ΘΕΜΑ 3.1
Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \left(e^{\alpha x} + \beta\right)' = \alpha e^{\alpha x}.$$

Αφού η ευθεία $y = 3x + 5$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, τότε θα ισχύει ότι $f'(0) = 3$ και $f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$.

- Είναι $f(0) = 5$, άρα $e^{\alpha \cdot 0} + \beta = 5 \Leftrightarrow 1 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 4$.
- Είναι $f'(0) = 3$, άρα $\alpha e^{\alpha \cdot 0} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Συνεπώς, $f(x) = e^{3x} + 4$.

Β. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f''(x) = \left(3e^{3x}\right)' = 9e^{3x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η γραφική παράσταση της f θα είναι πάνω από την εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους A, κι επομένως $f(x) \geq 3x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E = \int_0^1 |f(x) - 3x - 5|\,dx \overset{B.}{=} \int_0^1 \left(e^{3x} + 4 - 3x - 5\right)dx = \int_0^1 \left(e^{3x} - 3x - 1\right)dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x}dx - 3\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 1\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{3}{2}x^2 - x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 0 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{17}{6} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

Δ. Αρχικά είναι $\lim\limits_{x \to 0}\left(f(x) - 3x - 5\right) = 0$. Όμως, για x κοντά στο 0 ισχύει από το Ερώτημα Β ότι

$$f(x) > 3x + 5 \Leftrightarrow f(x) - 3x - 5 > 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{f(x) - 3x - 5} = +\infty.$$

ΘΕΜΑ 3.2
Λύση

Α. Καθώς το σημείο $M(1,2)$ ανήκει στη C_f, θα ισχύει

$$f(1)=2 \Leftrightarrow e^{1-1}+\alpha=2 \Leftrightarrow 1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1.$$

Θα ισχύει λοιπόν $f(x)=e^{x-1}+1$.

Β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(e^{x-1}+1\right)'=e^{x-1}>0.$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1», κι επομένως θα αντιστρέφεται. Λόγω μονοτονίας και συνέχειας, το σύνολο τιμών της f θα είναι:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1,+\infty),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+1\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}+1\right)=+\infty$. Έτσι, το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(1,+\infty)$.

Για τον τύπο της αντίστροφης πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $y>1$ ισχύει

$$y=e^{x-1}+1 \Leftrightarrow e^{x-1}=y-1 \Leftrightarrow x-1=\ln(y-1) \Leftrightarrow x=1+\ln(y-1).$$

Έτσι, $\boxed{f^{-1}(x)=1+\ln(x-1) \text{ για κάθε } x>1.}$

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών. Επιπλέον

- $g(-3)=f(-3)-3=e^{-4}+1-3=e^{-4}-2=\dfrac{1}{e^4}-2<0.$
- $g(0)=f(0)+0=e^{-1}+1>0.$

Έτσι, από το Θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει $x_0\in(-3,0)$, ώστε

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=-x_0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=f'(x)+1>0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ. **i.** Είναι

$$\int_{x_0}^{0} f(x)dx = \int_{x_0}^{0}\left(e^{x-1}+1\right)dx = \left[e^{x-1}+x\right]_{x_0}^{0} = e^{-1}-\left(e^{x_0-1}+x_0\right)$$

Για το x_0, από το Ερώτημα Γ ξέρουμε ότι

$$f(x_0) = -x_0 \Leftrightarrow e^{x_0-1}+1=-x_0 \Leftrightarrow e^{x_0-1}=-x_0-1.$$

Επομένως,

$$\boxed{\int_{x_0}^{0} f(x)dx = e^{-1}-\left(-x_0-1+x_0\right) = e^{-1}+1.}$$

ii. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y=f^{-1}(x)$. Τότε, ισοδύναμα θα είναι $x=f(y)$ και $dx=f'(y)dy$. Καθώς όμως $f'(y)=e^{y-1}$, θα είναι $dx=e^{y-1}dy$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης.

- Όταν $x=2$, θα είναι $y=f^{-1}(2)=1+\ln(2-1)=1$.
- Όταν $x=e+1$, θα είναι $y=f^{-1}(e+1)=1+\ln(e+1-1)=2$.

Επομένως, για το άθροισμα των ολοκληρωμάτων έχουμε:

$$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{e+1} f^{-1}(x)dx = \int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 yf'(y)dy = \int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 ye^{y-1}dy.$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα ξεχωριστά. Το πρώτο από αυτά είναι ίσο με

$$\int_1^2\left(e^{x-1}+1\right)dx = \left[e^{x-1}+x\right]_1^2 = e^{2-1}+2-\left(e^{1-1}+1\right) = e.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_1^2 ye^{y-1}dy = \int_1^2 y\left(e^{y-1}\right)'dy = \left[ye^{y-1}\right]_1^2-\int_1^2 (y)'e^{y-1}dy$$

$$= 2e-1-\left[e^{y-1}\right]_1^2 = 2e-1-(e-1) = e.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{e+1} f^{-1}(x)dx = e+e=2e, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

ΘΕΜΑ 3.3
Λύση

Α. Είναι

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\text{συν}x\,dx=-\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)\text{συν}x\,dx+\int_0^{\pi}f''(x)\text{συν}x\,dx=-\pi \quad (1)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_0^{\pi}f(x)\text{συν}x\,dx=\int_0^{\pi}f(x)(\text{ημ}x)'\,dx=\left[f(x)\text{ημ}x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\text{ημ}x\,dx=-\int_0^{\pi}f'(x)\text{ημ}x\,dx$$

καθώς $f(\pi)\text{ημ}\pi=f(0)\text{ημ}0=0$. Στο τελευταίο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε ξανά ολοκλήρωση κατά παράγοντες και συνεχίζουμε τον υπολογισμό:

$$-\int_0^{\pi}f'(x)\text{ημ}x\,dx=\int_0^{\pi}f'(x)(\text{συν}x)'\,dx=\left[f'(x)\text{συν}x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(x)\text{συν}x\,dx$$

$$=-f'(\pi)-f'(0)-\int_0^{\pi}f''(x)\text{συν}x\,dx. \quad (2)$$

Έτσι, επιστρέφοντας στη σχέση (1) έχουμε

$$\int_0^{\pi}f(x)\text{συν}x\,dx+\int_0^{\pi}f''(x)\text{συν}x\,dx=-\pi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -f'(\pi)-f'(0)=-\pi$$

$$\Leftrightarrow -f'(\pi)=-\pi \ \boxed{\Leftrightarrow f'(\pi)=\pi.}$$

Β. Η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$. Έτσι, από το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ για το οποίο

$$f''(\xi)=\frac{f'(\pi)-f'(0)}{\pi}=\frac{\pi-0}{\pi}=1.$$

Έτσι, στο σημείο $M(\xi,f'(\xi))$ η εφαπτομένη της $C_{f'}$ θα έχει κλίση ίση με 1, δηλαδή θα είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2023$.

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)+x\text{συν}x$. Τότε, η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων. Επιπλέον έχουμε:

- $g(0)=f'(0)=0.$
- $g(\pi)=f'(\pi)+\pi\text{συν}(\pi)=f'(\pi)-\pi=0.$

Έτσι, από το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ για το οποίο $g'(\xi)=0$. Όμως,

$g'(x)=(f'(x)+x\sigma\upsilon\nu x)'=f''(x)-x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ κι επομένως, αφού $g'(\xi)=0$, τότε

$$f''(\xi)-\xi\eta\mu\xi+\sigma\upsilon\nu\xi=0,$$

δηλαδή το ξ είναι ρίζα της ζητούμενης εξίσωσης.

Σημείωση:
Η αρχική μας επιλογή της συνάρτησης g μπορεί να μοιάζει ουρανοκατέβατη, αλλά έχει στην πραγματικότητα λογική εξήγηση. Θέλουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rolle, διότι θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης που περιέχει παραγώγους. Επομένως, χρειαζόμαστε μία συνάρτηση της οποίας η παράγωγος να είναι ίση με $f''(x)-x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$. Για τον πρώτο όρο υπάρχει μια προφανής επιλογή, η $f'(x)$. Για τους άλλους δύο όρους παρατηρούμε ότι

$$-x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=x(\sigma\upsilon\nu x)'+(x)'\sigma\upsilon\nu x=(x\sigma\upsilon\nu x)'.$$

Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο, επιλέγουμε τελικά $g(x)=f'(x)+x\sigma\upsilon\nu x$.

Δ. Αφού η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, κάθε εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης θα είναι «κάτω» από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Η εφαπτομένη στο σημείο $A(\pi,f(\pi))$ έχει εξίσωση $y=f'(\pi)(x-\pi)+f(\pi)$, άρα, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, θα ισχύει

$$f(x)\geq f'(\pi)(x-\pi)+f(\pi)$$

για κάθε $x\in[0,\pi]$ και η ισότητα σε αυτό το διάστημα ισχύει μόνο για $x=\pi$. Έτσι λοιπόν, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει ότι

$$\int_0^{\pi}f(x)dx>\int_0^{\pi}[f'(\pi)(x-\pi)+f(\pi)]dx.$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση $f(\pi)=\pi^2$, καθώς και το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Α, η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\int_0^{\pi}f(x)dx>\int_0^{\pi}[\pi(x-\pi)+\pi^2]dx.$$

Όμως,

$$\int_0^{\pi}[\pi(x-\pi)+\pi^2]dx=\int_0^{\pi}\pi x dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{2},$$

οπότε $\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx>\frac{\pi^3}{2}$, όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ 3.4
Λύση

Α. Αρχικά, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι και στο $x_0=0$ και επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0). \qquad (1)$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0\cdot e^0+\alpha=\alpha$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+\beta x+4\right)=4$. Επομένως, από την ισότητα (1) προκύπτει ότι $\boxed{\alpha=4.}$

Η f είναι επιπλέον συνεχής στο $[-1,0]$, επομένως είναι και ολοκληρώσιμη σε αυτό το διάστημα. Έχουμε

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+\beta x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{\beta(-1)^2}{2}-4\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{\beta}{2}+4=\frac{13}{3}-\frac{\beta}{2}.$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η παραπάνω ποσότητα είναι ίση με $\frac{23}{6}$. Επομένως, καταλήγουμε στην πρωτοβάθμια εξίσωση

$$\frac{13}{3}-\frac{\beta}{2}=\frac{23}{6}.$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία για τη λύση πρωτοβάθμιας εξίσωσης, καταλήγουμε άμεσα στη λύση $\boxed{\beta=1.}$ Έτσι, ο τύπος της f θα είναι

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+4, & x<0 \\ xe^x+4, & x\geq 0 \end{cases}.$$

Β. Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Για το αριστερό όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+4-4}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1.$$

Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x+4-4}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x=1.$$

Από την ύπαρξη και την ισότητα των παραπάνω ορίων έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left(x^2+x+4\right)'=2x+1.$$

Ομοίως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left(xe^x+4\right)'=x'e^x+x\left(e^x\right)'+0=e^x+xe^x=(x+1)e^x.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=(2x+1)'=2.$$

Ομοίως, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left((x+1)e^x\right)'=(x+1)'e^x+(x+1)\left(e^x\right)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x.$$

Έπειτα θα δείξουμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$. Όπως και πριν, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα δύο πλευρικά όρια. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to 0^-}2=2.$$

Το δεξί όριο είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)e^x-1}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+(x+1)e^x}{1}=1+1=2,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Προκύπτει έτσι ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f''(0)=1$. Συνοπτικά, προκύπτει από τα παραπάνω ότι

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ (x+1)e^x, & x\geq 0\end{cases} \quad \text{και} \quad f''(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ (x+2)e^x, & x\geq 0\end{cases}.$$

Γ. Θα αποδείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, απ' όπου θα προκύψει ότι η f είναι κυρτή.

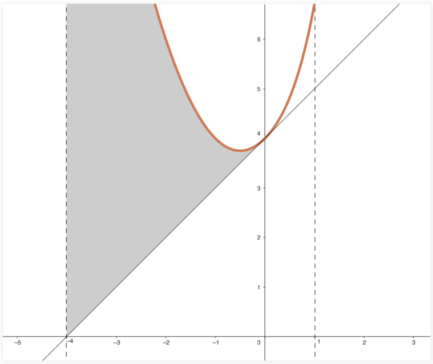
Για $x>0$ ισχύει $x+2>0$ και $e^x>0$, άρα από τον τύπο της f'' που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Από τον ίδιο τύπο έχουμε ότι

Θυμηθείτε ότι αυτός είναι ο ορισμός της κυρτότητας (σελ. 155 του σχολικού βιβλίου).

$f''(x)=2>0$ για κάθε $x<0$. Ισχύει λοιπόν $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, αυτό συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ. Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y=f'(0)(x-0)+f(0)=x+4$$



Αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση C_f θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο $A(0,f(0))$, με εξαίρεση το σημείο επαφής A στο οποίο αυτές οι δύο συμπίπτουν. Επιπλέον, η εξίσωση της εφαπτομένης «συμμετέχει» στο ζητούμενο εμβαδόν από το $x=-4$ και έπειτα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου το ζητούμενο χωρίο είναι το γραμμοσκιασμένο. Σημειώνουμε ότι το χωρίο αυτό δεν φαίνεται εξολοκλήρου στο σχήμα. Ο λόγος είναι ότι το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $x=-5$ έχει τεταγμένη ίση με 24. Θα έπρεπε λοιπόν να κάνουμε σημαντική σμίκρυνση του σχήματος προκειμένου να φαίνεται και αυτό το σημείο, κάτι όμως που θα οδηγούσε σε μειωμένη οπτική πρόσβαση στα υπόλοιπα στοιχεία του σχήματος.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_{-5}^{-4} f(x)dx+\int_{-4}^{0}(f(x)-x-4)dx.$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$E=\int_{-5}^{-4}(x^2+x+4)dx+\int_{-4}^{0}x^2dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, είναι

$$\int_{-5}^{-4}(x^2+x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-5}^{-4}$$

$$=\left(\frac{(-4)^3}{3}+\frac{(-4)^2}{2}+4(-4)\right)-\left(\frac{(-5)^3}{3}+\frac{(-5)^2}{2}+4(-5)\right)=\frac{119}{6}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, είναι

$$\int_{-4}^{0} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0} = \frac{0^3}{3} - \left(\frac{(-4)^3}{3}\right) = \frac{64}{3}.$$

Τελικά, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι ίσο με

$$\boxed{E = 119/6 + 64/3 = 247/6 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}}$$

ΘΕΜΑ 3.5
Λύση

Α. Έστω $x_1, x_2 \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, για τα οποία ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε, θα έχουμε:

$$\frac{1-2x_1}{1-3x_1} = \frac{1-2x_2}{1-3x_2} \Leftrightarrow (1-2x_1)(1-3x_2) = (1-2x_2)(1-3x_1)$$
$$\Leftrightarrow 1-3x_2-2x_1+6x_1x_2 = 1-3x_1-2x_2+6x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι «1-1» κι επομένως θα αντιστρέφεται.

Θα ορίσουμε την f^{-1}. Για κάθε $x \neq \frac{1}{3}$ έχουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1-2x}{1-3x} \Leftrightarrow y - 3xy = 1 - 2x \Leftrightarrow 3xy - 2x = y - 1$$
$$\Leftrightarrow x(3y-2) = y - 1 \overset{3y-2\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y-1}{3y-2}$$

Συμπεραίνουμε ότι $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3x-2}$ για $x \neq \frac{2}{3}$.

Β. Το πεδίο ορισμού της $g = f \circ f$ είναι το $D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$. Αυτές οι συνθήκες γράφονται ισοδύναμα

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ f(x) \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ \frac{1-2x}{1-3x} \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ \frac{1-2x}{1-3x} \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ 3(1-2x) \neq 1-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ 3-6x \neq 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ 3x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Επομένως, $D_g = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Ο τύπος της $g = f \circ f$ είναι

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{1-2f(x)}{1-3f(x)} = \frac{1-2\cdot\frac{1-2x}{1-3x}}{1-3\cdot\frac{1-2x}{1-3x}} = \frac{\frac{1-3x-2+4x}{1-3x}}{\frac{1-3x-3+6x}{1-3x}} = \frac{x-1}{3x-2}.$$

Γ. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$I = \int_1^2 \left(f(x) - \frac{2}{3}\right)dx = \int_1^2 \left(\frac{1-2x}{1-3x} - \frac{2}{3}\right)dx = \int_1^2 \left(\frac{3(1-2x)}{3(1-3x)} - \frac{2(1-3x)}{3(1-3x)}\right)dx$$

$$= \int_1^2 \frac{3(1-2x)-2(1-3x)}{3(1-3x)}dx = \int_1^2 \frac{3-6x-2+6x}{3(1-3x)}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{1-3x}dx$$

$$= -\frac{1}{9}\left[\ln|1-3x|\right]_1^2 = -\frac{1}{9}\left[\ln 5 - \ln 2\right] = -\frac{1}{9}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

Δ. Για $x \geq 1$, η ζητούμενη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x) = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{1-2x}{1-3x} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 2x(1-2x) = 1-3x$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4x^2 = 1 - 3x \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$$

και οι ρίζες του τριωνύμου αντίστοιχα:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 3}{8}.$$

Οπότε $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Αφού όμως $x \geq 1$, τότε δεκτή γίνεται μόνο η τιμή $x = 1$ Τότε έχουμε $h(1) = \frac{1}{2}$ και άρα το σημείο τομής των δυο γραφικών παραστάσεων είναι το $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Επιπλέον, βρίσκουμε το πρόσημο της $\varphi(x) = f(x) - h(x)$ το διάστημα $[1,6]$.

$$\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{1-3x} \geq \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{1-2x}{1-3x} - \frac{1}{2x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(1-2x)-1}{2x(1-3x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+5x-1}{2x(1-3x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-5x+1}{2x(3x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(3x-1)(4x^2-5x+1) \geq 0.$$

Για το διάστημα $[1,6]$ ισχύει ότι $2x>0$, $3x-1>0$ και $4x^2-5x+1>0$ καθώς το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών δηλαδή στο σύνολο $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup(1,+\infty)$. Επομένως $\varphi(x)\geq 0$ στο $[1,6]$. Εομένως, το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται ως εξής

$$E(\Omega)=\int_1^6 (f(x)-h(x))dx=\int_1^6\left(\frac{1-2x}{1-3x}-\frac{1}{2x}\right)dx=\int_1^6\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3x-1)}-\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}[x]_1^6-\frac{1}{9}[\ln|3x-1|]_1^6-\frac{1}{2}[\ln|x|]_1^6 \text{ τ.μ.}=\frac{10}{3}-\frac{1}{9}[\ln17-\ln2]-\frac{1}{2}[\ln6-\ln1] \text{ τ.μ.}$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{1}{9}\ln\left(\frac{17}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln6 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3.6
Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει το πρόσημο της παραγώγου είναι ο $x-1$. Πιο συγκεκριμένα, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘		↗

Η f δεν ορίζεται στο $x=0$, άρα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $(-\infty,1)$.

- $f'(x)>0$ για κάθε $x>1$ και επομένως f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- $f'(x)<0$ για κάθε $x<0$, επομένως f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=e$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)'=\frac{\left(e^x(x-1)\right)'x^2-e^x(x-1)2x}{x^4}=\frac{\left(e^x(x-1)+e^x\right)x^2-2xe^x(x-1)}{x^4}$$

$$=\frac{x^3e^x-2xe^x(x-1)}{x^4}=\frac{xe^x\left(x^2-2(x-1)\right)}{x^4}=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}.$$

Για το τριώνυμο του αριθμητή ισχύει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 1=4-8<0$, άρα θα ισχύει $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, το πρόσημο της f'' εξαρτάται τελικά μόνο από τον παρονομαστή x^3, ο οποίος είναι ξεκάθαρα θετικός για $x>0$ και αρνητικός για $x<0$. Έτσι, το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Πιο αναλυτικά:

- $f''(x)<0$ για κάθε $x<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$.
- $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0)$.

Β. Στη συνέχεια θα βρούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty,$$

καθώς $\lim_{x\to 0^+} e^x=1$ και $\lim_{x\to 0^+} x=0$, ενώ για τον παρονομαστή ισχύει επίσης $x>0$ για $x\to 0^+$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες/πλάγιες ασύμπτωτες:

Βρίσκουμε αρχικά αν υπάρχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Επομένως, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Αναζητούμε λοιπόν πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty,$$

όπου στο δεύτερο και στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Αναζητούμε τώρα οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x\cdot\frac{1}{x}=0,$$

επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $-\infty$. Εφόσον έχει οριζόντια ασύμπτωτη, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Προκειμένου να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της f, χρειαζόμαστε το σύνολο τιμών της. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f, την οποία προσδιορίσαμε προηγουμένως.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0)$, άρα

  $$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to0^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,0),$$

  όπου το όριο στο $-\infty$ υπολογίστηκε προηγουμένως για την εύρεση των ασύμπτωτων, και για το όριο καθώς $x\to0^-$ έχουμε

  $$\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}\cdot e^x\right)=(-\infty)\cdot1=-\infty.$$

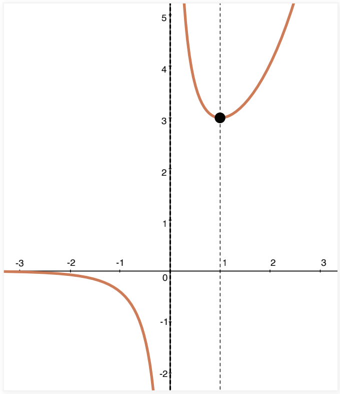
- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(0,1)$, άρα

  $$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=(e,+\infty),$$

  όπου το όριο καθώς $x\to1^-$ προκύπτει με απλή αντικατάσταση και το αριστερό όριο στο $x=0$ υπολογίστηκε προηγουμένως για την εύρεση των ασύμπτωτων.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ και επομένως

  $$f(\Delta_3)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[e,+\infty),$$



όπου το όριο στο $+\infty$ επίσης υπολογίστηκε προηγουμένως για την εύρεση των ασύμπτωτων.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε επίσης χαράξει την ασύμπτωτη $x=0$, καθώς και το σημείο $(1,f(1))$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Γ. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, μετατρέπουμε το πρώτο μέλος της δοσμένης ισότητας ως εξής:

$$\int_1^{x_0}\frac{e^x}{x}dx=\int_1^{x_0}\frac{e^x}{x^2}=\int_1^{x_0}\frac{1}{x}\left(e^x\right)'dx=\left[\frac{e^x}{x}\right]_1^{x_0}-\int_1^{x_0}\left(\frac{1}{x}\right)'e^xdx=\frac{e^{x_0}}{x_0}-e+\int_1^{x}\frac{e^x}{x^2}dx.$$

Έτσι λοιπόν, η δοσμένη ισότητα

$$\int_1^{x_0}\frac{e^x}{x}dx=\int_1^{x_0}\frac{e^x}{x^2}dx$$

είναι ισοδύναμη με τις παρακάτω ισότητες:

$$\frac{e^{x_0}}{x_0}-e+\int_1^{x_0}\frac{e^x}{x^2}dx=\int_1^{x_0}\frac{e^x}{x^2}dx\Leftrightarrow\frac{e^{x_0}}{x_0}=e\Leftrightarrow f(x_0)=e.$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και επομένως, αφού $x_0>1$, έπεται ότι

$$f(x_0)>f(1)\Rightarrow f(x_0)>e.$$

Έτσι, δεν υπάρχει $x_0>1$ το οποίο να ικανοποιεί τη δοσμένη ισότητα.

Δ. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες όπως ακριβώς και στο προηγούμενο ερώτημα, συμπεραίνουμε ότι η δοσμένη ισότητα είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\frac{e^\beta}{\beta}-\frac{e^\alpha}{\alpha}=0\Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha)$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και επομένως, αν είχαμε $1<\alpha<\beta$, τότε θα ήταν $f(\alpha)<f(\beta)$ κι επομένως τα δύο μέλη δεν θα ήταν ίσα. Ομοίως, δεν θα μπορούσαν να είναι ίσα αν είχαμε $1<\beta<\alpha$.

Επομένως, δεν υπάρχουν $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει η δοσμένη ισότητα.

ΘΕΜΑ 3.7
Λύση

Α. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $O(0,0)$, θα είναι $f(0)=0$ και επομένως

$$\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=0,}$$

δηλαδή $f(x)=\alpha x^2+\beta x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)'=2\alpha x+\beta.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γραμμική και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=(2\alpha x+\beta)'=2\alpha.$$

Συνεπώς, επειδή $f''(0)=-1$, συμπεραίνουμε ότι $2\alpha=-1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-1/2.}$

Επιπλέον, αφού οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(2,f(2))$ είναι μεταξύ τους κάθετες, οι συντελεστές κλίσης τους, έστω α_0 και α_2, θα έχουν γινόμενο ίσο με -1, δηλαδή $\alpha_0\alpha_2=-1$. Ισχύει όμως $\alpha_0=f'(0)$ και $\alpha_2=f'(2)$. Από τον τύπο της f' προκύπτει ότι $f'(0)=\beta$ και $f'(2)=4\alpha+\beta=-2+\beta$, άρα η παραπάνω ισότητα γράφεται ως

$$\beta(-2+\beta)=-1 \Leftrightarrow \beta^2-2\beta+1=0 \Leftrightarrow (\beta-1)^2=0 \; \boxed{\Leftrightarrow \beta=1,}$$

όπως θέλαμε. Ο τύπος της f είναι λοιπόν $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο

$$E_1=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2\left|-\frac{1}{2}x^2+x\right|dx$$

Οι ρίζες της f είναι $x_1=0,\ x_1=2$. Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση $f(x)=0$ παίρνουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+x=0 \Leftrightarrow -x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(-x+2)=0,$$

της οποίας λύσεις είναι πράγματι οι $x_1=0$ και $x_2=2$. Ένας εναλλακτικός τρόπος να λύσουμε την εξίσωση θα ήταν με τη χρήση διακρίνουσας.

Εφόσον ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου είναι ο $-\frac{1}{2}$ που είναι αρνητικός, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας προσήμου για την f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$. Επομένως

$$E_1=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\left[-\frac{1}{6}\cdot 8+\frac{2^2}{2}\right]=2-\frac{4}{3}$$

$$\boxed{=\frac{2}{3}\text{ τετραγωνικές μονάδες}}$$

γ. Η εξίσωση εφαπτομένης (ε_1) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$ θα είναι η

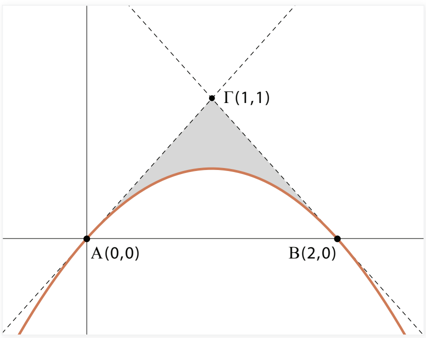
$$(\varepsilon_1): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

Αντικαθιστώντας $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, η εξίσωση γράφεται ως $(\varepsilon_1): y=x$.

Η εξίσωση εφαπτομένης (ε_2) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(2,f(2))$ θα έχει τύπο

$$\varepsilon_2: y=f'(2)(x-2)+f(2)=-(x-2)=-x+2.$$

Από τον τύπο της f' που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα προκύπτει άμεσα ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\left(-\frac{1}{2}x+1\right)'=-\frac{1}{2}<0$. Επομένως, η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και επομένως κάθε εφαπτομένη της θα είναι «πάνω» από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $\Gamma(1,1)$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Για να βρούμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, αρκεί να αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου την τιμή του ολοκληρώματος που βρήκαμε στο Ερώτημα Β και επομένως:

$$E = \frac{AB \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma}{2} - E_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{E_1}{2}.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $\boxed{E_1 = 2E \text{ , όπως θέλαμε.}}$

ΘΕΜΑ 3.8
Λύση

A. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\kappa(1) = 2 + \ln 2$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}(\kappa(x) - E) = 0$. Η συνάρτηση κ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$\kappa'(x) = 2 + \frac{1}{x+1} > 0$$

για κάθε $x > -1$. Επομένως, η κ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

- Αν $x < 1$, τότε $\kappa(x) < \kappa(1) \Leftrightarrow \kappa(x) - E < 0$.
- Αν $x > 1$, τότε $\kappa(x) > \kappa(1) \Leftrightarrow \kappa(x) - E > 0$.

Αυτό σημαίνει όμως ότι

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\kappa(x) - E} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\kappa(x) - E} = +\infty.$$

Αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, $\boxed{\text{το όριο πράγματι δεν υπάρχει.}}$

B. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$, θα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και άρα

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \alpha - \eta\mu(\pi) = \frac{1}{1(\beta + \ln 1)} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\beta}.}$$

Έτσι, ο τύπος της f θα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} - \eta\mu x, & -1 \le x < 1 \\[2mm] \dfrac{1}{x(\beta + \ln x)}, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Αφού $0 < \beta \le 1$, θα ισχύει $\frac{1}{\beta} \ge 1$. Επομένως, για κάθε $x \in [-1, 1)$ ισχύει

$$\frac{1}{\beta} - \eta\mu(\pi x) \ge 1 - \eta\mu(\pi x) \ge 0.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,1)$. Επίσης, $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$, καθώς για κάθε $x\geq 1$ ισχύει ότι $\ln x\geq 0$. Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$, $x=e$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\int_{-1}^{e}|f(x)|dx \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_{-1}^{e}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\beta}-\eta\mu(\pi x)\right]dx=\left[\frac{x}{\beta}-\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu(\pi x)\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu(\pi)-\left[-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu(-\pi)\right]=\frac{2}{\beta},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sigma\upsilon\nu(\pi)=\sigma\upsilon\nu(-\pi)$. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_{1}^{e}f(x)dx=\int_{1}^{e}\frac{1}{x(\beta+\ln x)}dx.$$

Γι' αυτόν τον υπολογισμό, θέτουμε $y=\beta+\ln x$. Τότε, θα είναι $dy=\frac{1}{x}dx$. Υπολογίζουμε τώρα τα όρια ολοκλήρωσης.

- Όταν $x=1$, έχουμε $y=\beta+\ln 1=\beta$.
- Όταν $x=e$, έχουμε $y=\beta+\ln e=\beta+1$.

Έτσι, το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_{1}^{e}\frac{1}{x(\beta+\ln x)}dx=\int_{1}^{e}\frac{1}{\beta+\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\int_{\beta}^{\beta+1}\frac{1}{y}dy$$

$$=[\ln y]_{\beta}^{\beta+1}=\ln(\beta+1)-\ln\beta=\ln\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\beta}\right).$$

Επομένως, από την υπόθεση $E=2+\ln 2$ που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση προκύπτει ότι $\frac{2}{\beta}+\ln\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=2+\ln 2$. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$h(x)=\frac{2}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad 0<x\leq 1.$$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$, τότε ισχύουν τα εξής:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2} \qquad (1)$$

Επιπλέον, ισχύει $1+\frac{1}{x_1} > 1+\frac{1}{x_2}$ και, επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, προκύπτει ότι

$$\ln\left(1+\frac{1}{x_1}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{x_2}\right) \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), λαμβάνουμε ότι $h(x_1) > h(x_2)$, επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, άρα θα είναι και «1-1» στο πεδίο ορισμού της. Η εξίσωση

$$\frac{2}{\beta} + \ln\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = 2 + \ln 2$$

που έχουμε παραπάνω γράφεται ισοδύναμα ως

$$h(\beta) = 2 + \ln 2 = h(1)$$

και, επειδή η h είναι «1-1», παίρνουμε $\beta = 1$ και επομένως $\boxed{\alpha = \frac{1}{\beta} = 1.}$

Γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1)$ ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in [-1,1)$ ισχύει

$$f'(x) = \left(1 - \eta\mu(\pi x)\right)' = -\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x).$$

Θα βρούμε τα σημεία μηδενισμού της f'. Ισχύει η ισοδυναμία

$$-\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\pi x) = 0.$$

Λύσεις αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι οι $\pi x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ή ισοδύναμα $x = 2\kappa \pm \frac{1}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Όμως, αφού $x \in [-1,1)$, η μόνη αποδεκτή τιμή του κ είναι η $\kappa = 0$, η οποία δίνει $x = \pm\frac{1}{2}$ Για όλες τις υπόλοιπες τιμές του κ, προκύπτουν τιμές του x που δεν ανήκουν στο $[-1,1)$, οπότε δεν είναι αποδεκτές. Επομένως, τα $\boxed{x = \pm\frac{1}{2}}$ αποτελούν κρίσιμα σημεία της f.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>1$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+x\ln x}\right)'=\frac{-(x+x\ln x)'}{(x+x\ln x)^2}=-\frac{\left(1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)'}{(x+x\ln x)^2}=-\frac{2+\ln x}{(x+x\ln x)^2}.$$

Για κάθε $x>1$ ισχύει ότι $\ln x>0$ και έτσι είναι άμεσο ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x>1$. Επομένως, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(1,+\infty)$. Τέλος, ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ υπολογίζοντας τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.

Θυμηθείτε τον ορισμό των κρίσιμων σημείων στη σελ. 143 του σχολικού βιβλίου. Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία η f εν παραγωγίζεται χαρακτηρίζονται επίσης ως κρίσιμα.

Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-\eta\mu(\pi x)-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-\eta\mu(\pi x)}{x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{(-\eta\mu(\pi x))'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{1}=\pi,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Για το δεξί όριο έχουμε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x+x\ln x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x-x\ln x}{(x-1)(x+x\ln x)}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{-1-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{x+x\ln x+(x-1)\left(1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{-2-\ln x}{x+x\ln x+(x-1)(2+\ln x)}\right)=-2\neq\pi,$$

όπου και πάλι στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L' Hospital. Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και επομένως το $\boxed{x=1}$ αποτελεί επίσης κρίσιμο σημείο της f.

Δ. Παρατηρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών. Επίσης, η φ είναι συνεχής και στο $x_0=1$, καθώς:

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-1}{x-1}=-2=\varphi(1),$$

όπου το όριο στην πρώτη γραμμή υπολογίστηκε ίσο με -2 στο προηγούμενο ερώτημα. Επιπλέον, η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$\varphi'(x)=\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)'=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}.$$

Θεωρούμε τυχόν $x>1$. Τότε, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$ για το οποίο:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-1}{x-1}.$$

Όμως, αφού η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, τότε f' γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Αφού τώρα $x>\xi$, τότε $f'(x)>f'(\xi)$ και επομένως $f'(x)>\dfrac{f(x)-1}{x-1}$. Αφού λοιπόν ισχύει $x>1$, συμπεραίνουμε από την τελευταία σχέση με απαλοιφή παρονομαστών ότι

$$f'(x)(x-1)>f(x)-1\Rightarrow f'(x)(x-1)-f(x)+1>0.$$

Από τον τύπο της φ' που υπολογίστηκε παραπάνω προκύπτει τώρα ότι $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x>1$ και, επειδή φ συνεχής και στο άκρο $x_0=1$, θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το κλειστό διάστημα $[1,+\infty)$.

Ε. **i.** Για κάθε $x\geq1$ ισχύει ότι $1+\ln x\geq1$ και $0<\dfrac{1}{x}\leq1$, επομένως είναι όλα θετικά. Συνεπώς, για κάθε $x\geq1$, έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

$$\boxed{\frac{1}{1+\ln x}\geq\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\geq1+\ln x\Leftrightarrow \ln x\leq x-1.}$$

Η τελευταία ανισότητα εμφανίζεται στη σελ. 148 του σχολικού βιβλίου ως εφαρμογή και, ως εκ τούτου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη. Αυτή η ανισότητα λοιπόν είναι αληθής για κάθε $x>0$, άρα φυσικά παραμένει αληθής αν περιοριστούμε στα $x\geq1$. Το ζητούμενο λοιπόν προκύπτει από τις παραπάνω ισοδυναμίες.

Μάλιστα, σύμφωνα με την εφαρμογή που αναφέραμε, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε και στη ζητούμενη ανισότητα η ισότητα θα ισχύει μόνο σε αυτήν την περίπτωση.

Σημείωση:

Φυσικά, σε περίπτωση που δεν θυμηθούμε την εν λόγω εφαρμογή, υπάρχουν και εναλλακτικοί τρόποι να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα. Ένας από αυτούς είναι με μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης $g(x)=x-1-\ln x$, όπως άλλωστε και στην απόδειξη της εφαρμογής στη σελ. 148 του σχολικού βιβλίου.

ii. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$\int_1^e F(x)dx=\int_1^e (x)'F(x)dx=\left[xF(x)\right]_1^e-\int_1^e xF'(x)dx$$

$$=eF(e)-F(1)-\int_1^e xf(x)dx=eF(e)-\int_1^e xf(x)dx. \quad (1)$$

Ισχύει όμως

$$\int_1^e xf(x)dx=\int_1^e x\cdot\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^e\frac{1}{1+\ln x}dx\underset{\text{i.}}{\overset{\text{i.}}{>}}\int_1^e\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^e=\ln e-\ln 1=1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, στην ανισότητα του προηγούμενου ερωτήματος, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\int_1^e xf(x)dx>1\Rightarrow-\int_1^e xf(x)dx<-1.$$

Τελικά, επιστρέφοντας στην (1) παίρνουμε ότι

$$\boxed{\int_1^e F(x)dx=eF(e)-\int_1^e xf(x)dx<eF(e)-1,}$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 3.9
Λύση

Α. Θέτουμε $\int_{-1}^{0} f(x)dx = c$. Τότε, για $x \le 0$ ισχύει $f(x) = x^2 - 4x - \frac{3}{4}c$, άρα

$$c = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - 4x - \frac{3}{4}c\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 - \frac{3cx}{4}\right]_{-1}^{0} = -\left(\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - \frac{3c(-1)}{4}\right) = \frac{7}{3} - \frac{3c}{4}.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν, προκύπτει η πρωτοβάθμια εξίσωση

$$c = \frac{7}{3} - \frac{3c}{4} \Leftrightarrow c = \frac{28 - 9c}{12} \Leftrightarrow 12c = 28 - 9c$$

$$\Leftrightarrow 21c = 28 \Leftrightarrow c = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}.$$

Τελικά, ισχύει λοιπόν $\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{4}{3}.}$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στον τύπο της f, παίρνουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \le 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} - 4x + \alpha, & x > 0 \end{cases}.$$

Η f είναι από υπόθεση συνεχής, άρα ισχύει $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x^2 - 4x - 1) = -1$.
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} - 4x + \alpha\right) = 1 + \alpha$.

Επομένως, θα πρέπει $1 + \alpha = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2,}$ οπότε τελικά ο τύπος της f θα είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \le 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} - 4x - 2, & x > 0 \end{cases}.$$

Β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,0)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει $f'(x)=(x^2-4x-1)'=2x-4$ για κάθε $x<0$. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{x}-4x-2\right)'=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}-4.$$

για κάθε $x>0$. Ελέγχουμε τώρα εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ υπολογίζοντας τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.

- Για το αριστερό όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-4x-1-(-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-4x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-4)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x-4)=-4$$

- Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-4x-2-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-4x-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-4x^2-x}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\eta\mu x-4x^2-x)'}{(x^2)'}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-8x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}-4\right)=-4,$$

όπου στο τέταρτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital.

Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=-4$. Ο τύπος της f' είναι λοιπόν

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}2x-4, & x\le 0\\ \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}-4, & x>0\end{cases}.}$$

Η f' είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική. Ομοίως, η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξη συνεχών. Ελέγχουμε ότι η f' είναι συνεχής και στο $x_0=0$

- $f'(0)=-4$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-4)=-4-$

Για το δεξί όριο θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'}{(x^2)'}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{2x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\eta\mu x}{2}=0,$$

οπότε, συμπεριλαμβάνοντας και τη σταθερά -4 που εμφανίζεται στον τύπο της f', συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-4$.

> Τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, άρα η f' είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\quad x\in(0,\pi]$. Τότε, η T είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως διαφορά παραγωγίσιμων, με

$$T'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x\leq 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\eta\mu x\geq 0$ για κάθε $x\in(0,\pi]$. Η ισότητα στην τελευταία ανισότητα, όπως και στην παραπάνω, ισχύει μόνο για $x=\pi$, οπότε η T είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi]$. Επομένως, για το σύνολο τιμών της ισχύει

$$T((0,\pi])=\left[T(\pi),\lim_{x\to 0^+}T(x)\right)=[-\pi,0),$$

άρα $T(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi]$. Με άλλα λόγια, για κάθε $x\in(0,\pi]$ ισχύει $x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x<0$, οπότε

$$\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}<0$$

για κάθε $x\in(0,\pi]$. Συνεπώς, για κάθε $x\in(0,\pi]$ έχουμε

$$f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}-4<-4.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $f'(0)=-4$ και επομένως τελικά $\boxed{f'(x)\leq -4 \text{ για κάθε } x\in[0,\pi].}$

Δ. Ισχύει

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{4}{3}+\int_{0}^{1}f(x)dx.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει ότι $ημx < x$, οπότε $\frac{ημx}{x} < 1$ και έτσι

$$f(x) < -4x - 1 \quad \text{για } x \in (0,1].$$

Από τη σελ. 53 του σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι $|ημx| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την $\alpha \le |\alpha|$ που ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, παίρνουμε ότι $ημx \le x$ για κάθε $x > 0$.

Επιπλέον, έχουμε ότι $f(0) = -1 = -4 \cdot 0 - 1$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $f(x) \le -4x - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Έτσι,

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 (-4x-1)dx = \left[-2x^2 - x\right]_0^1 = -3.$$

Τελικά,

$$\boxed{\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{4}{3} + \int_0^1 f(x)dx < \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

ΘΕΜΑ 3.10

Λύση

Α. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

για κάθε $x > 0$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Επίσης, το πρόσημο της g' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή $1 - \ln x$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- $g'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < e$ και η g είναι συνεχής στη θέση $x = e$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$.

- $g'(x) < 0$ για κάθε $x > e$ και η g είναι συνεχής στη θέση $x = e$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e,+\infty)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \left(3e^{-x} + 2\right)' = -3e^{-x} \quad \text{και} \quad f''(x) = 3e^{-x} > 0.$$

Επομένως, $\boxed{\text{η } f \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.}$

Β. Η συνάρτηση $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού $D_{f \circ g} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\}$. Αυτές οι συνθήκες γράφονται ισοδύναμα

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g(x) \in R \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,$$

οπότε $D_{f \circ g} = (0, +\infty)$. Επιπλέον, για κάθε $x > 0$ θα είναι

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3e^{-\frac{\ln x}{x}} + 2 > 0}$$

καθώς είναι άθροισμα θετικών όρων.

Γ. Έχουμε

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{f(x)+4}dx = \int_0^1 \frac{1}{3e^{-x}+6}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(3/e^x\right)+6}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{6e^x+3}dx.$$

Θέτουμε $y = 6e^x + 3$. Τότε, $dy = 6e^x dx$, συνεπώς, $e^x dx = \frac{1}{6}dy$. Υπολογίζουμε τώρα τα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x = 0$, θα είναι $y = 9$.
- Όταν $x = 1$, θα είναι $y = 6e + 3$.

Επομένως,

$$I_1 = \frac{1}{6}\int_9^{6e+3} \frac{1}{y}dy = \frac{1}{6}\left[\ln|y|\right]_9^{6e+3} = \frac{1}{6}\left[\ln(6e+3) - \ln 9\right] = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{6e+3}{9}\right).$$

Για το I_2 τώρα είναι:

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{6x^2\left(1-x^2\right)}{f(x)+1}dx = \int_{-1}^0 \frac{6x^2\left(1-x^2\right)}{f(x)+1}dx + \int_0^1 \frac{6x^2\left(1-x^2\right)}{f(x)+1}dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y = -x$. Τότε, $dy = -dx$. Όταν $x = -1$, είναι $y = 1$ και, όταν $x = 0$, είναι $y = 0$. Έτσι, το παραπάνω άθροισμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$I_2=\int_1^0\frac{6y^2(1-y^2)}{f(-y)+1}(-dy)+\int_0^1\frac{6x^2(1-x^2)}{f(x)+1}dx=\int_0^1\frac{6y^2(1-y^2)}{f(-y)+1}dy+\int_0^1\frac{6x^2(1-x^2)}{f(x)+1}dx$$

Αλλάζοντας και πάλι τη μεταβλητή y σε x, η παραπάνω ποσότητα ξαναγράφεται ως εξής:

> Αυτή η αλλαγή δεν πρέπει μας μπερδεύει, εξάλλου η μεταβλητή μέσα στο ολοκλήρωμα εξυπηρετεί μόνο τον συμβολισμό. Ένα ολοκλήρωμα με μεταβλητή ολοκλήρωσης x δεν αλλάζει σε τίποτα αν αντικαταστήσουμε το x με y ή με (αρκεί να μην υπάρχει x ή t. ήδη κάπου αλλού μέσα στο ολοκλήρωμα).

$$I_2=\int_0^1\left[\frac{6x^2(1-x^2)}{f(-x)+1}+\frac{6x^2(1-x^2)}{f(x)+1}\right]dx$$

$$=\int_0^1 6x^2(1-x^2)\left(\frac{1}{3e^x+3}+\frac{1}{3e^{-x}+3}\right)dx$$

$$=\int_0^1 6x^2(1-x^2)\left(\frac{1}{3e^x+3}+\frac{e^x}{3+3e^x}\right)dx.=\int_0^1 6x^2(1-x^2)\frac{1+e^x}{3(1+e^x)}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2(1-x^2)dx=2\int_0^1(x^2-x^4)dx=2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}.$$

Δ. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y=\ln x$. Τότε, $dy=\frac{1}{x}dx$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x=1$, είναι $y=\ln 1=0$.
- Όταν $x=e$, είναι $y=\ln e=1$.

Έχουμε λοιπόν

$$\int_1^e g(x)dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 y\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

Από το Ερώτημα Δ1 ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$. Επίσης, η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y=f'(0)(x-0)+f(0)=-3x+5.$$

Λόγω της κυρτότητας, η C_f θα είναι πάνω από την εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους, δηλαδή το A. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x)\geq -3x+5$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα, $f(g(x))\geq -3g(x)+5$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $g(x)=0$, δηλαδή όταν $x=1$.

$$\int_1^e f(g(x))dx>\int_1^e(-3g(x)+5)dx=-\frac{3}{2}+5(e-1)=5e-5-\frac{3}{2}=5e-\frac{13}{2}.$$

Επιπλέον, από το Α έχουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$ και επομένως για κάθε $x\in[1,e]$ θα ισχύει ότι $g(x)\geq g(1)$, με ισότητα μόνο στο $x=1$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς $f(g(x))\leq f(0)$ για κάθε $x\in[1,e]$, δηλαδή $f(g(x))\leq 5$ για κάθε $x\in[1,e]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως,

$$\int_1^e f(g(x))dx<\int_1^e 5dx=5(e-1)=5e-5.$$

Έτσι, τελικά

$$\boxed{5e-\frac{13}{2}<\int_1^e f(g(x))dx<5e-5.}$$

ΘΕΜΑ 3.11
Λύση

Α. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$2\sqrt{x}(x-1)f'(x)+2\sqrt{x}f(x)=e^{\sqrt{x}}\overset{2\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow}(x-1)f'(x)+f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$$
$$\Leftrightarrow\left[(x-1)f(x)\right]'=\left[e^{\sqrt{x}}\right]'.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι $(x-1)f(x)=e^{\sqrt{x}}+c$ για κάθε $x>1$ και επομένως $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}+c}{x-1}$, $x>1$. Λόγω της συνέχειας της f προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=0\cdot f(1)=0,$$

θα έχουμε $c+e=0\Leftrightarrow c=-e$. Λόγω συνέχειας θα έχουμε ότι

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-e\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=\frac{e}{2},$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital. Επομένως, ο τύπος της f για $x\in[1,+\infty)$ θα είναι

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}, & x>1\\[2mm] \dfrac{e}{2}, & x=1\end{cases}.$$

Αφού όμως η f είναι άρτια, θα ισχύει ότι $f(-1)=f(1)=\frac{e}{2}$. Επιπλέον, για κάθε $x<-1$ ισχύει $-x>1$, άρα, αφού η f είναι άρτια,

$$f(x)=f(-x)=\frac{e^{\sqrt{-x}}-e}{-x-1}.$$

Αρχικά, ίσως μας φανεί παράδοξο το "$-$" κάτω από τη ρίζα, όμως παρατηρήστε ότι $x<-1$, άρα ο $-x$ είναι στην πραγματικότητα θετικός.

Συνοψίζοντας, ισχύει ότι

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sqrt{|x|}}-e}{|x|-1}, & |x|>1\\ \dfrac{e}{2}, & |x|=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{e^{\sqrt{|x|}}-e}{|x|-1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ \dfrac{e}{2}, & x=\pm1\end{cases}.$$

Β. Για κάθε $x>1$ η αποδεικτέα σχέση γράφεται ως εξής:

$$(x-1)e^{\sqrt{x}}>2\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}-e\right)\overset{x>1}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}>\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{\sqrt{x}}, x\in[1,+\infty)$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$, ως σύνθεση δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

και

$$g''(x)=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}2\sqrt{x}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x}=\frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

Για κάθε $x>1$ ισχύουν τα εξής:

- $\sqrt{x}-1>0$,
- $x\sqrt{x}>1$,
- $e^{\sqrt{x}}>0$.

Από αυτά προκύπτει ότι $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και επομένως g κυρτή στο $[1,+\infty)$. Θεωρούμε τυχόν $x>1$. Τότε, $1<\sqrt{x}$, άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[1,\sqrt{x}\right]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$, ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\Leftrightarrow g'(\xi)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}.$$

Όμως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\xi<\sqrt{x}\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}g'(\xi)<g'\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}<\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\overset{x>1}{\Leftrightarrow}(x-1)e^{\sqrt{x}}>2\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}-e\right),$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}\right)'=\frac{\frac{(x-1)e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-\left(e^{\sqrt{x}}-e\right)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)e^{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}-e\right)}{2\cdot\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

Από το Ερώτημα Β ισχύει ότι $(x-1)e^{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}-e\right)>0$ για κάθε $x>1$ και επομένως $f'(x)>0$ για κάθε $x>1$. Επειδή η f είναι και συνεχής στο $x_0=1.$, θα έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,-1]$ με $x_1<x_2$ έχουμε $-x_1>-x_2$ και $-x_1,-x_2\in[1,+\infty)$, επομένως $f(-x_1)>f(-x_2)$, αφού $f\nearrow[1,+\infty)$. Επειδή όμως f άρτια, έπεται ότι $f(x_1)>f(x_2)$ και έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(2-|x|)f(x)-1, x\in[1,2]$. Τότε η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών. Επιπλέον:

- $h(1)=f(1)-1=\frac{e}{2}-1>0,$
- $h(2)=-1<0.$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(1,2)$, έτσι ώστε $h(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=\frac{1}{2-|x_1|}$. Επειδή όμως η f είναι άρτια, θα ισχύει ότι

$$f(-x_1)=f(x_1)=\frac{1}{2-|x_1|}=\frac{1}{2-|-x_1|},$$

άρα το $x_2=-x_1\in(-2,-1)$ είναι επίσης ρίζα αυτής της εξίσωσης. Επιπλέον, για κάθε $x<-1$ ισχύει ότι $f(x)=f(-x)$ με $-x>1$ και επομένως με παραγώγιση έχουμε $f'(x)=-f'(-x)$, οπότε $f'(x_1)=-f'(-x_1)=-f'(x_2)$. Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι στα σημεία $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ οι εφαπτόμενες της C_f έχουν αντίθετες κλίσεις.

Αν ω,θ αντίστοιχα είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτομένες με τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε

$$f'(x_2)=-f'(x_1)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi(\pi-\theta).$$

Όμως, για κάθε $x>1$ ισχύει $f'(x)>0$ και επομένως $\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ενώ για κάθε $x<-1$ έχουμε ότι $f'(x)<0$, οπότε $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και έτσι $(\pi-\theta)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η η $\varphi(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι «1-1» στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι $\omega=\pi-\theta$, οπότε $\omega+\theta=\pi$ και έτσι οι γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ είναι μεταξύ τους παραπληρωματικές.

Ε. Για κάθε $x\geq 1$ έχουμε $g(x)=f(x)$ και, αφού f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, τότε θα έχουμε και ότι g γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και επομένως θα αντιστρέφεται. Για το ολοκλήρωμα

$$\int_{e/2}^{(e^2-e)/3}\left(\frac{1+x}{x}\cdot g^{-1}(x)\right)dx$$

θέτουμε $y=g^{-1}(x)$. Τότε, ισχύει $x=g(y)$, άρα $dx=g'(y)dy$. Επίσης, αν $x=e/2$, τότε

$$g(y)=\frac{e}{2}\Leftrightarrow g(y)=g(1)\overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} y=1$$

και, αν $x=\frac{e^2-e}{3}$, τότε

$$g(y)=\frac{e^2-e}{3}\Leftrightarrow g(y)=g(4)\overset{g\ "1-1"}{\Leftrightarrow} y=4.$$

Έτσι, θα έχουμε:

$$\int_{e/2}^{(e^2-e)/3}\left(\frac{1+x}{x}\cdot g^{-1}(x)\right)dx=\int_1^4\frac{1+g(y)}{g(y)}\cdot y\cdot g'(y)dy.$$

Επομένως, θα ισχύει ότι

$$\int_1^4\left(g(x)-\frac{xg'(x)}{g(x)}\right)dx+\int_{e/2}^{(e^2-e)/3}\left(\frac{1+x}{x}\cdot g^{-1}(x)\right)dx=$$

$$=\int_1^4\left(g(x)-\frac{xg'(x)}{g(x)}\right)dx+\int_1^4\frac{1+g(x)}{g(x)}xg'(x)dx$$

$$=\int_1^4\left(g(x)-\frac{xg'(x)}{g(x)}\right)dx+\int_1^4\left(\frac{1}{g(x)}+1\right)xg'(x)dx$$

$$=\int_1^4\left(g(x)+xg'(x)\right)dx$$

$$=\left[xg(x)\right]_1^4=4g(4)-g(1)$$

$$=4\frac{e^2-e}{3}-\frac{e}{2}.$$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η αποδεικτέα ισοδύναμα γράφεται:

$$\etaμx\left(e^{\frac{e^x}{2}}-e\right)>\left(e^{\frac{1+\etaμx}{2}}-e\right)\left(e^x-1\right)\Leftrightarrow \etaμx\left(e^{\sqrt{e^x}}-e\right)>\left(e^{\sqrt{1+\etaμx}}-e\right)\left(e^x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{e^x}}-e\right)>\frac{e^{\sqrt{1+\etaμx}}-e}{\etaμx}\left(e^x-1\right)\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{e^x}}-e\right)>\frac{e^{\sqrt{1+\etaμx}}-e}{1+\etaμx-1}\left(e^x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{e^{\sqrt{e^x}}-e}{e^x-1}>\frac{e^{\sqrt{1+\etaμx}}-e}{1+\etaμx-1}\Leftrightarrow f\left(e^x\right)>f\left(1+\etaμx\right),$$

όπου στο δεύτερο και στο τέταρτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\etaμx>0$ και $e^x-1>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι $e^x,1+\etaμx\in\left(1,+\infty\right)$ και επομένως, αφού f γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα, η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$f\left(e^x\right)>f\left(1+\etaμx\right)\Leftrightarrow e^x>1+\etaμx.$$

1ος τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=e^x-1-\etaμx,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Τότε, η T είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $T'(x)=e^x-συνx$. Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει

$$e^x>1>συνx$$

οπότε $T'(x)>0$ και επομένως η T είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Έτσι, θα έχουμε ότι

$$T(x)>T(0)=0$$

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

2ος τρόπος:

Για κάθε $x \in (0, \pi/2]$ ισχύει ότι $e^x > 1 + x > 1 + \eta\mu x$ και επομένως $e^x > 1 + \eta\mu x$ στο ζητούμενο διάστημα. Ωστόσο, η ανισότητα $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ χρειάζεται απόδειξη. Η απόδειξη μπορεί να γίνει είτε με Θ.Μ.Τ., είτε με τη μέθοδο ακροτάτων, είτε με κυρτότητα και εφαπτομένη, είτε μέσω της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$ που, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη λύση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

ΘΕΜΑ 3.12

Λύση

Α. Ξεκινάμε με το πρώτο ολοκλήρωμα και εφαρμόζουμε διαδοχικά ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} 4f(x)\eta\mu(2x)dx &= \int_0^{\pi/2} 2f(x)\left(-\sigma\upsilon\nu(2x)\right)' dx \\
&= -2\left[f(x)\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi/2} 2f'(x)\sigma\upsilon\nu(2x)dx \\
&= -2\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\pi - f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right) + \int_0^{\pi/2} f'(x)\left(\eta\mu(2x)\right)' dx \\
&= 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left[f'(x)\eta\mu 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f''(x)\eta\mu(2x)dx \\
&= 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\pi/2} f''(x)\eta\mu(2x)dx.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας το πρώτο και το τελευταίο μέλος της παραπάνω ισότητας, παίρνουμε ότι

$$\int_0^{\pi/2} 4f(x)\eta\mu(2x)dx + \int_0^{\pi/2} f''(x)\eta\mu(2x)dx = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως, στην εκφώνηση του προβλήματος, μας έχει δοθεί ότι το πρώτο μέλος της τελευταίας ισότητας ισούται με $2e^{\pi/2}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\pi/2}, \text{ οπότε } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}.}$$

Β. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$f'(x)=f(x)+e^x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^x\sigma\upsilon\nu x$$
$$\overset{\cdot e^{-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=\sigma\upsilon\nu x$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)'=(\eta\mu x)'.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $f(x)e^{-x}=\eta\mu x+c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ έχουμε άμεσα ότι $0=\eta\mu 0+c\Leftrightarrow c=0$ και επομένως $f(x)e^{-x}=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\boxed{f(x)=e^x\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Γ. **i.** Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$, επομένως θα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Θα υπολογίσουμε τις τιμές $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$. Ισχύει

$$\varphi(\alpha)=e^\alpha\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)-f(\alpha)\left(e^\beta-e^\alpha\right)=e^\alpha f(\beta)-e^\beta f(\alpha).$$

Επίσης,

$$\varphi(\beta)=e^\beta\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)-f(\beta)\left(e^\beta-e^\alpha\right)=e^\alpha f(\beta)-e^\beta f(\alpha)=\varphi(\alpha).$$

Έτσι, η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Αφού η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $\theta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $\varphi'(\theta)=0$. Όμως, ισχύει

$$\varphi'(x)=e^x\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)-f'(x)\left(e^\beta-e^\alpha\right)$$

και επομένως η παραπάνω ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\varphi'(\theta)=0\Leftrightarrow e^\theta\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)-f'(\theta)\left(e^\beta-e^\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e^\theta\left(e^\beta\eta\mu\beta-e^\alpha\eta\mu\alpha\right)-\left(e^\theta\eta\mu\theta+e^\theta\sigma\upsilon\nu\theta\right)\left(e^\beta-e^\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e^\theta\left(e^\beta\eta\mu\beta-e^\alpha\eta\mu\alpha\right)=e^\theta\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)\left(e^\beta-e^\alpha\right)$$
$$\overset{\alpha<\beta\Rightarrow e^\alpha\neq e^\beta}{\Leftrightarrow}\boxed{\frac{e^\beta\eta\mu\beta-e^\alpha\eta\mu\alpha}{e^\beta-e^\alpha}=\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta,}\quad \text{όπως θέλαμε.}$$

Δ. **i.** Χρησιμοποιώντας διαδοχικά ολοκλήρωση κατά παράγοντες, προκύπτει ότι

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} e^x ημx dx=\int_0^{\pi}(e^x)' ημx dx$$

$$=\left[e^x ημx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x συνx dx.=-\int_0^{\pi}(e^x)' συνx dx$$

$$=-\left[e^x συνx\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^x(-ημx)dx$$

$$=-\left(-e^{\pi}-1\right)-\mathrm{I}=e^{\pi}+1-\mathrm{I}.$$

Ισχύει λοιπόν $\mathrm{I}=e^{\pi}+1-\mathrm{I}\Leftrightarrow 2\mathrm{I}=e^{\pi}+1\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I}=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}.}$

ii. Με αντικατάσταση του τύπου της f, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$J=\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-x} f(x) συν^3x dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2} ημx\cdot συν^3x dx.$$

Θέτουμε $y=συνx.$ Τότε $dy=-ημxdx$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x=\dfrac{\pi}{4}$, θα είναι $y=συν\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Όταν $x=\dfrac{\pi}{2}$, θα είναι $y=συν\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Επομένως, θα είναι:

$$J=\int_{\pi/4}^{\pi/2} ημx\cdot συν^3x dx=\int_{+\sqrt{2}/2}^{0} y^3(-dy)=\int_0^{\sqrt{2}/2} y^3 dy$$

$$=\frac{1}{4}\left[y^4\right]_0^{\sqrt{2}/2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16}\ \boxed{=\frac{1}{16}}$$

Ε. Η αποδεικτέα ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$2e^{-x}\le(x-1)^2+1\Leftrightarrow 2e^{-x}\le x^2-2x+1+1\Leftrightarrow 2e^{-x}+2x\le x^2+2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=2e^{-x}+2x-x^2-2.$ Η T είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$T'(x)=-2e^{-x}+2-2x=2\left(1-x-e^{-x}\right)$$

και

$$T''(x)=2\left(-1+e^{-x}\right).$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της T''. Ισχύει η ισοδυναμία

$$T''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} > e^0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} -x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Έτσι, το πρόσημο της T'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως, η T' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$. Πράγματι, αν $x \in (-\infty, 0]$, τότε, αφού T' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, θα ισχύει ότι $T'(x) \leq T'(0)$ ενώ, αν $x \in [0, +\infty)$ επειδή η T' γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, θα ισχύει ότι $T'(x) \leq T'(0)$ συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει λοιπόν $T'(x) \leq T'(0) = 0$, συνεπώς, $T'(x) \leq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Έπεται ότι η T είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, για κάθε $x \geq 0$ ισχύει η ισοδυναμία

$$x \geq 0 \overset{T \searrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} T(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2e^{-x} + 2x - x^2 - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-x} + 2x \leq x^2 + 2$$

$$\boxed{\Leftrightarrow 2e^{-x} \leq (x-1)^2 + 1,}$$

όπως θέλαμε. Για το δεύτερο ζητούμενο του ερωτήματος, δηλαδή τον υπολογισμό του ορίου, εργαζόμαστε ως εξής: Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) > 0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα για $x > 0$, κοντά στο 0, θα έχουμε

$$2e^{-x} + 2x < x^2 + 2 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(2e^{-x} + 2x) < f(x^2 + 2).$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \left(f(2e^{-x} + 2x) - f(x^2 + 2) \right) = 0$$

και $\lim_{x \to 0^+} (4x^2 + 1) = 1 > 0$, άρα έπεται ότι

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{4x^2 + 1}{f(2e^{-x} + 2x) - f(x^2 + 2)} = -\infty.}$$