αλλά όχι στην περίπτωση όπου το ν είναι θετικός ρητός ή θετικός άρρητος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, γράφουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\nu \ln x}}$. Στη συνέχεια, κάνουμε την αντικατάσταση $y = \nu \ln x$ οπότε ισχύει $y \rightarrow -\infty$ καθώς $x \rightarrow 0^+$. Το παραπάνω όριο γράφεται λοιπόν ως $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-y} = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^{3-\kappa}$. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- ▶ Αν $\kappa = 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^{3-3} = 1$.
- ▶ Αν $\kappa > 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(-x)^{\kappa-3}} = +\infty$.
- ▶ Αν $\kappa < 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

Έτσι λοιπόν, συνοψίζοντας, οι κοινές τιμές του κ ώστε να ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ είναι οι $\kappa \in (2, 3)$.

ΘΕΜΑ 1.12

Λύση

A. Αφού η γραφική παράσταση της g δεν τέμνει το άνω ημικύκλιο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$, προκύπτει $g(x) \neq \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Συνεπώς, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, έπεται ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1, 1]$. Για να βρούμε το πρόσημο της f , θα βρούμε το πρόσημο του $f(0)$ χρησιμοποιώντας το όριο της υπόθεσης.

Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(g(0)-1)x^7 + \sqrt{-x} + 3}{x^3 + e^x}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(g(0)-1)x^7 + \sqrt{-x} + 3}{x^3 + e^x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 \left[(g(0)-1) + \frac{\sqrt{-x}}{x^7} + \frac{3}{x^7} \right]}{x^3 \left[1 + \frac{1}{x^3} e^x \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \frac{\left[(g(0)-1) + \frac{\sqrt{-x}}{x^7} + \frac{3}{x^7} \right]}{\left[1 + \frac{1}{x^3} e^x \right]} \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε τους επιμέρους όρους ξεχωριστά. Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} \cdot e^x \right) = 1 + 0 \cdot 0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^7} = 0$$

και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{-(-x)^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x}{(-x)^{14}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{1}{x^{13}}} = 0.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[(g(0)-1) + \frac{\sqrt{-x}}{x^7} + \frac{3}{x^7} \right]}{\left[1 + \frac{1}{x^3} e^x \right]} = g(0) - 1.$$

- Αν ήταν $g(0) < 1$, τότε θα ήταν

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 \left[(g(0)-1) + \frac{\sqrt{-x}}{x^7} + \frac{3}{x^7} \right]}{x^3 \left[1 + \frac{1}{x^3} e^x \right]} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \frac{\left[(g(0)-1) + \frac{\sqrt{-x}}{x^7} + \frac{3}{x^7} \right]}{\left[1 + \frac{1}{x^3} e^x \right]} \\ &= (+\infty) \cdot (g(0) - 1) = -\infty, \text{ άτοπο. Άρα } g(0) \geq 1. \end{aligned}$$

- Αν ήταν $g(0) = 1$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(g(0)-1)x^7 + \sqrt{-x} + 3}{x^3 + e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x} + 3}{x^3 + e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{-x}}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3} e^x} \right).$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{-(-x)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x}{(-x)^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{1}{x^2}} = 0,$$

οπότε έχουμε άμεσα ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{-x}}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3} e^x} \right) = 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα πρέπει να ισχύει $g(0) > 1$, συνεπώς $1 - g(0) < 0$. Προκύπτει ότι $f(0) = 1 - g(0) < 0$, άρα, λόγω της διατήρησης προσήμου, έπεται ότι

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

- Β. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, έπεται από το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής** ότι έχει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M . Με άλλα λόγια, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [-1,1]$, έτσι ώστε

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq M = f(x_2)$$

για κάθε $x \in [-1,1]$. Αφού όμως $m < f(-1) < M$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x_1 \neq -1$ και $x_2 \neq -1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $-1 < x_1 < x_2 \leq 1$. Τότε,

$$f(x_1) < \eta = f(-1) < f(x_2).$$

Επομένως, η f ικανοποιεί τις **προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών** στο $[x_1, x_2]$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, έτσι ώστε $f(x_0) = f(-1)$. Καθώς όμως $x_0 > x_1 > -1$, αυτό θα σημαίνει ότι η f δεν θα είναι «1-1». Ομοίως και στην περίπτωση όπου $x_2 < x_1 \leq 1$.

- Γ. Για $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}.$$

Η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών. Επιπλέον, από την υπόθεση έχουμε ότι $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Από το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής**, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, έτσι ώστε

$$\varphi(x_1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_2)$$

για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ορίζουμε $\rho_1 = \varphi(x_1)$. Τότε, επειδή $\varphi(x_1) > 0$, θα είναι και $\rho_1 > 0$ και έτσι $\rho_2 \geq \rho_1$, γιατί το ρ_2 είναι η μέγιστη τιμή της φ . Άρα

$$\rho_1 \leq \varphi(x) \leq \rho_2$$

για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, επομένως,

$$\rho_1 \leq f(x) + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq \rho_2,$$

δηλαδή

$$\rho_1 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq f(x) \leq \rho_2 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

ΘΕΜΑ 1.13

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$.

Τότε, η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 1)$, καθώς η f είναι συνεχής. Ομοίως, η h είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως σταθερή. Επιπλέον, η h είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, καθώς

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x).$$

Επομένως, η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Προκειμένου να ικανοποιηθεί το ζητούμενο της άσκησης, θα πρέπει να υπάρχουν $0 < \alpha < \beta < 1$, έτσι ώστε

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \\ f(\alpha) = \beta - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \\ \beta = \alpha + f(\alpha) \end{cases}.$$

Επομένως, είναι αρκετό να υπάρχει $\alpha \in (0, 1)$ το οποίο να είναι λύση της εξίσωσης $f(\alpha) = f(\alpha + f(\alpha))$. Αφού $f(0) = f(1) = 0$, η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, θα υπάρχει λόγω του **Θ.Μ.Ε.Τ.** σημείο $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = \max_{x \in [0, 1]} f(x) = M > 0.$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $T(x) = x + f(x) - x_0$ για $x \in [0, 1]$. Τότε,

$$T(0) = 0 + f(0) - x_0 = -x_0 < 0$$

και

$$T(x_0) = x_0 + M - x_0 = M > 0.$$

Επομένως, από το **θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $x_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο, ώστε $T(x_1) = 0$, δηλαδή

$$x_1 + f(x_1) = x_0.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = h(x + f(x)) - f(x)$. Η g είναι καλά ορισμένη στο $[0, 1]$ και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} g(x_1) &= h(x_1 + f(x_1)) - f(x_1) = h(x_0) - f(x_1) \\ &= f(x_0) - f(x_1) = M - f(x_1) \geq 0, \end{aligned}$$

όπου στην 3η ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h(x) = f(x)$ για $x \in [0, 1]$.

Επίσης,

$$g(x_0) = h(x_0 + f(x_0)) - f(x_0) = h(x_0 + f(x_0)) - M.$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $0 < x_0 + f(x_0) < 1$, τότε $h(x_0 + f(x_0)) = f(x_0 + f(x_0)) \leq M$, οπότε $g(x_0) \leq 0$.
- Αν $x_0 + f(x_0) \geq 1$, τότε $h(x_0 + f(x_0)) = 0 \leq M$, οπότε και πάλι $g(x_0) \leq 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση θα έχουμε ότι $g(x_1)g(x_0) \leq 0$.

- Αν $g(x_1)g(x_0) < 0$, από το **θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $\alpha \in (x_1, x_0)$ για το οποίο να ισχύει ότι $g(\alpha) = 0$.
- Αν $g(x_1)g(x_0) = 0$, τότε θα ισχύει ότι $g(x_1) = 0$ ή $g(x_0) = 0$, οπότε $\alpha = x_1$ ή $\alpha = x_0$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\alpha \in [x_1, x_0]$ για το οποίο $g(\alpha) = 0$. Τότε όμως $h(\alpha + f(\alpha)) = f(\alpha)$. Αλλά επειδή $f(\alpha) > 0$ από υπόθεση, θα είναι και $h(\alpha + f(\alpha)) > 0$, άρα υποχρεωτικά $\alpha + f(\alpha) > 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(\alpha + f(\alpha)) = f(\alpha + f(\alpha))$ και έτσι $f(\alpha + f(\alpha)) = f(\alpha)$, που είναι το ζητούμενο.