ΘΕΜΑ 2.1
Λύση

Α. Παρατηρούμε ότι $f(-1)=2$ και $f(1)=1+2e\neq f(-1)$, οπότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.

Β. Αρχικά, η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- Για $x>0$, ισχύει $f'(x)=\left(e^{x+1}+x^2\right)'=e^{x+1}\cdot(x+1)'+2x=e^{x+1}+2x.$
- Για $x<0$, ισχύει $f'(x)=\left(x^2+ex+e\right)'=2x+e.$

Για το $x_0=0$, ελέγχουμε την ύπαρξη της παραγώγου με τον ορισμό. Το δεξί πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+ex}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+e)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+e)=e.$$

Το αριστερό πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x+1}+x^2-e}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^-}\left(e^{x+1}+2x\right)=e,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=e=e^{0+1}+2\cdot 0$. Άρα

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}e^{x+1}+2x, & x\leq 0\\ 2x+e, & x>0\end{cases}.}$$

Παρατηρούμε ότι η f' είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+e)=e$$

Και

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{x+1}+2x\right)=e=f'(0),$$

άρα η f' είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε θα είναι $\boxed{\text{συνεχής σε όλο το } \mathbb{R}.}$

Γ. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, με

$$f''(x)=\left(e^{x+1}+2x\right)'=e^{x+1}+2>0$$

για κάθε $x<0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$f''(x)=(2x+e)'=2>0 \text{ για κάθε } x>0 .$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και στο $(0,+\infty)$. Επειδή όμως η f' είναι συνεχής και στο $x_0=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα η $\boxed{f \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.}$

Δ. **i.** Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y=f'(0)(x-0)+f(0)=ex+e.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η C_f θα είναι «πάνω» από την ευθεία (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής. Ισχύει δηλαδή $f(x)>ex+e$ για κάθε $x\neq 0$ και $f(x)=ex+e$ μόνο για $x=0$. Επομένως, η εξίσωση $f(x)-e=ex$ έχει ως μοναδική ρίζα τη $\boxed{x=0.}$

ii. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f\left(e^{x^2}\right)+f\left(x^2+1\right)=2f(1) \Leftrightarrow \left(f\left(e^{x^2}\right)-f(1)\right)+\left(f\left(x^2+1\right)-f(1)\right)=0. \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο προσθετέοι είναι μη αρνητικοί και μηδενίζονται μόνο για $x=0$, οπότε αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Είναι $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα, επειδή $e^x \nearrow \mathbb{R}$, έπεται ότι $e^{x^2}\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Προκύπτει λοιπόν ότι $f\left(e^{x^2}\right)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, καθώς $e^{x^2},1\in[0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, η ισότητα $f\left(e^{x^2}\right)\geq f(1)$ ισχύει αν και μόνο αν $e^{x^2}=1$, δηλαδή αν και μόνο αν $x=0$.

Επίσης, $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επομένως, επειδή $x^2+1\geq 1$, θα ισχύει $f\left(x^2+1\right)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, καθώς $1, x^2+1\in[0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Η ισότητα $f\left(x^2+1\right)\geq f(1)$ ισχύει αν και μόνο αν $x^2+1=1$, δηλαδή αν και μόνο αν $x^2=0$.

Προκύπτει λοιπόν ότι και οι δύο προσθετέοι της εξίσωσης (1) είναι μη αρνητικοί και μηδενίζονται μόνο για $x=0$. Έτσι, η εξίσωση (1) θα έχει ως μοναδική ρίζα τον αριθμό $\boxed{x=0.}$

ΘΕΜΑ 2.2
Λύση

Α. Η συνάρτηση $h = g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $D_h = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) \in R \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως, $D_h = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\ln\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)} = \frac{1+x^2}{2x}, \quad x > 0.$$

Β. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$h'(x) = \left(\frac{1+x^2}{x}\right)' = \frac{(1+x^2)' \cdot x - (1+x^2) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Για $x > 0$ ισχύει η ισοδυναμία $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$.

Ομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $h'(x) < 0$ για $x \in (0,1)$ και ότι $h'(x) = 0$ για $x = 1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ την τιμή

$$h(1) = \frac{1^2 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Πράγματι, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και επομένως, αν $x \in (0,1]$, τότε $h(x) \geq h(1)$, ενώ, αν $x \geq 1$, τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και επομένως $h(x) \geq h(1)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $h(x) \geq h(0)$.

Επομένως, ισχύει ότι $\boxed{h(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.}$

Γ. Αφού $\pi > e$ και η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, θα ισχύει ότι

$$\pi > e \Rightarrow h(\pi) > h(e) \Rightarrow \frac{1+\pi^2}{2\pi} > \frac{1+e^2}{2e} \Rightarrow \frac{1+\pi^2}{1+e^2} > \frac{2\pi}{2e}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\pi^2}{1+e^2} > \frac{\pi}{e}, \quad \text{όπως θέλαμε.}$$

Δ. **i.** Ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{h(x)-1} = +\infty,$$

καθώς για τον αριθμητή ισχύει $\lim_{x\to 1}(x^3+1) = 2 > 0$ και για τον παρονομαστή ισχύει $\lim_{x\to 1}(h(x)-1) = 0$ και $h(x) \geq 1$ (με ισότητα μόνο για $x=1$), όπως έχουμε δείξει στο Ερώτημα Β.

ii. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2xh(x)} - \sqrt{4x^2+8}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x\frac{1+x^2}{2x}} - \sqrt{4x^2+8}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+8}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{4+\frac{8}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{4+\frac{8}{x^2}}\right) \boxed{= -\infty,}$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{4+\frac{8}{x^2}}\right) = \sqrt{1} - \sqrt{4} = -1 < 0.$$

ΘΕΜΑ 2.3
Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+3) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το πρόσημο της f', όπως και η μονοτονία της f, φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=0$. Πράγματι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και επομένως, αν $x\le 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και επομένως $f(x)\ge f(0)$. Συνεπώς, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge f(0)$.

B. Ισχύει

$$f''(x)=\frac{12(x^2+3)^2-12x\cdot 2(x^2+3)\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^4}=\frac{12(x^2+3)^2-24x(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{12(x^2+3)^2-48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\frac{12(x^2+3)\left((x^2+3)-4x^2\right)}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{12(3-3x^2)}{(x^2+3)^3}=\frac{36(1-x^2)}{(x^2+3)^2}.$$

Όπως ίσχυε και με την f', ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, το πρόσημο της f'' είναι το ίδιο με το πρόσημο του αριθμητή $1-x^2$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$1-x^2>0\Leftrightarrow 1>x^2\Leftrightarrow \sqrt{1}>\sqrt{x^2}\Leftrightarrow 1>|x|\Leftrightarrow |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1.$$

Συνεπώς, η $f''(x)$ είναι θετική για $x\in(-1,1)$, αρνητική για $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, ενώ μηδενίζεται στα σημεία -1 και 1. Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτά στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$		$\frown$

- Η f είναι κυρτή στο $[-1,1]$ και κοίλη σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.
- Η γραφική παράσταση C_f παρουσιάζει σημεία καμπής τα $A(-1,f(-1))$, $B(1,f(1))$ και για τις τεταγμένες αυτών των σημείων ισχύει

$$f(-1)=\frac{2(-1)^2}{(-1)^2+3}=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f(1)=\frac{2}{1+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Γ. Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$, άρα έχει νόημα να αναζητήσουμε μόνο οριζόντιες/πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Ισχύει

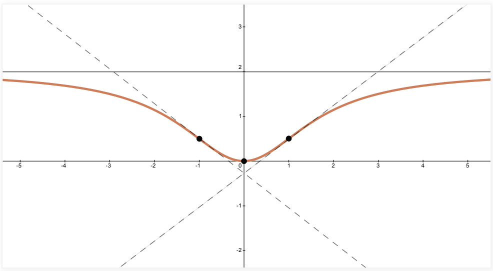
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2,$$

η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Ομοίως, επειδή

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2,$$

η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Δ. Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Με κόκκινο χρώμα έχουμε σημειώσει τα δύο σημεία καμπής. Όπως γνωρίζουμε, οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία καμπής της τη διαπερνούν. Αυτό φαίνεται επίσης στο σχήμα.



ΘΕΜΑ 2.4
Λύση

Α. Έχουμε ότι $f(x^3)=x^3-\frac{1}{x^3}$ για κάθε $x\neq 0$. Θέτουμε $y=x^3$. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $y\neq 0$ και επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x^3)=x^3-\frac{1}{x^3}\Leftrightarrow f(y)=y-\frac{1}{y}, \text{ για κάθε } y\neq 0.$$

Επιπλέον, η ποσότητα x^3 λαμβάνει όλες τις μη μηδενικές πραγματικές τιμές ενόσω το x διατρέχει το $\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε με τυπική αλλαγή μεταβλητής προκύπτει ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=x-\frac{1}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.

Αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Αν, για παράδειγμα, αντί για $y=x^3$ είχαμε $y=x^2$, η οποία παίρνει μόνο όλες τις μη αρνητικές τιμές, τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι $f(x)=x-\frac{1}{x}$ για κάθε $x\geq 0$, αλλά δεν θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το $f(x)$ για $x<0$!

Β. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 0$ και ισχύει $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\neq 0$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Επομένως, η f δεν έχει ακρότατα.

Γ. Ισχύει $f'(1)=2$ και $f(1)=1-\frac{1}{1}=0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,0)$ είναι η

$$(\varepsilon): y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow y=2x-2.$$

Δ. Ισχύει

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(g(x))}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(x^3)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu(x^3)\cdot\frac{1}{f(x)}\right).$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$$\left|\frac{\eta\mu(x^3)}{f(x)}\right|\leq\frac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|}\leq\frac{\eta\mu(x^3)}{f(x)}\leq\frac{1}{|f(x)|} \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)=(+\infty-0)=+\infty,$$

οπότε θα είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=\frac{1}{+\infty}=0$. Επομένως, από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu(x^3)\cdot\frac{1}{f(x)}\right)=0.}$$

ΘΕΜΑ 2.5
Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων, με

$$f'(x)=ce^{-x}+c(x+1)e^{-x}(-x)'=ce^{-x}-c(x+1)e^{-x}$$
$$=ce^{-x}(1-x-1)=-cxe^{-x}.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-1,0]$, οπότε στην παραπάνω σχέση ισχύει $x\leq 0$. Προφανώς ισχύει επίσης $e^{-x}>0$. Άρα παρατηρούμε ότι, αν $c>0$, τότε το γινόμενο είναι μη αρνητικό, με ισότητα μόνο για $x=0$. Είναι λοιπόν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$, με ισότητα μόνο για $x=0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η f είναι πράγματι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα στη σελ. 135 του σχολικού βιβλίου. Θυμηθείτε ότι αρκεί η παράγωγος να είναι θετική στο εσωτερικό του διαστήματος, αν η f είναι συνεχής σε όλο το διάστημα. Εδώ αυτό ισχύει.

Αν $c<0$, τότε το γινόμενο είναι αρνητικό ή μηδέν, με ισότητα και πάλι μόνο για $x=0$. Ισχύει οπότε $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$, με ισότητα μόνο για $x=0$. Σε αυτήν λοιπόν την περίπτωση, η f είναι γνησίως φθίνουσα και όχι γνησίως αύξουσα.

Τέλος, αν $c=0$, τότε ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x\in[-1,0]$, οπότε η f είναι σταθερή και όχι γνησίως αύξουσα. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα όταν $\boxed{c>0}$ και μόνο τότε.

Β. Για κάθε $c>0$ ισχύει ότι $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$, αλλά, όπως εξηγήσαμε και στο Ερώτημα Α, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Σε αυτήν την περίπτωση, αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, θα είναι

$$f([-1,0])=[f(-1),f(0)]=[0,c].$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x,\ x\in[-1,0]$. Τότε, η g είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών. Επιπλέον:

- $g(-1)=f(-1)-1=0-1<0,$
- $g(0)=f(0)+0=c+0=c>0.$

Έτσι, από το θεώρημα Bolzano, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in(-1,0)$, ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=-x_0$. Επιπρόσθετα, η g είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $[-1,0]$ ισχύει

$$g'(x)=f'(x)+1\geq 0+1>0.$$

Η g είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$ και επομένως $\boxed{\text{η ρίζα } x_0 \text{ είναι μοναδική.}}$

Γ. Η f' είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in[-1,0]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $[-1,0]$ ισχύει

$$\begin{aligned} f''(x)=\left(-cxe^{-x}\right)' &=-ce^{-x}-xce^{-x}(-x)' \\ &=-ce^{-x}+cxe^{-x}=ce^{-x}(x-1). \end{aligned}$$

Όμως, για κάθε $x\in[-1,0]$ είναι $(x-1)<0$ και επομένως για κάθε $c>0$ θα ισχύει ότι $f''(x)<0,$ άρα η f θα είναι κοίλη στο $[-1,0]$.

Δ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται στη μορφή

$$f(x)=x+1\Leftrightarrow c(x+1)e^{-x}=x+1\Leftrightarrow(x+1)\left(ce^{-x}-1\right)=0.$$

Επομένως, θα ισχύει

$$\begin{aligned} x+1=0 \quad \text{ή} \quad ce^{-x}-1=0 &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad e^{-x}=\frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad -x=\ln\left(\frac{1}{c}\right) \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=\ln c. \end{aligned}$$

Επειδή όμως, από την υπόθεση, η εξίσωση $f(x)=x+1$ έχει μοναδική ρίζα, θα πρέπει υποχρεωτικά αυτές οι δύο λύσεις να ταυτίζονται, δηλαδή να ισχύει

$$\ln c=-1\Leftrightarrow c=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=\frac{1}{e}(x+1)e^{-x}$. Παρατηρούμε τώρα ότι $f(-1)=0$ και $f'(-1)=-\frac{1}{e}(-1)e^{1}=1,$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1,0)$ θα έχει εξίσωση

$$y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)=x+1.$$

Καθώς όμως η f είναι κοίλη στο $[-1,0]$, η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «κάτω» από την εξίσωση εφαπτομένης, με εξαίρεση ίσως το σημείο επαφής τους A, άρα $\boxed{f(x)\leq x+1 \text{ για κάθε } x\in[-1,0].}$

Σημείωση:

Ένας δεύτερος τρόπος να λύσουμε το Ερώτημα Δ είναι ο εξής: Είδαμε ότι για κάθε $x \in [-1,0]$ ισχύει $f(x)=\frac{1}{e}(x+1)e^{-x}=(x+1)e^{-x-1}$. Είναι $x \geq -1$, αρα $x+1 \geq 0$. Ισοδύναμα, $-x-1 \leq 0$, άρα $e^{-x-1} \leq e^0 = 1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$f(x)=(x+1)e^{-x-1} \leq (x+1)\cdot 1 = x+1.$$

ΘΕΜΑ 2.6
Λύση

Α. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής. Επομένως, αρχικά θα πρέπει

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) \Leftrightarrow \eta\mu\pi = \alpha\pi+\beta \Leftrightarrow \alpha\pi+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-\alpha\pi.$$

Επιπλέον, λόγω παραγωγισιμότητας θα είναι:

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$

- Το δεξί όριο μπορεί να γραφτεί ως

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu x}{x-\pi}=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ και επομένως από τον ορισμό της παραγώγου θα ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\eta\mu x-\eta\mu x_0}{x-x_0}=\sigma\upsilon\nu x_0$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εδώ χρησιμοποιήσαμε αυτόν τον ορισμό για $x_0=\pi$, γνωρίζοντας επίσης ότι $\eta\mu\pi=0$. Ένας άλλος τρόπος να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα θα ήταν φυσικά με χρήση του κανόνα De L' Hospital.

- Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\alpha x+\beta-\alpha\pi-\beta}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\alpha x-\alpha\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\alpha(x-\pi)}{x-\pi}=\alpha.$$

Από την ισότητα των πλευρικών ορίων προκύπτει ότι $\boxed{\alpha=-1}$ και επομένως $\boxed{\beta=-\alpha\pi=\pi.}$ Άρα ο τύπος της f θα είναι

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x, & x<\pi \\ -x+\pi, & x\geq\pi \end{cases}.$$

Β. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x,\ x\in(-\infty,\pi)$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$ ως βασική τριγωνομετρική συνάρτηση. Επιπλέον, η f είναι γνησίως φθίνουσα (γραμμική με αρνητικό συντελεστή κλίσης) και συνεχής στο $[\pi,+\infty)$ και επομένως

$$\boxed{f([\pi,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(\pi)\right]=(-\infty,0]}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\pi)=-\infty$ και $f(\pi)=-\pi+\pi=0.$

Γ. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi+1\right)$ και με το παραπάνω, διότι είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Επομένως, υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi+1\right)$, έτσι ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\pi+1)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi+1-\frac{\pi}{2}}=\frac{-(\pi+1)+\pi-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2\pi+2-\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi+2}.$$

Ισοδύναμα, $(\pi+2)f'(\xi)=-4$, όπως θέλαμε.

Δ. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x\geq\pi$ ισχύει $f(x)=-x+\pi$, επομένως πράγματι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα για $x\geq\pi$. Επιπλέον, για $0\leq x<\pi$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ f''(x)=-\eta\mu x.$

Παρατηρούμε ότι $f''(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi)$ και η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[0,\pi]$.

x	0	π
$f''(x)$	0	$-$
$f(x)$		$\frown$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $B(\pi, f(\pi))$ έχει εξίσωση

$$y = f'(\pi)(x-\pi) + f(\pi)$$

Από το Ερώτημα Α έχουμε $f'(\pi) = -1$ και $f(\pi) = 0$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y = -(x-\pi) = -x + \pi$$

Αφού όμως η f είναι κοίλη στο $[0,\pi]$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα είναι «κάτω» από την εξίσωση εφαπτομένης, με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως

$$f(x) \le -x + \pi \text{ για κάθε } x \in [0,\pi].$$

Έτσι, θα είναι $f(x) \le -x + \pi$ για κάθε $x \ge 0$ και η ισότητα ισχύει για κάθε $x \ge \pi$.

ΘΕΜΑ 2.7
Λύση

Α. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$, τότε $f(-1) = 2$, επομένως

$$\lambda(-1)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 2 \ \boxed{\Leftrightarrow \lambda = 1.}$$

Επιπλέον, λόγω συνέχειας θα είναι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = 0^3 + \mu \ \boxed{\Leftrightarrow \mu = 1.}$$

Β. Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων λ, μ που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \ge 0 \end{cases}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x$. Ομοίως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2$. Ελέγχουμε με τον ορισμό για το $x_0 = 0$:

- Το αριστερό πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

- Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^2=0.$$

Εφόσον τα πλευρικά όρια είναι ίσα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και ο τύπος της παραγώγου είναι ο εξής:

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 3x^2, & x\geq 0\end{cases}.}$$

Γ. Είναι $f'(-1)=2(-1)=-2$, $f(-1)=2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι

$$\boxed{y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)=-2(x+1)+2=-2x.}$$

Παρατηρούμε ότι η f' είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, γιατί στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι πολυωνυμική και επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'(0)=0.$$

- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$, με $f''(x)=2>0$. Αφού η f' είναι και συνεχής στο $x_0=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $(-\infty,0]$.

- Ομοίως, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f''(x)=6x>0$ για κάθε $x>0$. Αφού η f' είναι και συνεχής στο $x_0=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$.

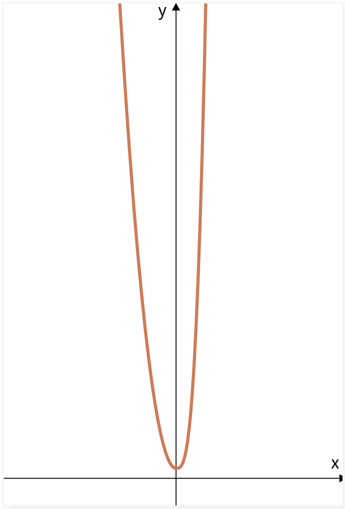
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η f' είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα από τα παραπάνω προκύπτει ότι θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

> Εδώ χρησιμοποιούμε για τη συνάρτηση f' το μέρος (iii) του θεωρήματος στη σελ. 144 του σχολικού βιβλίου. Γι' αυτό, είναι σημαντικό να έχουμε αιτιολογήσει ότι η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$

Έτσι, η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία της στο σημείο A, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Άρα η C_f και η ευθεία (ε) δεν έχουν άλλα κοινά σημεία, πέραν του σημείου A.

Δ. Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Από αυτήν τη γραφική παράσταση θα συμπεραίναμε ότι η f δεν είναι «1-1».

Για να αιτιολογήσουμε αυτό το συμπέρασμα αλγεβρικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $f(-1)=(-1)^2+1=2$ και $f(1)=1^3+1=2$. Επομένως, η f δεν είναι «1-1».



ΘΕΜΑ 2.8
Λύση

Α. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=0$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2-\alpha=e^{\alpha-1} \Leftrightarrow e^{\alpha-1}+\alpha-2=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x-1}+x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=e^{x-1}+1>0.$$

Έτσι, η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1» σε αυτό. Η εξίσωση τότε ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$e^{\alpha-1}+\alpha-2=0 \Leftrightarrow g(\alpha)=0 \overset{g(1)=0}{\Leftrightarrow} g(\alpha)=g(1) \overset{g:\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} \alpha=1.$$

Σημείωση:
Ένας ακόμη τρόπος να λύσουμε αυτό το ερώτημα είναι με τη χρήση της ανισότητας $\ln x\le x-1$, η οποία ισχύει για κάθε $x=0$ και η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη, διότι αποτελεί εφαρμογή στη σελ. 148 του σχολικού βιβλίου. Μάλιστα, σύμφωνα με αυτήν την εφαρμογή, η ισότητα σε αυτήν την ανισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Αντικαθιστώντας το x με το $e^{\alpha-1}$, η ανισότητα γίνεται $\ln e^{\alpha-1} \leq e^{\alpha-1}-1$, η οποία ισοδύναμα γράφεται ως $e^{\alpha-1} \geq \alpha-2$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ισότητα ισχύει μόνο για $e^{\alpha-1}=1$, δηλαδή για $\alpha=1$. Στο παραπάνω ερώτημα έχουμε να λύσουμε ακριβώς την εξίσωση $e^{\alpha-1}=\alpha-2$, οπότε μπορούμε, σύμφωνα με το παραπάνω επιχείρημα, να συμπεράνουμε ότι η μοναδική λύση είναι η $\boxed{\alpha=1.}$

Β. Αντικαθιστώντας το α με 1, προκύπτει ότι

$$f(x)=\begin{cases} x^4-2x+1, & x \geq 0 \\ 1-\eta\mu(\beta x), & x<0 \end{cases}.$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα πρέπει

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \in \mathbb{R}$$

Υπολογίζουμε καθένα από τα δύο όρια ξεχωριστά: Το δεξί πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^4-2x+1-1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x^3-2)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x^3-2) = -2. \quad (1)$$

Το αριστερό πλευρικό όριο ισούται με

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-\eta\mu(\beta x)-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu(\beta x)}{x}. \quad (2)$$

Αν $\beta=0$, τότε θα είχαμε ότι $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\eta\mu(\beta x)}{x}=0 \neq -2$ και επομένως η f δεν θα ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Άρα, θέλουμε $\beta \neq 0$. Έτσι, τελικά θα είναι

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu(\beta x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \beta \frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x}.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y=\beta x$, έχουμε ότι $y \to 0$, καθώς $x \to 0$, και το όριο γράφεται

$$\lim_{y \to 0^-} \beta \cdot \frac{\eta\mu y}{y} = \beta \cdot 1 = \beta. \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αν και μόνο αν $\boxed{\beta=-2.}$

Γ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε $f(0)=-1$ και $f'(0)=-2$, άρα η εξίσωση εφαπτομένης στο $M(0,f(0))$ θα είναι:

$$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y+1=-2x$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon): y=-2x-1.$$

Δ. Έχουμε

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-f(-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-f(0)+f(0)-f(-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3h)-f(0)}{h}-\frac{f(-2h)-f(0)}{h}\right).$$

Για τον πρώτο όρο, κάνουμε την αντικατάσταση $x=3h$. Ισχύει $x=\frac{h}{3}$ και $x\to 0$, καθώς $h\to 0$. Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x/3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(3\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=3f'(0)=-6.$$

Ομοίως, με την αντικατάσταση $x=-2h$, προκύπτει ότι

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(-2h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{-x/2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-2\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=-2f'(0)=-4.$$

Έτσι, $\boxed{L=-6-(-4)=-2.}$ Για το δεύτερο όριο έχουμε

$$B=\lim_{h\to 0}\frac{f(2\pi+h)+f(2\pi-h)-2f(2\pi)}{h^2}\overset{0/0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(2\pi+h)-f'(2\pi-h)}{2h}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f''(2\pi+h)+f''(2\pi-h)}{2},$$

όπου και στα δύο βήματα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο όριο, παρατηρούμε ότι για κάθε $x\geq 0$ ισχύει $f(x)=x^4-2x+1$, άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Συγκεκριμένα, για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=(x^4-2x+1)'=4x^3-2 \quad\text{και}\quad f''(x)=12x^2.$$

Η τελευταία είναι προφανώς συνεχής στο $(0,+\infty)$. Επομένως, το τελευταίο όριο ισούται με $\boxed{f''(2\pi)=48\pi^2}$.

Ε. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$ και επομένως το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου x^4-2x+1. Εφαρμόζουμε λοιπόν σχήμα Horner:

1	0	0	−2	1	1
1	1	1	−1	0	

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι $f(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-1)$ για κάθε $x\geq 0$. Έτσι, στο διάστημα $(0,1)$ θα ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x^3+x^2+x-1)=0\overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow}x^3+x^2+x-1=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3+x^2+x-1,\ x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον, $h(0)\cdot h(1)=(-1)\cdot 2<0$ και επομένως από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in(0,1)$ με $h(\rho)=0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x)=3x^2+2x+1>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Επομένως, η ρίζα $\rho\in(0,1)$ θα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 2.9
Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=3(x-\alpha)^2$. Η ευθεία $\varepsilon: y=3\alpha^2x-3$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases}f(2)=6\alpha^2-3\\ f'(2)=3\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-\alpha)^3+\kappa=6\alpha^2-3\\ 3(2-\alpha)^2=3\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-\alpha)^3=6\alpha^2-3-\kappa\\ (2-\alpha)^2=\alpha^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-\alpha)^3=6\alpha^2-3-\kappa\\ 4-4\alpha+\alpha^2=\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-\alpha)^3=6\alpha^2-3-\kappa\\ \alpha=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=2\\ \alpha=1\end{cases},$$

όπου στο πάνω σκέλος της τελευταίας ισοδυναμίας αντικαταστήσαμε $\alpha=1$, όπως εξάλλου μας δίνεται από το κάτω σκέλος. Επομένως, $\boxed{\alpha=1 \text{ και } \kappa=2}$.

Β. Για $\alpha=1$ και $\kappa=2$ έχουμε $f(x)=(x-1)^3+2$, άρα $f'(x)=3(x-1)^2$ και η εφαπτομένη ευθεία στο A είναι η $(\varepsilon): y=3x-3$. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την (ε), κοιτάζουμε την εξίσωση $f(x)=3x-3$. Συγκεκριμένα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)=3x-3 \Leftrightarrow (x-1)^3+2=3(x-1)$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)+2=0.$$

Θέτουμε $y=x-1$. Τότε, η παραπάνω εξίσωση γίνεται $y^3-3y+2=0$. Παρατηρούμε ότι το $y_1=1$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης, οπότε προχωράμε σε σχήμα Horner γι' αυτήν τη λύση:

1	0	–3	2	1
1	1	–2	0	

Έτσι, προκύπτει ότι $y^3-3y+2=(y-1)(y^2+y-2)$, οπότε η εξίσωση

$$y^3-3y+2=0$$

είναι ισοδύναμη με την $(y-1)(y^2+y-2)=0$. Έχουμε λοιπόν

$$y=1 \quad \text{ή} \quad y^2+y-2=0.$$

Λύνοντας τη 2η εξίσωση με διακρίνουσα, παίρνουμε τις λύσεις $y=1$ και $y=-2$.

Εφόσον είχαμε θέσει $y=x-1$, προκύπτουν από τα παραπάνω οι απλές εξισώσεις $x-1=1$ και $x-1=-2$, οι οποίες μας δίνουν τις λύσεις $x=2$ (η οποία αντιστοιχεί στο σημείο επαφής A που ήδη γνωρίζαμε) και $x=-1$. Επομένως, η C_f έχει και άλλο κοινό σημείο με την ευθεία ε, εκτός του A, και αυτό είναι το $\mathrm{B}(-1,-6)$, όπου η τεταγμένη υπολογίστηκε μέσω του τύπου της f.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα αντικαθιστώντας $x=-2$ στην εξίσωση της ευθείας ε, αφού τότε θα πάρουμε πάλι ως αποτέλεσμα το -6.

Για το δεύτερο ζητούμενο, που αφορά την κλίση της C_f στο δεύτερο σημείο τομής, υπολογίζουμε από τον τύπο της f' ότι $f'(2)=3$ και $f'(-1)=12$. Ισχύει λοιπόν ξεκάθαρα $f'(-1)=4f'(2)$,

οπότε η κλίση της C_f στο B είναι τετραπλάσια της κλίσης της C_f στο A.

Γ. Η τετμημένη μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο t, έτσι ώστε $\beta'(t)=2m/sec$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(\beta, f(\beta))$ είναι:

$$(\delta): y-f(\beta)=f'(\beta)(x-\beta)\ =3(\beta-1)^2(x-\beta).$$

Το σημείο τομής της (δ) με τον $y'y$ προκύπτει αντικαθιστώντας $x=0$ στην παραπάνω εξίσωση. Παίρνουμε τότε

$$y-(\beta-1)^3-2=3(\beta-1)^2(0-\beta)\Leftrightarrow y=(\beta-1)^3+2-3\beta(\beta-1)^2.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου N κάθε χρονική στιγμή t είναι $N(0,y_N)$ με

$$y_N(t)=(\beta(t)-1)^3+2-3\beta(t)(\beta(t)-1)^2.$$

Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης σε κάθε χρονική στιγμή t θα είναι:

$$y_N'(t)=3(\beta(t)-1)^2\beta'(t)-3\beta'(t)(\beta(t)-1)^2-6\beta(t)(\beta(t)-1)\beta'(t).$$

Τη χρονική στιγμή όπου $y_N(t_0)=-6$, έχουμε $-6=f(\beta(t_0))$, δηλαδή

$$-6=(\beta(t_0)-1)^3+2\Leftrightarrow(\beta(t_0)-1)^3=-8$$
$$\Leftrightarrow\beta(t_0)-1=-2\ \Leftrightarrow\beta(t_0)=-1.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι

$$\boxed{y_N'(t_0)=6(-1-1)^2-6(-1-1)^2+12(-1-1)\ =-24\ m/sec.}$$

Δ. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, έχουμε

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\ \Rightarrow(x_1-1)^3<(x_2-1)^3$$
$$\Rightarrow(x_1-1)^3+2<(x_2-1)^3+2\ \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι, η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει η ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$. Αυτή μπορεί να ξαναγραφτεί ισοδύναμα ως

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^3+2\ \Leftrightarrow(x-1)^3=y-2.$$

- Αν $y\geq 2$, τότε η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$x-1=\sqrt[3]{y-2}\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{y-2}.$$

- Αν $y<2$, τότε η παραπάνω είναι ισοδύναμη με

$$x-1=-\sqrt[3]{2-y} \Leftrightarrow x=1-\sqrt[3]{2-y}.$$

Έτσι, τελικά ισχύει

$$\boxed{f^{-1}(x)=\begin{cases}1+\sqrt[3]{x-2} & x\geq 2\\ 1-\sqrt[3]{2-x}, & x<2\end{cases}.}$$

Ε. Λόγω της ύπαρξης του όρου $\ln x^2$, η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\neq 0$. Πράγματι, αν $x\neq 0$, τότε ο όρος x^2 στο εσωτερικό του λογαρίθμου είναι θετικός, επομένως η ποσότητα που δίνεται είναι καλά ορισμένη. Για $x\neq 0$, έχουμε την ισοδυναμία

$$f^{-1}\left(f\left(\ln x^2\right)-7\right)<-1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(\ln x^2\right)-7<f(-1)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\ln x^2\right)-7<-6 \Leftrightarrow f^{-1}\left(\ln x^2\right)<1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(\ln x^2\right)\right)<f(1).$$

Όμως, για κάθε $y\in D_{f^{-1}}$ ισχύει $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$, άρα, εφόσον $f(1)=2$, η παραπάνω γράφεται ισοδύναμα ως

$$\ln x^2<2 \Leftrightarrow \ln x^2<\ln e^2 \Leftrightarrow x^2<e^2$$

$$\Leftrightarrow |x|<e \Leftrightarrow -e<x<e.$$

Αφού λοιπόν $x\neq 0$ και $x\in(-e,e)$, οι λύσεις είναι οι $\boxed{x\in(-e,0)\cup(0,e).}$

ΘΕΜΑ 2.10
Λύση

Α. Έστω ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι της μορφής $\Gamma(x_0,y_0)$. Τότε θα πρέπει $y_0=e^{-x_0}$, γιατί το σημείο Γ ανήκει στη C_f. Επειδή όμως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, θα πρέπει ταυτόχρονα η τεταγμένη του Γ να είναι ίση με αυτήν του B, οπότε ισχύει ότι $y_0=\alpha+1$, δηλαδή $e^{-x_0}=\alpha+1$. Άρα, ισοδύναμα, θα ισχύει

$$-x_0=\ln(\alpha+1) \Leftrightarrow x_0=-\ln(\alpha+1).$$

Έτσι, το σημείο Γ θα έχει συντεταγμένες $\Gamma(x_0,y_0)=\left(-\ln(\alpha+1),\alpha+1\right)$. Συμπεραίνουμε πλέον εύκολα ότι το Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-\ln(\alpha+1),0)$.

Β. Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν τον ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$, τότε θα είναι

$$E(\alpha) = A\Delta \cdot AB = \left(-\ln(\alpha+1)-\alpha\right)(\alpha+1),$$

όπου γνωρίζουμε ότι $-1<\alpha<0$.

Γ. Η συνάρτηση h με τύπο $h(x)=-2-2x-\ln(x+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in(-1,0)$ ισχύει

$$h'(x)=-2-\frac{1}{x+1}<0.$$

Επομένως, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$.

x	-1 0
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$\searrow$

Λόγω μονοτονίας και συνέχειας, θα ισχύει για το σύνολο τιμών ότι

$$h\left((-1,0)\right)=\left(\lim_{x\to 0^-}h(x),\lim_{x\to -1^+}h(x)\right)=(-2,+\infty),$$

όπου τα όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-2-2x-\ln(x+1)\right)=-2$.
- $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(-2-2x-\ln(x+1)\right)=-2-2-(-\infty)=+\infty$.

Δ. Η συνάρτηση E με τύπο $E(\alpha)=\left(-\ln(\alpha+1)-\alpha\right)\cdot(\alpha+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $\alpha\in(-1,0)$ ισχύει

$$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{\alpha+1}-1\right)(\alpha+1)+\left(-\ln(\alpha+1)-\alpha\right)=-2-2\alpha-\ln(\alpha+1)=h(\alpha).$$

Παρατηρούμε ότι $0\in(-2,+\infty)=h\left((-1,0)\right)$ και επομένως υπάρχει $\alpha_0\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $h(\alpha_0)=0\Leftrightarrow E'(\alpha_0)=0$. Από τη μονοτονία της h, την οποία μελετήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $-1<\alpha<\alpha_0$, τότε, επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,\alpha_0)$, θα ισχύει

$$h(\alpha)>h(\alpha_0)\Leftrightarrow E'(\alpha)>0$$

- Αν $\alpha_0 < \alpha < 0$, τότε, επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$, θα είναι

$$h(\alpha) < h(\alpha_0) \Leftrightarrow E'(\alpha) < 0$$

Αυτά συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

α	-1		α_0		0
$h(\alpha)=E'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$E(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Με βάση τον πίνακα, προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha=\alpha_0$ την τιμή $E(\alpha_0)=(-\ln(\alpha_0+1)-\alpha_0)\cdot(\alpha_0+1)$. Πράγματι, αν $\alpha\in(-1,\alpha_0]$, τότε, αφού E γνησίως αύξουσα, θα ισχύει ότι $E(\alpha)\le E(\alpha_0)$, ενώ, αν $\alpha\in[\alpha_0,0)$ επειδή η E είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει ότι $E(\alpha)\le E(\alpha_0)$.

Όμως, ισχύει $E'(\alpha_0)=h(\alpha_0)=0 \Rightarrow -\ln(\alpha_0+1)=2+2\alpha_0$. Συνεπώς,

$$E(\alpha_0)=(-\ln(\alpha_0+1)-\alpha_0)\cdot(\alpha_0+1)=(2+2\alpha_0-\alpha_0)(\alpha_0+1)$$
$$\boxed{=(\alpha_0+2)(\alpha_0+1).}$$

ΘΕΜΑ 2.11
Λύση

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-3}{x-1}$, $x\neq 1$. Μας έχει δοθεί στην υπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=1$. Επίσης, για $x\neq 1$ έχουμε $f(x)=(x-1)h(x)+3$ και επομένως

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+3\right]=(1-1)\cdot 1+3=3.$$

Αφού όμως f συνεχής στο $x_0=1$, συμπεραίνουμε ότι $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$. Έτσι όμως έπεται ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1,$$

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι

$$\boxed{y=f'(1)(x-1)+f(1)=(x-1)+3=x+2.}$$

Β. Έχουμε

$$K=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3\sqrt{x}}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)h(x)+3-3\sqrt{x}}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)h(x)}{x^2-x}+\frac{3-3\sqrt{x}}{x^2-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)h(x)}{x^2-x}+\frac{3-3\sqrt{x}}{x^2-x}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)h(x)}{x(x-1)}+\frac{3(1-\sqrt{x})}{x(x-1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{h(x)}{x}+\frac{3(1-x)}{x(x-1)(1+\sqrt{x})}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{h(x)}{x}-\frac{3}{x(1+\sqrt{x})}\right]$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=1$, που το έχουμε αναφέρει παραπάνω. Για το δεύτερο όριο έχουμε

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)-ef(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x h(x)(x-1)+3e^x-3e}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{e^x h(x)(x-1)}{x-1}+3\frac{e^x-e}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[e^x h(x)+3\frac{e^x-e}{x-1}\right]$$

$$=e^1\cdot 1+3e=4e,$$

καθώς $\lim\limits_{x\to 1}3\frac{e^x-e}{x-1}=3\varphi'(1)$, όπου $\varphi(x)=e^x$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια το τρίτο όριο:

$$M=\lim_{h\to+\infty}\frac{h^{2023}+1}{h^{2022}+1}\left[f\left(1+\frac{1}{h}\right)-3\right]=\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{h^{2023}\left(1+\frac{1}{h^{2023}}\right)}{h^{2022}\left(1+\frac{1}{h^{2022}}\right)}\left[f\left(1+\frac{1}{h}\right)-3\right]\right)$$

$$=\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{h\left(1+\frac{1}{h^{2023}}\right)}{\left(1+\frac{1}{h^{2022}}\right)}\left[f\left(1+\frac{1}{h}\right)-3\right]\right)=\lim_{h\to+\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{h^{2023}}\right)}{\left(1+\frac{1}{h^{2022}}\right)}\frac{\left[f\left(1+\frac{1}{h}\right)-3\right]}{\frac{1}{h}}\right]=1,$$

καθώς

$$\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{1+\dfrac{1}{h^{2023}}}{1+\dfrac{1}{h^{2022}}}\right)=\frac{1+0}{1+0}=1,$$

ενώ για το όριο $\lim_{h\to+\infty}\dfrac{\left[f\left(1+\dfrac{1}{h}\right)-3\right]}{\dfrac{1}{h}}$ θέτουμε $x=1+\dfrac{1}{h}$. Τότε, όταν $h\to+\infty$, είναι $x\to1$ και επομένως

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{\left[f\left(1+\dfrac{1}{h}\right)-3\right]}{\dfrac{1}{h}}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη δοσμένη υπόθεση.

Γ. **i.** Η g είναι συνεχής για $x\in[0,1)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών. Ομοίως, η g είναι συνεχής στο $(1,2]$ ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών. Για το $x_0=1$, πρέπει να ελέγξουμε τη συνέχεια με τον ορισμό: Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\left(e^{1-x}-x\right)=e^0-1=0.$$

Το δεξί όριο είναι

$$\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}\left((x-2)f(x)+(\alpha+e)(x-1)+3\right)$$

$$=-f(1)+3=-3+3=0.$$

Τέλος, ισχύει $g(1)=e^0-1=0$. Επομένως, η g είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το $[0,2]$.

ii. Αφού η g είναι συνεχής στο $[0,2]$, ο μόνος τρόπος να μην ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών είναι να ισχύει $g(0)=g(2)$. Ισοδύναμα,

$$g(0)=g(2)\Leftrightarrow e^{1-0}-0=(2-2)f(2)+(\alpha+e)(2-1)+3$$

$$\Leftrightarrow e=\alpha+e+3\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-3.}$$

iii. Με χρήση του κανόνα De L' Hospital προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{1-x}-x}{x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\left(e^{1-x}-x\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{1-x}(1-x)'-1}{1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left(-e^{1-x}-1\right)=-2.$$

Υπολογίζουμε τώρα και το δεξί όριο:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-2)f(x)+(3-e)(x-1)+3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-2)\left((x-1)h(x)+3\right)+3}{x-1}+\frac{(3-e)(x-1)}{x-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{(x-2)(x-1)h(x)}{x-1}+\frac{3(x-2)+3}{x-1}+3-e\right]$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left((x-2)h(x)+6-e\right)=-1+6-e=5-e\neq-2.$$

Αφού $\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$, η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Δ. Αφού $g(0)=e\neq0$, η γραφική παράσταση της g δεν διέρχεται από το $O(0,0)$. Αν $M(x,g(x))$ ένα σημείο της C_g, τότε η απόσταση του M από το O δίνεται από τον τύπο:

$$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+\left(g(x)-0\right)^2}=\sqrt{x^2+g^2(x)},\quad x\in[0,2].$$

Η d είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξη και σύνθεση συνεχών, οπότε από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχει $x_0\in[0,2]$ για το οποίο η d γίνεται ελάχιστη. Ισοδύναμα, υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι μικρότερη, είτε ίση της απόστασης των υπόλοιπων σημείων της C_g από το σημείο O.

ΘΕΜΑ 2.12
Λύση

Α. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$g^2(x)-x^2=2g(x)\ln(x+1)-\ln^2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow g^2(x)-2g(x)\ln(x+1)+\ln^2(x+1)=x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(g(x)-\ln(x+1)\right)^2=x^2 \Leftrightarrow \left|g(x)-\ln(x+1)\right|=|x|.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-\ln(x+1)$, $x>-1$. Τότε ισχύει ότι $|h(x)|=|x|$ και επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία

$$|h(x)|=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Έτσι, αφού η h είναι συνεχής με μοναδική ρίζα την $x=0$, η h θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1,0)$ και αντίστοιχα σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Αφού $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=-\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x\to -1^+} h(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(g(x)-\ln(x+1)\right)=-\infty$$

κι επομένως θα ισχύει ότι $h(x)<0$ για $x>-1$ κοντά στο -1, οπότε $h(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$, λόγω του ότι η h διατηρεί πρόσημο σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, $h(e-1)=g(e-1)-\ln e=e-1>0$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ λόγω και πάλι της διατήρησης προσήμου. Συνεπώς, για κάθε $x\in(-1,0)$ ισχύει $h(x)<0$ και $|x|=-x$, οπότε

$$-h(x)=-x \Leftrightarrow \ln(x+1)-g(x)=-x \Leftrightarrow g(x)=x+\ln(x+1).$$

Επιπλέον, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $h(x)>0$ και $|x|=x$, οπότε

$$h(x)=x \Leftrightarrow g(x)-\ln(x+1)=x \Leftrightarrow g(x)=x+\ln(x+1)$$

Τέλος, $h(0)=0 \Leftrightarrow g(0)-\ln(0+1)=0 \Leftrightarrow g(0)=0+\ln(0+1)$, άρα οι συναρτήσεις g και h με $\varphi(x)=x+\ln(x+1)$ είναι ίσες σε όλο το $(-1,+\infty)$, οπότε

$$\boxed{g(x)=x+\ln(x+1) \text{ για κάθε } x>-1.}$$

Β. **i.** Αρχικά παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{1/x} - x\right) = \lim_{u\to -\infty}\left(e^u - \frac{1}{u}\right) = 0,$$

Εφόσον $u = 1/x$ και $x \to 0^-$, θα είναι $u \to -\infty$.

όπου στη 2η ισότητα κάναμε την αντικατάσταση $u = 1/x$ και στην 3η χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{u\to -\infty} e^u = 0$ και $\lim_{u\to -\infty} \frac{1}{u} = 0$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x + \ln(x+1)\right) = 0 + \ln 1 = 0 = f(0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Για $x > 0$ ισχύει

$$f(x) = g(x) = x + \ln(x+1).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, θα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $[0,+\infty)$. Έπεται για το σύνολο τιμών ότι

$$f\left([0,+\infty)\right) = \left[f(0), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [0,+\infty),$$

όπου ο υπολογισμός του ορίου στην τελευταία ισότητα έγινε ως εξής:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x + \ln(x+1)\right) = +\infty.$$

Για $x < 0$ ισχύει $f(x) = e^{1/x} - x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ και για κάθε $x < 0$ ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} - 1 < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$. Έτσι, θα έχουμε για το σύνολο τιμών ότι

$$f\left((-\infty,0)\right) = \left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = \left(f(0), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (0,+\infty),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 0$, καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(e^{1/x} - x\right) \overset{u=1/x}{=} \lim_{u\to 0^-}\left(e^u - \frac{1}{u}\right) = +\infty,$$

όπου στη δεύτερη ισότητα κάναμε την αντικατάσταση $u = \frac{1}{x}$ και στην τρίτη χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim_{u\to 0^-} e^u = 1$ και $\lim_{u\to 0^-}(-1/u) = +\infty$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f θα είναι το

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = (0,+\infty) \cup [0,+\infty) = [0,+\infty).}$$

ii. Θέτουμε $u = f(x) \geq 0$, καθώς λόγω του συνόλου τιμών θα έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u^2 + u = 2 \Leftrightarrow u^2 + u - 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου είναι ίση με

$$\Delta = 1^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9,$$

άρα $u_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$.

Έτσι, θα είναι $u_1 = -2$, το οποίο απορρίπεται (αφού $u \geq 0$), ή $u_2 = 1$ το οποίο είναι δεκτό. Άρα η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$u = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Ισχύει ότι $1 \in f((-\infty,0)) = (0,+\infty)$ κι επομένως υπάρχει $\kappa \in (-\infty,0)$, για το οποίο ισχύει ότι $f(\kappa) = 1$ και είναι μοναδικό στο $(-\infty,0)$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Επιπλέον, $1 \in f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$ κι επομένως υπάρχει $\lambda \in (0,+\infty)$, για το οποίο ισχύει ότι $f(\lambda) = 1$ και είναι μοναδικό στο $(0,+\infty)$ γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Επομένως, συνολικά η εξίσωση $f^2(x) + f(x) = 2$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\kappa < 0 < \lambda$.

iii. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} &\Leftrightarrow \alpha + \beta = \ln\left(\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right) \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta = -\ln(\alpha+1) - \ln(\beta+1) \\ &\Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha+1) + \beta + \ln(\beta+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ και επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Άρα, αν είχαμε $\alpha>0$ ή $\beta>0$, τότε θα ίσχυε $f(\alpha)>0$ ή $f(\beta)>0$ και έτσι, αφού γενικώς $f(\alpha)\geq 0,\ f(\beta)\geq 0$, η ισότητα $f(\alpha)+f(\beta)=0$ δεν θα ίσχυε. Άρα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $\boxed{\alpha=\beta=0.}$

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f(x)(x-\lambda)+f\left(1-e^{x}\right)(x-\kappa)-2024(x-\lambda)(x-\kappa).$$

Η φ είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον

- $\varphi(\kappa)=f(\kappa)(\kappa-\lambda)=1\cdot(\kappa-\lambda)=\kappa-\lambda<0$, αφού $\kappa<\lambda$.
- $\varphi(\lambda)=\underline{f\left(1-e^{\lambda}\right)(\lambda-\kappa)}$.

Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι θετικός. Επειδή $\lambda>0$ και η συνάρτηση e^{x} είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει $e^{\lambda}>1$, άρα $1-e^{\lambda}<0$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και $1-e^{\lambda},0 \in(-\infty,0]$, προκύπτει ότι

$$f\left(1-e^{\lambda}\right)>f(0)=0.$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι $\varphi(\lambda)>0$, καθώς $f\left(1-e^{\lambda}\right)>0$ και $\lambda-\kappa>0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in(\kappa,\lambda)$, έτσι ώστε $\varphi(x_0)=0$, δηλαδή

$$f(x_0)(x_0-\lambda)+f\left(1-e^{x_0}\right)(x_0-\kappa)-2024(x_0-\lambda)(x_0-\kappa)=0.$$

Επειδή $x_0 \in(\kappa,\lambda)$, θα ισχύει $x_0-\lambda,\ x_0-\kappa \neq 0$, οπότε στην τελευταία εξίσωση μπορούμε να διαιρέσουμε με $(x_0-\lambda)(x_0-\kappa)$ και αυτή τότε γράφεται ως

$$\frac{f(x_0)}{x_0-\kappa}+\frac{f\left(1-e^{x_0}\right)}{x_0-\lambda}=2024,$$

η οποία είναι ακριβώς η αρχική εξίσωση. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το x_0 θα είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

Δ. Παρατηρούμε ότι

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x+\eta\mu x}\left(f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)-f(1)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x+\eta\mu x}\left(f\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-f(1)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x+\eta\mu x}\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{f\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-f(1)}{\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

Αντικαθιστούμε $u=\frac{1}{x^2}$. Τότε είναι $u\to0^+$, καθώς $x\to+\infty$, άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-f(1)}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{u\to0^+}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=f'(1)=\frac{3}{2}.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x+\eta\mu x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\eta\mu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\eta\mu x}{x}}.$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$ χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Για κάθε $x>0$ είναι

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{x}\le\frac{1}{x}$$

άρα $-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$. Καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Συνεπώς,

$$\boxed{L=\frac{1}{1+0}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.}$$

ΘΕΜΑ 2.13
Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)'=(\ln x)'+\frac{(1)'\ln x-1(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\ln^2 x}=\frac{\ln^2 x-1}{x\ln^2 x}.$$

Θα βρούμε αρχικά τα σημεία μηδενισμού της f'. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln^2 x=1$$

$$\Leftrightarrow \ln x=1 \ \text{ή}\ \ln x=-1\Leftrightarrow x=e \ \text{ή}\ x=e^{-1}.$$

Θα βρούμε τώρα το πρόσημο της f'. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)<0\Leftrightarrow \ln^2 x<1 \Leftrightarrow |\ln x|<1\Leftrightarrow -1<\ln x<1 \Leftrightarrow e^{-1}<x<e.$$

Γνωρίζουμε όμως επίσης ότι το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, άρα τελικά οι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι οι $x\in(e^{-1},1)\cup(1,e)$. Εντελώς όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f' είναι θετική για $x\in(0,1/e)\cup(e,+\infty)$. Επομένως, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την f:

x	0		$1/e$		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Για το σύνολο τιμών της f εργαζόμαστε ως εξής:

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{1}{e}\right]$, επομένως

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f(e^{-1})\right]=(-\infty,-2],$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)=\left(-\infty+\frac{1}{-\infty}\right)=-\infty$$

και το γεγονός ότι $f(e^{-1})=\ln e^{-1}+\dfrac{1}{\ln e^{-1}}=-1-1=-2$.

- Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{1}{e}, 1\right)$, επομένως

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), f(e^{-1})\right] = (-\infty, -2],$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = 0 + \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

- Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = (1, e]$, επομένως

$$f(\Delta_3) = \left[f(e), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = [2, +\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

καθώς και ότι $f(e) = \ln e + \frac{1}{\ln e} = 1 + 1 = 2$.

- Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_4 = [e, +\infty)$, επομένως

$$f(\Delta_4) = \left[f(e), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [2, +\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty + 0 = +\infty.$$

Έτσι, το σύνολο τιμών θα είναι το

$$\boxed{f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}.}$$

Β. Για κάθε $0 < x \neq 1$ ισχύει

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \ln x^{-1} + \frac{1}{\ln x^{-1}} = -\ln x - \frac{1}{\ln x} = -f(x),$$

δηλαδή $f(1/x) = -f(x)$ κι επομένως $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$f\left(\frac{e^{-2x}}{1+e^{1-2x}}\right)+f\left(4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e^{2x}\left(1+e^{1-2x}\right)}\right)+f\left(4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e^{2x}+e}\right)+f\left(4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}\right)=0.$$

Όμως από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{e^{2x}+e}\right)+f\left(e^{2x}+e\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e^{2x}+e}\right)=-f\left(e^{2x}+e\right).$$

Έτσι, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-f\left(e^{2x}+e\right)+f\left(4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}\right)=f\left(e^{2x}+e\right).$$

Όμως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}>e$ και $e^{2x}+e>e$ και, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e,+\infty)$, προκύπτει ότι η εξίσωση

$$f\left(4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}\right)=f\left(e^{2x}+e\right)$$

είναι ισοδύναμη της $4+2\sqrt{e}\cdot e^{x}=e^{2x}+e$. Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, θέτουμε $\omega=e^{x}>0$. Τότε η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$4+2\sqrt{e}\omega=\omega^2+e \Leftrightarrow \omega^2-2\sqrt{e}\omega+e-4=0$$

Η διακρίνουσα αυτής της εξίσωσης είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-2\sqrt{e}\right)^2-4(e-4)=16$, οπότε οι λύσεις είναι

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\sqrt{e}\pm 4}{2}$$

Συνεπώς,

$$\omega=\frac{2\sqrt{e}+4}{2}=\sqrt{e}+2 \quad \text{ή} \quad \omega=\frac{2\sqrt{e}-4}{2}=\sqrt{e}-2.$$

Όμως, επειδή $\sqrt{e}-2<0$, δεκτή γίνεται μόνο η τιμή $\omega=\sqrt{e}+2$.

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\omega=\sqrt{e}+2 \Leftrightarrow e^{x}=\sqrt{e}+2 \boxed{\Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt{e}+2\right).}$$

Γ. i. Έστω $\varphi(x)=2\left(\frac{1}{x}-1\right)-\ln x,\ x\in(0,1)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει

$$\varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}$$

Ισχύει λοιπόν κάθε $x\in(0,1)$ ότι $\varphi'(x)<0$, επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Αφού η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, προκύπτει ότι

$$\varphi((0,1))=\left(\lim_{x\to1^-}\varphi(x),\lim_{x\to0^+}\varphi(x)\right)=(0,+\infty),$$

όπου ο υπολογισμός των δύο ορίων στην τελευταία ισότητα δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Έτσι, θα είναι $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε

$$2\left(\frac{1}{x}-1\right)-\ln x>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Συνεπώς, $2\left(\frac{1}{x}-1\right)>\ln x$, για κάθε $x\in(0,1)$.

ii. Για $x\in(0,1)$ είναι

$$f'(x)=1\Leftrightarrow\frac{\ln^2x-1}{x\ln^2x}=1$$

$$\Leftrightarrow \ln^2x-x\ln^2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\ln^2x-1=0$$

Οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες επειδή έχουμε περιοριστεί στο $(0,1)$. Αλλιώς δεν θα ήταν, αφού η κάτω ορίζεται για $x=1$, ενώ η πάνω όχι, αφού για $x=1$ μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho(x)=(1-x)\ln^2x-1, x\in(0,1)$. Λόγω της παραπάνω ισοδυναμίας, η εξίσωση $f'(x)=1$ είναι ισοδύναμη με τη $\rho(x)=0$. Η ρ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in(0,1]$ ισχύει

$$\rho'(x)=-\ln^2x+2(1-x)\ln x\frac{1}{x}=2\ln x\left(\frac{1}{x}-1\right)-\ln^2x=\ln x\left[2\left(\frac{1}{x}-1\right)-\ln x\right].$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $2(1/x-1)>\ln x$ και επειδή επίσης $\ln x<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, έπεται ότι το παραπάνω γινόμενο έχει αρνητικό πρόσημο.

Έτσι, η ρ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και, αφού είναι και συνεχής, προκύπτει για το σύνολο τιμών της ότι

$$\rho\left((0,1)\right)=\left(\lim_{x\to 1^-}\rho(x),\lim_{x\to 0^+}\rho(x)\right)=(-1,+\infty),$$

όπου τα όρια στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\rho(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(1-x)\ln^2 x-1\right]=0\cdot 0-1=-1.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\rho(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1-x)\ln^2 x-1\right]=1\cdot(+\infty)-1=+\infty.$

Αφού λοιπόν $0\in\rho\left((0,1)\right)$, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ έτσι ώστε

$$\rho(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=1.$$

Το x_0 είναι μοναδικό στο $(0,1)$ γιατί η ρ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

Δ. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, είναι $x'(t)=1\,\text{cm}/\sec$. Η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(x,f(x))$ από το σημείο $\mathrm{A}(e,2)$ δίνεται από τον τύπο

$$d(t)=\sqrt{\left(x(t)-e\right)^2+\left(f(x(t))-2\right)^2}$$

Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης δίνεται σε cm/sec από τον τύπο

$$d'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\left(x(t)-e\right)^2+\left(f(x(t))-2\right)^2}}\left(\left(x(t)-e\right)^2+\left(f(x(t))-2\right)^2\right)'$$

$$=\frac{\left(2\left(x(t)-e\right)x'(t)+2\left(f(x(t))-2\right)f'(x(t))x'(t)\right)}{2\sqrt{\left(x(t)-e\right)^2+\left(f(x(t))-2\right)^2}}$$

$$=\frac{x'(t)\left(x(t)-e\right)+f'(x(t))x'(t)\left(f(x(t))-2\right)}{\sqrt{\left(x(t)-e\right)^2+\left(f(x(t))-2\right)^2}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ισχύει $x(t_0)=e^2$, είναι

$$f(x(t_0))=f(e^2)=\ln e^2+\frac{1}{\ln e^2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

και

$$f'(x(t_0)) = f'(e^2) = \frac{\ln^2(e^2)-1}{e^2\ln^2(e^2)} = \frac{3}{4e^2}.$$

Επομένως,

$$d'(t_0) = \frac{1\cdot(e^2-e)+\frac{3}{4e^2}\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{2}-2\right)}{\sqrt{(e^2-e)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}}\ \text{cm/sec}.$$

Εκτελώντας τους υπολογισμούς σε αριθμητή και παρονομαστή, καταλήγουμε στην απλούστερη μορφή

$$\boxed{d'(t_0) = \frac{e^2-e+\frac{3}{8e^2}}{\sqrt{(e^2-e)^2+\frac{1}{4}}}\ \text{cm/sec}.}$$

ΘΕΜΑ 2.14
Λύση

A. Καθότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \Leftrightarrow \alpha^4 - 3\alpha = -\frac{1}{\alpha} - 1.$$

B. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά.

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^-}\frac{x^4-3x-\alpha^4+3\alpha}{x-\alpha} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to\alpha^-}\left(4x^3-3\right) = 4\alpha^3-3,$$

όπου στο δεύτερο βήμα κάναμε χρήση του κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^+}\frac{-\frac{1}{x}-1-\alpha^4+3\alpha}{x-\alpha} \overset{A.}{=} \lim_{x\to\alpha^+}\frac{-\frac{1}{x}-1+\frac{1}{\alpha}+1}{x-\alpha} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to\alpha^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2},$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Α και στο τρίτο βήμα τον κανόνα De L' Hospital. Θα πρέπει επομένως να ισχύει ότι

$$4\alpha^3 - 3 = \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow 4\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^2} = 3. \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$h'(x) = 12x^2 + \frac{2}{x^3} > 0.$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Θα είναι λοιπόν και «1-1» σε αυτό το διάστημα. Η εξίσωση (1) τότε γράφεται ισοδύναμα ως

$$4\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^2} = 3 \Leftrightarrow h(\alpha) = 3 \Leftrightarrow h(\alpha) = h(1) \boxed{\Leftrightarrow \alpha = 1.}$$

Γ. Η f είναι από υπόθεση παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και επομένως:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}.$$

Είναι $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 3 = 1$ και $f(1) = 1^4 - 1 \cdot 3 = -2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,-2)$ θα είναι λοιπόν

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = (x-1) - 2 = x - 3.$$

Η f' είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Πράγματι:

- Στο $(-\infty,1)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Μάλιστα, γι' αυτόν τον λόγο είναι επιπλέον παραγωγίσιμη με παράγωγο $f''(x) = 12x^2$. Για $x < 1$ ισχύει $f''(x) \ge 0$ με ισότητα μόνο για $x = 0$.
- Στο $(1,+\infty)$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η f είναι επιπλέον παραγωγίσιμη. Για $x > 1$ ισχύει $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$.
- Για τη συνέχεια στο $x_0 = 1$, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια. Το δεξί όριο είναι

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (4x^3 - 3) = 1$$

και το αριστερό είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$$

Από την ισότητα των δύο, συμπεραίνουμε ότι η f' είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

Όπως είδαμε παραπάνω, για $x > 1$ ισχύει $f''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$. Αφού η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[1, +\infty)$ κι επομένως η f είναι κοίλη σε αυτό το διάστημα. Έτσι, η γραφική παράσταση της f θα είναι για $x > 1$ «κάτω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, -2)$, με εξαίρεση το σημείο A, όπου συναντιούνται. Θα ισχύει δηλαδή $f(x) < x - 3$ για κάθε $x > 1$, όπως θέλαμε.

Για ακόμη μία φορά, χρησιμοποιούμε το θεώρημα της σελ. 135 του σχολικού βιβλίου για τη συνάρτηση f'.

Αντίστοιχα, είδαμε ότι για $x < 1$ ισχύει $f''(x) = 12x^2$, η οποία είναι θετική, με εξαίρεση το σημείο $x = 0$, όπου μηδενίζεται. Εφόσον η f' είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$. Άρα η f είναι κυρτή σε αυτό το διάστημα και έτσι συμπεραίνουμε ότι η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο A, με εξαίρεση το ίδιο το σημείο A, όπου συναντιούνται. Με άλλα λόγια, θα ισχύει $f(x) \geq x - 3$ για κάθε $x \leq 1$, όπως θέλαμε.

Εδώ χρησιμοποιούμε το μέρος (iii) του θεωρήματος στη σελ. 144. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο όταν η παράγωγος δεν είναι παντού θετική αλλά ενδεχομένως μηδενίζεται σε ένα σημείο, στο οποίο όμως η συνάρτηση είναι συνεχής.

Δ. Ξεκινάμε με ένα συμπέρασμα από το προηγούμενο ερώτημα, το οποίο δεν είναι άμεσο ζητούμενο, αλλά θα μας βοηθήσει στην πορεία. Είδαμε ότι για $x \leq 1$ ισχύει $f(x) \geq x - 3$, με ισότητα μόνο για $x = 1$. Επίσης είδαμε ότι για $x > 1$ ισχύει $f(x) < x - 3$. Επομένως, η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = x - 3$ είναι η $x = 1$.

Περνάμε τώρα στο κύριο μέρος της λύσης. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ως εξής:

$$g^2(x) = (f(x) - x + 3)^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |f(x) - x + 3| \qquad (2)$$

Θα αναζητήσουμε τα σημεία μηδενισμού της g. Σύμφωνα με την παρατήρηση στην αρχή του ερωτήματος, ισχύει η ισοδυναμία

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - x + 3| = 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως, η μοναδική ρίζα της συνεχούς συνάρτησης g είναι το $x_0 = 1$, συνεπώς η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1:

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι $g(x)<0$, και για $x\in(-\infty,1)$, αλλά και για $x\in(1,+\infty)$. Σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση (2) για $x<1$ γράφεται

$$\begin{aligned}-g(x)=|f(x)-x+3| &\Leftrightarrow -g(x)=f(x)-x+3\\ &\Leftrightarrow g(x)=x-f(x)-3,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, σύμφωνα με το οποίο $f(x)>x-3$ για $x<1$. Ανάλογα, για $x\in(1,+\infty)$, η σχέση (2) γράφεται

$$\begin{aligned}-g(x)=|f(x)-x+3| &\Leftrightarrow -g(x)=x-3-f(x)\\ &\Leftrightarrow g(x)=f(x)-x+3,\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε και πάλι τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος για $x>1$. Καταφέραμε λοιπόν να βρούμε τον τύπο της g και στις δύο περιπτώσεις, ενώ παρατηρούμε επίσης ότι $g(1)=0=f(1)-1+3$.

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $g(x)=\begin{cases}x-f(x)-3, & x<1\\ f(x)-x+3, & x\geq 1\end{cases}$.

Περίπτωση 2:

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι $g(x)<0$ για $x\in(-\infty,1)$ και $g(x)>0$ για $x\in(1,+\infty)$. Για $x<1$, η σχέση (2) γράφεται

$$-g(x)=|f(x)-x+3|\overset{\Gamma.}{\Leftrightarrow}-g(x)=f(x)-x+3 \Leftrightarrow g(x)=x-f(x)-3.$$

Ανάλογα, για $x\in(1,+\infty)$, η σχέση (2) γράφεται

$$g(x)=|f(x)-x+3|\overset{\Gamma.}{\Leftrightarrow}g(x)=x-3-f(x),$$

ενώ γνωρίζουμε και ότι $g(1)=0=1-3-f(1)$. Επομένως

$$g(x)=x-f(x)-3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Περίπτωση 3:

Αυτή η περίπτωση είναι η αντίστροφη της προηγούμενης, υποθέτουμε δηλαδή ότι $g(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και $g(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$. Τότε, για $x<1$ η σχέση (2) γράφεται

$$g(x)=|f(x)-x+3|\overset{\Gamma.}{\Leftrightarrow}g(x)=f(x)-x+3.$$

Ανάλογα, για $x>1$ η σχέση (2) γράφεται

$$-g(x)=|f(x)-x+3| \overset{\Gamma.}{\Leftrightarrow} -g(x)=x-3-f(x) \Leftrightarrow g(x)=f(x)-x+3,$$

ενώ, όπως και σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις,

$$g(1)=0=f(1)=1+3.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $g(x)=f(x)-x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

Περίπτωση 4:

Αυτή η περίπτωση είναι η αντίστροφη της πρώτης, υποθέτουμε δηλαδή ότι $g(x)>0$, και για $x\in(-\infty,1)$ και για $x\in(1,+\infty)$. Επομένως, για $x<1$ η σχέση (2) γράφεται

$$g(x)=|f(x)-x+3| \overset{\Gamma.}{\Leftrightarrow} g(x)=f(x)-x+3.$$

Αντίστοιχα, για $x\in(1,+\infty)$ η (2) γράφεται

$$g(x)=|f(x)-x+3| \overset{\Gamma.}{\Leftrightarrow} g(x)=x-3-f(x)$$

ενώ, όπως και πριν, $g(1)=0=f(1)-1+3$. Επομένως, σε αυτήν την τελευταία περίπτωση,

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-x+3, & x<1 \\ x-f(x)-3, & x\geq 1 \end{cases}.$$