Διαγώνισμα 4.1

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142/143.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161.

A4. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Προσοχή:
Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Πολλές φορές τίθεται το αντίστροφο σε ερωτήσεις.

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Σωστό: Σχολικό βιβλίο, σελ. 53.

ii. Σωστό: Σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

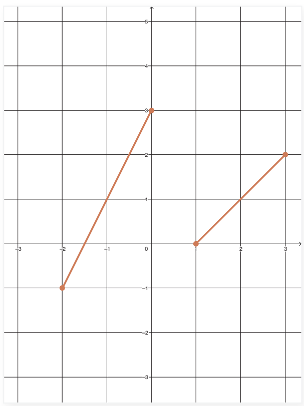
iii. Λάθος: Για να είναι σωστό το συμπέρασμα, θα έπρεπε να γίνει η επιπλέον υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής. Αν δεν είναι συνεχής, τότε μπορεί να συμβεί κάτι αντίστοιχο με το διπλανό σχήμα, όπου τα $f(-1), f(2)$ έχουν όντως διαφορετικό πρόσημο, αλλά η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο διάστημα $(-1,2)$.

iv. Σωστό: Σχολικό βιβλίο, σελ. 106.

v. Λάθος: Αν υπήρχε επιπλέον η υπόθεση ότι το A είναι διάστημα, τότε η πρόταση θα ήταν σωστή (σύμφωνα με το θεώρημα στη σελ. 135 του σχολικού βιβλίου). Παρ' όλα αυτά, χωρίς αυτήν την υπόθεση η πρόταση είναι λανθασμένη. Για παράδειγμα, αν $A=(-2,0)\cup(1,3)$, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x\in(-2,0) \\ x-1, & x\in(1,3) \end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και μπορούμε να ελέγξουμε ότι $f'(x)=2$ για $x\in(-2,0)$ και $f'(x)=1$ για $x\in(1,3)$, επομένως, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in A$. Παρ' όλα αυτά, η συνάρτηση ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το A διότι, για παράδειγμα, ισχύει ότι $f(-1)=1>f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f=(-\infty,1)$, ενώ αυτό της συνάρτησης g είναι το $D_g=\mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της $\varphi=f\circ g$ προκύπτει από το σύστημα των περιορισμών:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ g(x)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x<e^0 \end{cases} \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x<0 \end{cases}.$$

Επομένως, η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού $\boxed{D_\varphi=(-\infty,0)}$. Ο τύπος της φ είναι

$$\varphi(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln(1-g(x))$$

$$\boxed{=\ln(1-e^x) \text{ για } x<0.}$$

B2. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x<0$ ισχύει

$$\varphi'(x)=(f\circ g)'(x)=\frac{1}{1-e^x}(1-e^x)'=-\frac{e^x}{1-e^x}.$$

Ισχύει ότι $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x<0$, και επιπλέον ισχύει ότι

$$x<0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}e^x<e^0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow 1-e^x>0.$$

Επομένως, ισχύει $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x<0$, επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Αφού φ συνεχής και γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της θα δίνεται από τον τύπο

$$\varphi((-\infty,0))=\left(\lim_{x\to0^-}\varphi(x),\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,0),$$

Γι' αυτόν τον τύπο, δες τη σελ. 78 του σχολικού βιβλίου.

όπου τα δύο όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-e^x)=\ln(1-0)=0$, καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.
- $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1-e^x)$.

  Γι' αυτό το όριο, θέτουμε $y=1-e^x$. Καθώς $x\to0^-$, θα ισχύει ότι $y\to0^+$. Συνεπώς, το όριο μπορεί να γραφτεί ως $\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=-\infty$.

Β3. Η φ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι ίσο με το σύνολο τιμών της φ, άρα $D_{\varphi^{-1}} = (-\infty, 0)$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y).$$

Επομένως, για κάθε $x, y < 0$ έχουμε

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \ln(1 - e^x) = y \Leftrightarrow 1 - e^x = e^y$$
$$\Leftrightarrow e^x = 1 - e^y \Leftrightarrow x = \ln(1 - e^y).$$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\boxed{\varphi^{-1}(x) = \ln(1 - e^x),\ x < 0.}$

Β4. Η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$\varphi''(x) = -\frac{e^x(1 - e^x) - e^x(-e^x)}{(1 - e^x)^2} = -\frac{e^x - e^{2x} + e^{2x}}{(1 - e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1 - e^x)^2}$$

για κάθε $x < 0$. Ισχύει ότι $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x < 0$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$x < 0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0.$$

Επομένως, ισχύει $\varphi''(x) < 0$ για κάθε $x < 0$, οπότε η φ είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της και η γραφική παράσταση της φ δεν έχει σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για να αποδείξουμε τη συνέχεια της f, θα πρέπει να ελέγξουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Από τον τύπο της f προκύπτει ότι $f(0) = 0$. Επίσης, είναι

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{x}{6} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\eta\mu x - x}{x^2} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\eta\mu x}{2} = 0$,

  όπου στο δεύτερο και στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Σημείωση:

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}$ μπορεί να υπολογιστεί και χωρίς τον κανόνα De L' Hospital. Συγκεκριμένα, είναι απλή εφαρμογή του θεωρητικού αποτελέσματος που τέθηκε και πιο πάνω, στο Ερώτημα Α4.i της θεωρίας.

Γ2. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Δεδομένου ότι $f(0)=0$, αυτό το όριο μπορεί να γραφτεί και ως $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)/x\right)$. Καθώς ο τύπος της f αλλάζει γύρω από το $x_0=0$, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια ξεχωριστά. Θα πρέπει να δείξουμε ότι και τα δύο υπάρχουν, είναι πραγματικοί αριθμοί και, επιπλέον, ίσοι μεταξύ τους.

- $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{x}{6}}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x-x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-x}{x^3}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{6x}=-\frac{1}{6},$$

  όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{6}$$

οπότε τελικά η $\boxed{f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0=0 \text{ με } f'(0)=-\frac{1}{6}.}$

Γ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$, η οποία ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $x=0$. Επίσης, για κάθε αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha\le|\alpha|$. Συνεπώς,

$$\eta\mu x\le|\eta\mu x|\le|x|$$

Για $x>0$ ισχύει $|x|=x$, οπότε η τελευταία ανισότητα μπορεί να επεκταθεί στην

$$\eta\mu x \le |\eta\mu x| \le |x| = x,$$

για κάθε $x>0$. Επιπλέον, αφού η ισότητα στην ανισότητα $|\eta\mu x| \le |x|$ ισχύει μόνο για $x=0$, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω ως γνήσια ανισότητα, δηλαδή

$$\eta\mu x \le |\eta\mu x| < |x| = x,$$

για κάθε $x>0$. Συνεπώς, για $x>0$ ισχύει $\eta\mu x < x$, άρα $\eta\mu x - x < 0$. Δεδομένου ότι $x^2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι, για $x>0$,

$$\boxed{f(x)=\frac{\eta\mu x - x}{x^2}<0.}$$

Συμβουλή:
Σε ερωτήσεις με ανισότητες και τριγ. αριθμούς, η ανισότητα $|\eta\mu x|\le|x|$ είναι πολύ συχνά χρήσιμη.

Γ4. Αν αντικαταστήσουμε το ξ με x, η δοσμένη ισότητα γράφεται ως εξής:

$$x^2 f'(x)=1 \underset{x\in(\pi,2\pi)}{\overset{x^2>0,}{\Leftrightarrow}} f'(x)=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+\frac{1}{x}\right)'=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{1}{x}$, $x\in[\pi,2\pi]$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\pi,2\pi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Θα εξετάσουμε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x>0$, άρα και για $x\in(\pi,2\pi)$, ισχύει ότι

$$g(x)=f(x)+\frac{1}{x}=\frac{\eta\mu x - x}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{\eta\mu x - x}{x^2}+\frac{x}{x^2}=\frac{\eta\mu x}{x}.$$

Επομένως, η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\pi,2\pi)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει επιπλέον $\eta\mu\pi=\eta\mu 2\pi=0$, άρα μπορούμε να πούμε πως ισχύει ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[\pi,2\pi]$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(\pi,2\pi)$.
- $g(\pi)=g(2\pi)=0$

Επομένως, από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\pi,2\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-\frac{1}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{\xi^2} \boxed{\Leftrightarrow \xi^2 f'(\xi)=1.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Για το πεδίο ορισμού της f, θα πρέπει $x-1\neq 0$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της είναι το

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).}$$

Αναζητάμε αρχικά αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x-1}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\cdot e^x\right)=+\infty,$$

καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

Επομένως, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αναζητούμε τώρα αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

όπου στο δεύτερο βήμα εφαρμόσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αναζητούμε τώρα αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x-1}=\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}e^x\right)=1\cdot 0=0,$$

$\boxed{\text{οπότε η ευθεία } y=0 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty.}$

Δ2. Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο $(0,f(0))$ δίνεται από τον τύπο

$$(\varepsilon):y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow(\varepsilon):y=f'(0)x+f(0).$$

Είναι $f(0)=0$. Επιπλέον, για κάθε $x\neq 1$, είναι:

$$f'(x)=\frac{(xe^x)'(x-1)-xe^x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(xe^x+e^x)(x-1)-xe^x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2e^x+xe^x+xe^x-e^x-xe^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x\left(x^2+x-1\right)}{(x-1)^2}.$$

Αντικαθιστώντας $x=0$, παίρνουμε ότι $f'(0)=-1$. Έπεται έτσι ότι η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\boxed{(\varepsilon):\ y=-x}$$

Τυπική τακτική όταν μας ρωτούν για την ύπαρξη ορίου. ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε De L' Hospital διότι δεν έχουμε απροσδιόριστη μορφή $0/0$ ή ∞/∞.

Δ3. Για να εξετάσουμε την ύπαρξη του δοθέντος ορίου, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα δύο πλευρικά όρια.

- Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot xe^x\right)=+\infty$$

καθώς για $x\to 1^+$ ισχύει $x-1>0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to 1^+} xe^x=e$.

- Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}\cdot xe^x\right)=-\infty$$

αφού για $x\to 1^-$ ισχύει $x-1<0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$. Επίσης, ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} xe^x=e$.

Εφόσον τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Δ4. Για να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία, θα εξετάσουμε το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$. Στο Ερώτημα Δ2 είδαμε ότι

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θέσουμε $g(x)=x^2+x-1$ και να μελετήσουμε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση g. Αυτό όμως θα ήταν πολύ πιο χρονοβόρο.

$$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+x-1\right)}{(x-1)^2}$$

Ισχύει ότι $e^x>0$ και $(x-1)^2$ για κάθε $x\neq 1$. Επομένως, θα ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2+x-1>0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot(-1)=1+4=5$, οπότε οι ρίζες του δίνονται από τον τύπο

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Σχεδιάζουμε τώρα τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου.

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad +\infty$
x^2+x-1	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Με βάση τον πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right],\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)$ και $(1,+\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Σημείωση:

Θα ήταν λάθος να πούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το σύνολο $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$. Θυμηθείτε ότι η ιδιότητα

$$f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Delta \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \Delta,$$

ισχύει ΜΟΝΟ όταν το Δ είναι διάστημα. Επομένως, όπως κάναμε στην παραπάνω λύση, πρέπει να μελετήσουμε τη μονοτονία ξεχωριστά σε καθένα από τα δύο υπο-διαστήματα.

Δ5. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[-1,0]$ ισχύει $e^x\le e^0=1$, με ισότητα μόνο για $x=0$. Ισχύει επίσης $\frac{x}{x-1}\ge 0$, καθώς και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι αρνητικοί.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $x\in[-1,0]$ θα ισχύει

$$f(x)=\frac{xe^x}{x-1}\le\frac{x}{x-1},$$

με ισότητα μόνο όταν $x=0$. Το κλάσμα $\frac{x}{x-1}$ μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

Προκύπτει λοιπόν από τα παραπάνω ότι

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \left[x+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$
$$=(0+\ln 1)-(-1+\ln 2) \boxed{=1-\ln 2, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Διαγώνισμα 4.2

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 162.

A4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από την παραπάνω ισότητα είναι ξεκάθαρο ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το

$$\boxed{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,1),}$$

όπου τα δύο όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=-\infty$.

- Το δεύτερο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

B2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και «1-1» στο πεδίο ορισμού της. Συνεπώς, η f είναι αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0,1)$. Θα προσδιορίσουμε τώρα τον τύπο της. Για $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $y \in (0,1)$ ισχύει η ισοδυναμία

$$y = \frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow y\left(e^x+1\right) = e^x \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y \Leftrightarrow e^x(y-1) = -y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι $\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ για κάθε } x \in (0,1).}$

B3. Στο Ερώτημα B1 προσδιορίσαμε την παράγωγο της f και είδαμε ότι αυτή είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)' = \frac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - 2e^x\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$= \frac{e^x\left(e^x+1\right)\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4} = \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}.$$

Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$. Οι παράγοντες e^x και $\left(e^x+1\right)^3$ είναι και οι δύο θετικοί, οπότε το πρόσημο της f'' εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του παράγοντα $1-e^x$. Αυτός είναι θετικός για $x<0$ και αρνητικός για $x>0$, όπως μπορούμε να δούμε και από την παρακάτω ισοδυναμία:

$$1-e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow e^0 > e^x \Leftrightarrow x < 0.$$

Συνεπώς, το πρόσημο της f'' και τα διαστήματα κυρτότητας της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	

- Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f είναι το $K(0,f(0))=(0,\frac{1}{2})$.

Β4. Από τον τύπο των f και f' μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι $f(0)=\frac{1}{2}$ και $f'(0)=\frac{1}{4}$. Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο $K(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}(x-0)+\frac{1}{2}\boxed{\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}.}$$

Είδαμε στο Ερώτημα Β3 ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$. Επομένως, για $x>0$, η παραπάνω εφαπτόμενη ευθεία θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f, με εξαίρεση φυσικά το σημείο επαφής, στο οποίο οι δύο αυτές συμπίπτουν. Επομένως, για $x\in(1,2)$ θα ισχύει

$$f(x)<\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2f(x)<\frac{1}{4}x^3+\frac{x^2}{2}.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\int_1^2 x^2f(x)dx<\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{6}\right]_1^2$$

$$=\frac{16}{16}+\frac{8}{6}-\frac{1}{16}-\frac{1}{6}=\frac{15}{16}+\frac{7}{6}=\frac{101}{48}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με 48 μας δίνει ότι

$$\boxed{\int_1^2 48x^2f(x)dx<101,\ \text{δηλαδή το ζητούμενο.}}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε τις δύο πρώτες δοσμένες σχέσεις. Η πρώτη σχέση λοιπόν μας δίνει

$$\left(f'(x)+e^{g(x)}\right)'=0 \Rightarrow f''(x)+e^{g(x)}g'(x)=0.$$

Από τη δεύτερη σχέση όμως γνωρίζουμε ότι $g'(x)=-e^{f(x)}$, οπότε η παραπάνω μπορεί να γραφτεί ως

$$f''(x)-e^{g(x)}e^{f(x)}=0. \quad (1)$$

Με όμοιο τρόπο, παραγωγίζοντας δηλαδή τη δεύτερη σχέση και αντικαθιστώντας το $f'(x)$ με $-e^{g(x)}$, κάτι που μας δίνεται από την πρώτη, παίρνουμε τελικά ότι

$$g''(x)-e^{f(x)}e^{g(x)}=0. \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f''(x)=g''(x)$, άρα από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι

$$f'(x)=g'(x)+c \quad (3)$$

για κάθε $x \in (0,+\infty)$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αντικαθιστώντας $x=1$ στην πρώτη από τις δύο δοσμένες σχέσεις έπεται ότι $f'(1)+e^{g(1)}=0$. Γνωρίζουμε όμως από την τρίτη σχέση ότι $g(1)=0$, άρα παίρνουμε τελικά ότι $f'(1)=-e^{0}=-1$. Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $g'(1)=-1$. Αντικαθιστώντας $x=1$ στη σχέση (3) και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, έπεται ότι $c=0$, άρα θα είναι $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x>0$.

Στη συνέχεια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με πριν. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι $f(x)=g(x)+C$ για κάθε $x>0$, όπου C σταθερός πραγματικός αριθμός. Λόγω όμως της σχέσης $f(1)=g(1)$ που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση, αντικαθιστούμε $x=1$ στην τελευταία ισότητα και έτσι προκύπτει ότι $C=0$.

Ισχύει λοιπόν $\boxed{f(x)=g(x) \text{ για κάθε } x>0}$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Γ2. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Σημειώνουμε επίσης ότι λόγω της ισότητας των f,g, προκύπτει από την πρώτη δοσμένη σχέση ότι

$$f'(x)=-e^{g(x)}=-e^{f(x)} \quad (4)$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\varphi'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}-1\overset{(4)}{=}e^{f(x)}e^{-f(x)}-1=1-1=0,$$

άρα η φ είναι σταθερή.

Έστω ότι $\varphi(x)=c$ για κάθε $x>0$. Γνωρίζουμε ότι $\varphi(1)=e^{-f(1)}-1=0$, άρα θα ισχύει $c=0$ και έτσι για κάθε $x>0$ θα είναι

$$e^{-f(x)}-x=0 \Leftrightarrow e^{-f(x)}=x$$
$$\Leftrightarrow -f(x)=\ln x \boxed{\Leftrightarrow f(x)=-\ln x.}$$

Γ3. Η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^x>1+\ln(x+1)$$

για κάθε $x>0$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $h(x)=e^x-1-\ln(x+1)$ για $x\geq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και η παράγωγός της δίνεται από τη σχέση

$$h'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}.$$

Η h' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$h''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0.$$

Έπεται λοιπόν ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αφού $h'(0)=e^0-\frac{1}{0+1}=0$, θα είναι $h'(x)>h'(0)=0$ για κάθε $x>0$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η h είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει $h(x)>h(0)$, η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\boxed{e^x>1+\ln(x+1),\ \text{το οποίο είναι το ζητούμενο.}}$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\theta^x-1+f(1+x)$ για $x>-1$. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και η παράγωγός της είναι η $\varphi'(x)=\theta^x\ln\theta+f'(1+x)$. Η συνθήκη που μας δίνεται στην εκφώνηση γράφεται ισοδύναμα ως $\varphi(x)\geq 0$ για $x>-1$. Παρατηρούμε όμως ότι $\varphi(0)=\theta^0-1+f(1)=0$, άρα η φ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=0$. Αυτό το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του A_{φ}, οπότε από το θ. Fermat προκύπτει ότι

$$\varphi'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\theta+f'(1)=0 \Leftrightarrow \ln\theta-1=0$$
$$\Leftrightarrow \ln\theta=1 \ \boxed{\Leftrightarrow \theta=e.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου, η σχέση

$$f''(x)f(x)=2x-\left[f'(x)\right]^2$$

γράφεται ισοδύναμα ως

$$f''(x)f(x)+\left[f'(x)\right]^2-2x=0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)'f(x)+f'(x)f'(x)-\left(x^2\right)'=0$$
$$\Leftrightarrow \left(f'(x)f(x)-x^2\right)'=0.$$

Οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle είναι να είναι η συνάρτηση συνεχής στο [-1,1] και παραγωγίσιμη στο (-1,1). Εφόσον η φ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, οι υποθέσεις αυτές προφανώς ικανοποιούνται.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $\varphi(x)=f'(x)f(x)-x^2$ για $x\in\mathbb{R}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ διότι η f έχει υποτεθεί δύο φορές παραγωγίσιμη. Από τη σχέση $f(-1)=f(1)=0$ προκύπτει ότι $\varphi(-1)=-1$ και $\varphi(1)=-1$, άρα $\varphi(-1)=\varphi(1)$. Εφόσον η φ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, ικανοποιεί σαφώς τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$, όπως θέλαμε.

Δ2. Η f ικανοποιεί και αυτή τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ διότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(-1)=f(1)$. Επομένως, υπάρχει $\lambda\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\lambda)=0$. Εφόσον η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	λ	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\lambda]$. Άρα για κάθε $x\in(-1,\lambda]$ ισχύει

$$f(x)<f(-1)=0$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\lambda,1]$, άρα για κάθε $x\in[\lambda,1)$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι $\boxed{\text{για κάθε } x\in(-1,1) \text{ ισχύει } f(x)<0}$, όπως θέλαμε.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x+1$ για $x\in(-1,1)$. Ισχύουν τα εξής:

- $g(-1)=f(-1)-2(-1)+1=3>0$.
- $g(1)=f(1)-2+1=-1<0$.
- Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Από το θ. Bolzano, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$, δηλαδή

$$\boxed{f(x_0)=2x_0-1}$$

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα ικανοποιεί και με το παραπάνω τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-1,x_0]$ και $[x_0,1]$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο πρώτο από αυτά, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\rho_1\in(-1,x_0)\subseteq(-1,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\rho_1)=\frac{f(x_0)-f(-1)}{x_0+1}=\frac{2x_0-1}{x_0+1}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θ.Μ.Τ. στο $[x_0,1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\rho_2\in(x_0,1)\subseteq(-1,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\rho_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-(2x_0-1)}{1-x_0}=\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

Ισχύει λοιπόν

$$\boxed{f'(\rho_1)f'(\rho_2)=\frac{(2x_0-1)(2x_0-1)}{(x_0+1)(x_0-1)}=\frac{(2x_0-1)^2}{x_0^2-1}, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Δ5. Αρχικά θα κάνουμε μια παρατήρηση που θα μας βοηθήσει στη συνέχεια. Αν θεωρήσουμε την $f(x-2h)$ ως συνάρτηση του h και θεωρήσουμε το x σταθερή ποσότητα, τότε η παράγωγος ως προς h θα είναι ίση με

$$f'(x-2h)\cdot(x-2h)'=-2f'(x-2h)$$

και η δεύτερη παράγωγος ίση με $-2f''(x-2h)\cdot(x-2h)'=4f''(x-2h)$. Ομοίως υπολογίζουμε τις παραγώγους της ποσότητας $f(x+2h)$ ως προς h.

Πηγαίνοντας πίσω στο ζητούμενο όριο, παρατηρούμε ότι έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, άρα θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Προκύπτει λοιπόν τότε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)+f(x+2h)-2f(x)}{4h^2}&=\lim_{h\to0}\frac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{8h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x+2h)}{4h},\end{aligned}$$

όπου παραγωγίσαμε αριθμητή και παρονομαστή ως προς h και χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση στην αρχή της λύσης. Και το τελευταίο όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, όμως δεν βολεύει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital, και θα εξηγήσουμε αργότερα το γιατί. Προς το παρόν ακολουθούμε μια διαφορετική στρατηγική. Προσθαφαιρούμε τον όρο $f'(x)$ στον αριθμητή, οπότε το όριο μπορεί να γραφτεί ως

$$\lim_{h\to0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x)+f'(x+2h)-f'(x)}{4h}.$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε ξεχωριστά τα όρια

$$\lim_{h\to0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x)}{4h}\quad\text{και}\quad\lim_{h\to0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{4h},$$

καθώς το ζητούμενο όριο θα είναι το άθροισμα των δύο. Για το πρώτο από τα δύο όρια θέτουμε $u=-2h$, οπότε θα ισχύει $u\to0$, καθώς $h\to0$. Αυτό το όριο τότε γράφεται ως

$$\lim_{u\to0}\frac{-f'(x+u)+f'(x)}{-2u}=\lim_{u\to0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{2u}.$$

Το τελευταίο όριο είναι ίσο με $f''(x)/2$, όπως προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου στη σελ. 95 του σχολικού βιβλίου (δείτε τη συζήτηση κάτω από τον ορισμό, όπου αναφέρεται η ισοδύναμη μορφή της παραγώγου). Αυτός ο ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί εδώ, καθώς γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f' είναι εξ υποθέσεως παραγωγίσιμη. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{4h}$$

ισούται με $f''(x)/2$, άρα τελικά το ζητούμενο όριο, που είναι το άθροισμα των δύο μεμονωμένων όρων, είναι ίσο με

$$\boxed{\frac{f''(x)}{2}+\frac{f''(x)}{2}=f''(x),\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Σημείωση:

Αναφέραμε νωρίτερα ότι ο κανόνας De L' Hospital δεν θα ήταν αποτελεσματικός στο τελευταίο μέρος της άσκησης. Πράγματι, αν εφαρμόζαμε τον κανόνα De L' Hospital, θα καταλήγαμε στο όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(x-2h)+f''(x+2h)}{2}.$$

Κάποιος εδώ θα αναρωτηθεί: Γιατί δεν μπορούμε απλώς να αφήσουμε το h να τείνει στο 0 και να συμπεράνουμε ότι το τελευταίο όριο είναι ίσο με

$$\frac{f''(x)+f''(x)}{2}=f''(x);$$

Ο λόγος είναι ότι, για να μπορέσουμε να το κάνουμε αυτό, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε ότι η f'' είναι συνεχής στο σημείο x. Αυτό όμως δεν συμπεριλαμβάνεται στις υποθέσεις του προβλήματος. Γνωρίζουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, αλλά δεν μας έχει δοθεί ότι η f'' είναι συνεχής. Επομένως, χρειάστηκε να επιλέξουμε μια διαφορετική στρατηγική για να λύσουμε αυτό το ερώτημα. Πρόκειται για ένα πολύ λεπτό θεωρητικό σημείο, που μπορεί εύκολα να περάσει απαρατήρητο.

Διαγώνισμα 4.3

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142-143.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Αν $f(x)=x^3$ και $x_0=0$, τότε ισχύει $f'(x_0)=3x_0^2=0$, όμως το $x_0=0$ δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου για την f. Πράγματι, για $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)=0$ και για $x<0$ ισχύει $f(x)<f(0)=0$.

ii. Το αντίστροφο θα ήταν σωστό, αλλά η συγκεκριμένη συνεπαγωγή δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα αποτελεί η ίδια συνάρτηση με αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος: Αν $f(x)=x^3$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, και όμως $f'(0)=0$, άρα η παραγωγός της δεν είναι παντού θετική.

iii. Δείτε τα σχόλια στη σελ. 163 του σχολικού βιβλίου.

iv. Δείτε τη σελ. 212 του σχολικού βιβλίου.

v. Αυτό το αποτέλεσμα αναφέρεται στη σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως πηλίκο παραγωγίσιμων. Για κάθε $x\neq 1$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x-1)-x^2(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\neq 1$, οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων x και $x-2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1=0$ το $f(0)=0$, και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2=2$ το $f(2)=4$.

B2. Αναζητούμε αρχικά κατακόρυφες ασύμπτωτες. Το μοναδικό σημείο στο οποίο έχει νόημα να αναζητήσουμε τέτοιες είναι το $x_0=1$. Ισχύει

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty,$$

διότι για τον αριθμητή ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$ και για τον παρονομαστή ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και $x-1>0$ για $x>1$. Εφόσον το όριο ισούται με $+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε τώρα οριζόντιες ασύμπτωτες:

- Ξεκινάμε με το $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

- Συνεχίζουμε τώρα με το $-\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty,$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες ούτε στο $-\infty$.

Αναζητούμε τώρα πλάγιες ασύμπτωτες:

- Ξεκινάμε με το $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι η ευθεία $\boxed{y=x+1 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty}$.

- Συνεχίζουμε με το $-\infty$. Η διαδικασία είναι εντελώς όμοια με πριν. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επομένως, η ευθεία $\boxed{y=x+1 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty}$.

B3. Είδαμε στο Ερώτημα Β1 ότι για κάθε $x\neq 1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Αυτή είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\neq 1$ ισχύει

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)^3-2x(x-1)(x-2)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x-1)^2-2x(x-2)}{(x-1)^3}=\frac{2\left(x^2-2x+1\right)-2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα $(x-1)^3$, ο οποίος είναι θετικός για $x>1$ και αρνητικός για $x<1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$.
- Το σημείο $x=1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, οπότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

B4. Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει

$$f(x)-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

Έτσι, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_2^3 (f(x)-(x+1))dx=\int_2^3 \frac{1}{x-1}dx=\left[\ln|x-1|\right]_2^3=\ln 2-\ln 1\ \boxed{=\ln 2.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x$. Για να κάνουμε πιο εύκολο τον υπολογισμό του $f(0)$, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τους όρους

$$I:=\int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu x\,dx \quad \text{και} \quad J:=\int_0^{\pi/2} e^x \eta\mu x\,dx$$

Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, μια στρατηγική που είναι συχνά χρήσιμη σε ολοκληρώματα που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ισχύει

$$I=\int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\pi/2} e^x (\eta\mu x)'\,dx=\left[e^x \eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(e^x)'\,\eta\mu x\,dx$$

$$=e^{\pi/2}\eta\mu(\pi/2)-e^0\eta\mu 0-\int_0^{\pi/2} e^x \eta\mu x\,dx=e^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2} e^x(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx$$

$$=e^{\pi/2}-\left[-e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(e^x)'(-\sigma\upsilon\nu x)dx$$

$$=e^{\pi/2}+e^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu(\pi/2)-e^0\sigma\upsilon\nu 0-\int_0^{\pi/2} e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx==e^{\pi/2}-1-I.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $I = e^{\pi/2} - 1 - I$. Λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς I, παίρνουμε ότι

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε τώρα με όμοιο τρόπο το ολοκλήρωμα J. Ισχύει

$$\begin{aligned} J = \int_0^{\pi/2} e^x \eta\mu x\, dx = \int_0^{\pi/2} e^x \left(-\sigma\upsilon\nu x\right)' dx \\ = \left[-e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\left(e^x\right)' \sigma\upsilon\nu x\, dx \\ = \left(-e^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu(\pi/2) + e^0 \sigma\upsilon\nu 0\right) + \int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu x\, dx \\ = 1 + I = 1 + \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει τελικά ότι

$$J = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right). \qquad (3)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη σχέση (1) που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση. Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$f(0) = \int_0^{\pi/2} e^{\pi/2 - x} \sigma\upsilon\nu x\, dx - \int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu x\, dx. \qquad (4)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το I, το οποίο έχουμε υπολογίσει. Για το πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = \frac{\pi}{2} - x$. Ισχύει $du = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' dx = -dx$ και $x = \frac{\pi}{2} - u$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x = 0$, είναι $u = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$
- Όταν $x = \dfrac{\pi}{2}$, είναι $u = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$

Επομένως, αυτό το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_{\pi/2}^{0} e^u \sigma\upsilon\nu(\pi/2 - u)(-du) = \int_0^{\pi/2} e^u \eta\mu u\, du = J.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (4) ότι $f(0) = J - I$ και από τις (2), (3) ότι

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) = 1.}$$

Γ2. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x)+f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας με e^x, παίρνουμε ότι

$$e^x f'(x)+e^x f(x)=\frac{1}{x+1}$$

για κάθε $x \in (-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος μπορεί να γραφτεί ως

$$e^x f'(x)+\left(e^x\right)' f(x)=\left(e^x f(x)\right)',$$

επομένως για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ ισχύει $\left(e^x f(x)\right)'=\frac{1}{x+1}=\left(\ln|x+1|\right)'$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έπεται ότι $e^x f(x)=\ln|x+1|+c$ για κάθε $x>-1$, όπου c είναι μια σταθερά. Εφόσον είμαστε στο διάστημα $(-1,+\infty)$, γνωρίζουμε ότι $x+1>0$, άρα η τελευταία μπορεί να γραφτεί ως

$$e^x f(x)=\ln(x+1)+c$$

Θέτοντας $x=0$, παίρνουμε ότι $c=1$. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ έχουμε

$$e^x f(x)=\ln(x+1)+1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x)=\frac{1+\ln(x+1)}{e^x}.}$$

Γ3. Θα δείξουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=0$, το οποίο θα μας δώσει το ζητούμενο. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>-1$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(1+\ln(x+1)\right)' e^x-\left(1+\ln(x+1)\right)\left(e^x\right)'}{e^{2x}}$$

$$=\frac{e^x\left(\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1)\right)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1)\right).$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του $\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1)$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$h(x)=\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1),\ \text{για } x>-1.$$

Το πρόσημο της f' είναι το ίδιο με το πρόσημο της h. Αυτή είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων και για κάθε $x>-1$ ισχύει

$$h'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}<0,$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα. Ισχύει $h(0)=0$, άρα το πρόσημο της h και η μονοτονία της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$+$	$\searrow$	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα ότι πράγματι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=0$. Πράγματι, αν $x\in(-1,0]$, τότε, αφού f γνησίως αύξουσα στο $(-1,0]$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f(0)$, ενώ, αν $x\in[0,+\infty)$, επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f(0)$, συνεπώς για κάθε $x>-1$ είναι $f(x)\le f(0)$ και άρα για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ισχύει $f(x)\le f(0)$.

Β΄ τρόπος:

Μια άλλη λύση στο παραπάνω ερώτημα προκύπτει με τη χρήση της ανισότητας $\ln x\le x-1$. Αυτή η ανισότητα εμφανίζεται σε εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ. 148) και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη. Ισχύει για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα, χρησιμοποιούμε αυτήν την ανισότητα ως εξής:

- Θέτουμε $y=x+1$. Γνωρίζουμε ότι $\ln y\le y-1$ για κάθε $y>0$, δηλαδή για κάθε $x>-1$. Ισοδύναμα, $\ln(x+1)\le(x+1)-1$, δηλαδή

  $$\ln(x+1)\le x \quad (5)$$

  για κάθε $x>-1$, με ισότητα μόνο όταν $y=1$, δηλαδή όταν $x=0$.

- Θέτουμε τώρα $u=e^x$. Η παραπάνω ανισότητα γίνεται $\ln u\le u-1$ για κάθε $u>0$, δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $u=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα,

$$\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x + 1 \quad (6)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει όταν $u = 1$, δηλαδή όταν $x = 0$.

Από τις σχέσεις (5), (6) προκύπτει ότι

$$\boxed{f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{e^x} \le \frac{x+1}{x+1} = 1 = f(0),}$$

και μάλιστα η ισότητα ισχύει όταν ισχύει η ισότητα στις (5), (6), δηλαδή μόνο όταν $x = 0$.

Γ4. i. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x) = e^x - \lambda$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda > 0 \Leftrightarrow e^x > \lambda \Leftrightarrow x > \ln\lambda,$$

άρα το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-1		$\ln\lambda$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Συμπεραίνουμε από τον παραπάνω πίνακα ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = \ln\lambda$ και αυτό το ελάχιστο είναι το

$$g(\ln\lambda) = e^{\ln\lambda} - \lambda\ln\lambda - \lambda + 1 = \lambda - \lambda\ln\lambda - \lambda + 1 = 1 - \lambda\ln\lambda.$$

Πράγματι, αν $x \in (-1, \ln\lambda]$, τότε, αφού f γνησίως φθίνουσα στο $(-1, \ln\lambda]$, θα ισχύει ότι $f(x) \ge f(\ln\lambda)$, ενώ, αν $x \in [\ln\lambda, +\infty)$ επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $[\ln\lambda, +\infty)$, θα ισχύει ότι $f(x) \ge f(\ln\lambda)$, συνεπώς για κάθε $x > -1$ είναι $f(x) \ge f(\ln\lambda)$.

ii. Ισχύει $g(x) \ge 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η ελάχιστη τιμή της g είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1, δηλαδή αν $1 - \lambda\ln\lambda \ge 1$. Ισοδύναμα θέλουμε $\lambda\ln\lambda \le 0$, δηλαδή $\ln\lambda \le 0$, καθώς η παράμετρος λ είναι ούτως ή άλλως θετική. Η τελευταία ανισότητα έχει λύσεις $\lambda \le 1$. Επομένως, η μέγιστη τιμή του λ είναι η $\lambda_{max} = 1$.

iii. Είδαμε στο Ερώτημα Γ3 ότι η μέγιστη τιμή της f είναι η $f(0) = 1$ και μάλιστα ότι αυτή λαμβάνεται μόνο για $x = 0$. Στο προηγούμενο υποερώτημα είδαμε ότι, για $\lambda = 1$, η ελάχιστη τιμή της g είναι η $g(\ln 1) = g(0) = 1$ και από τον πίνακα μονοτονίας της g προκύπτει ότι και αυτή λαμβάνεται μόνο για $x=1$. Εφόσον $f(0)=g(0)=1$, προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινό σημείο το $A(0,1)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια για τα ακρότατα των f,g, προκύπτει ότι για κάθε $x\neq 0$ θα ισχύει $f(x)<f(0)=g(0)<g(x)$. Έτσι, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ δεν μπορεί να έχει άλλες λύσεις πέραν της $x=0$, οπότε οι C_f, C_g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο πέραν του A.

Για να δείξουμε ότι έχουν κοινή εφαπτόμενη σε αυτό το σημείο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(0)=g'(0)$. Όμως και οι δύο αυτές παράγωγοι θα είναι ίσες με μηδέν, διότι αντιστοιχούν σε εσωτερικά σημεία τοπικών (και ολικών) ακροτάτων των δύο συναρτήσεων (Θεώρημα Fermat). Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε και με απευθείας υπολογισμό:

- $f'(0)=\dfrac{1}{e^0}\left(\dfrac{1}{0+1}-1-\ln(0+1)\right)=0.$
- $g'(0)=e^0-\lambda=1-\lambda=1-1=0.$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}.$$

Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, το όριο στο πρώτο μέλος ισούται με $2f'(x)$. Προσθαφαιρούμε τον όρο $f(x)$ στον αριθμητή και παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\big(f(x-h)-f(x)\big)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}.$$

Εστιάζουμε στο καθένα από τα δύο όρια ξεχωριστά. Το πρώτο όριο είναι ίσο με $f'(x)$. Αυτό είναι άμεσο από τον ορισμό της παραγώγου, καθώς, σύμφωνα με τη συζήτηση στη σελ. 95 του σχολικού βιβλίου, ένας ισοδύναμος τρόπος να ορίσουμε την παράγωγο στο x_0 θα ήταν μέσω του ορίου

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Για το δεύτερο όριο εκτελούμε την αντικατάσταση $u=-h$. Εφόσον $h\to 0$, προκύπτει ότι $u\to 0$. Το όριο τώρα γράφεται

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{-u}=-\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u},$$

το οποίο είναι ίσο με $-f'(x)$ λόγω ακριβώς της παραπάνω συζήτησης. Προκύπτει έτσι ότι το αρχικό όριο είναι ίσο με $f'(x)-(-f'(x))=2f'(x)$, όπως ισχυριστήκαμε αρχικά.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $2f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}$.

Για να αποδείξουμε ότι η φ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\varphi'(x)=0$ για κάθε $x>0$. Ισχύει

$$\varphi'(x)=\left(f(x)-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=f'(x)-\frac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{x}$$

$$=f'(x)-\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=f'(x)-\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},$$

το οποίο πράγματι είναι ίσο με μηδέν λόγω της παραπάνω παρατήρησης για την $f'(x)$. Γνωρίζουμε ότι $f(1)=0$, άρα $\varphi(1)=f(1)-\dfrac{\ln 1}{\sqrt{1}}=0$. Η φ είναι σταθερή, άρα $\varphi(x)=0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\boxed{f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.}$$

Δ2. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=e$. Για να αποδείξουμε ότι έχει ακόμη μία, ξεκινάμε μελετώντας την f ως προς τη μονοτονία, με σκοπό στη συνέχεια να βρούμε το σύνολο τιμών της. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<2 \Leftrightarrow x<e^2.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας, προκύπτουν τα εξής:

- Όπως αναφέραμε και πριν, η εξίσωση $f(x)=f(e)$ έχει προφανώς λύση την $x=e$, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,e^2)$. Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, αυτή η λύση είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

- Το σύνολο τιμών είναι το

$$f\left((e^2,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to(e^2)^+} f(x)\right)=(0,2/e),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x=e^2$ και το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Στο δεύτερο βήμα παραπάνω, χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Παρατηρούμε ότι $f(e)=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος του $2/e$. Πράγματι, ισχύει η ισοδυναμία

$$\frac{1}{\sqrt{e}}<\frac{2}{e} \Leftrightarrow \sqrt{e}<2 \Leftrightarrow e<4,$$

η οποία είναι προφανώς αληθής. Προκύπτει λοιπόν ότι $\frac{1}{\sqrt{e}}\in f\left((e^2,+\infty)\right)$, άρα η εξίσωση $f(x)=f(e)=\frac{1}{\sqrt{e}}$ έχει λύση και στο διάστημα $(e^2,+\infty)$. Λόγω της μονοτονίας της σε αυτό το διάστημα, αυτή η λύση είναι μοναδική στο $(e^2,+\infty)$.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η εξίσωση $f(x)=f(e)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, όπως θέλαμε.

Δ3. Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Συνηθισμένη τακτική όταν πρέπει να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που περιέχουν λογάριθμους.

Παρατηρήστε αρχικά ότι $1/\sqrt{x} = \left(2\sqrt{x}\right)'$. Έχουμε λοιπόν

$$\alpha = \int_1^{e^2} f(x)dx = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{e^2} \ln x \cdot \left(2\sqrt{x}\right)' dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\cdot \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x}\cdot(\ln x)' dx = \left(2e\ln e^2 - 2\ln 1\right) - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 4e - \left[4\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 4e - (4e-4) = 4, \text{ όπως θέλαμε.}$$

Δ4. **i.** Εφόσον $\alpha = 4$, προκύπτει από την υπόθεση ότι $e^{g(x)} + g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εφόσον η g είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας και έτσι θα προκύψει ότι

$$e^{g(x)}g'(x) + g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x)\left(e^{g(x)}+1\right) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{e^{g(x)}+1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έπεται έτσι ότι και το πρώτο μέλος, δηλαδή η g', είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, δηλαδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, όπως θέλαμε. Επίσης, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και έτσι προκύπτει ότι

$$g''(x) = -\frac{1}{\left(e^{g(x)}+1\right)^2}\cdot\left(e^{g(x)}+1\right)' = -\frac{e^{g(x)}g'(x)}{\left(e^{g(x)}+1\right)^2}.$$

Εφόσον $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται από την τελευταία σχέση ότι $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι κοίλη.

ii. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτό έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1». Επομένως αντιστρέφεται. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το $A_{g^{-1}} = \mathbb{R}$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $g(x) = y$ ως προς x. Γνωρίζουμε όμως ότι $g(x) + e^{g(x)} = x$, άρα, αντικαθιστώντας $y = g(x)$, παίρνουμε ότι $x = y + e^y$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι λοιπόν η $g^{-1}(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Στον πρώτο όρο του αθροίσματος κάνουμε την αντικατάσταση $u=g(x)$. Ισχύει τότε $x=g^{-1}(u)=u+e^u$ και $dx=(u+e^u)'du=(1+e^u)du$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x=e^2+2$, ισχύει $x=g^{-1}(2)$, άρα $u=g(x)=g(g^{-1}(2))=2$.
- Αντίστοιχα, όταν $x=e+1$, θα είναι $u=1$.

Επομένως, ο πρώτος όρος μπορεί να γραφτεί ως

$$\int_1^2 \frac{1}{2+g^{-1}(u)+u}\cdot(1+e^u)du.$$

Φυσικά, μπορούμε να αλλάξουμε πάλι τη μεταβλητή σε x και να γράψουμε αυτό το ολοκλήρωμα ως $\int_1^2 \frac{1+e^x}{2+g^{-1}(x)+x}dx$. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$I=\int_1^2 \frac{1+e^x}{2+g^{-1}(x)+x}dx+\int_1^2 \frac{1}{2+x+g^{-1}(x)}dx=\int_1^2 \frac{2+e^x}{2+2x+e^x}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{(2+2x+e^x)'}{2+2x+e^x}dx=\int_1^2 \left(\ln(2+2x+e^x)\right)'dx=\left[\ln(2+2x+e^x)\right]_1^2$$

$$=\ln(6+e^2)-\ln(4+e).$$

Διαγώνισμα 4.4

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

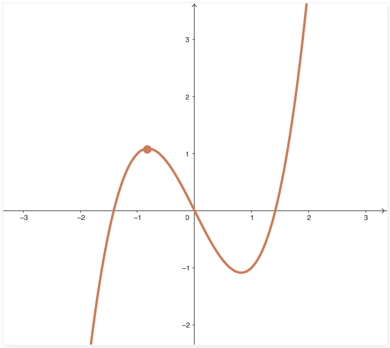
Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Αν η συνάρτηση είχε ακρότατο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα ίσχυε $f'(x_0)=0$, το οποίο είναι αδύνατο. Οι υποθέσεις αυτού του θεωρήματος ικανοποιούνται καθώς η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το x_0 είναι προφανώς εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

ii. Ένα αντιπαράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα: Αυτή η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ όπως φαίνεται στο σχήμα, όμως αυτό δεν είναι το ολικό της μέγιστο. Στην πραγματικότητα η συνάρτηση δεν έχει καν ολικό μέγιστο, αφού τείνει στο $+\infty$ για $x \to +\infty$.



iii. Θεωρία – Σχολικό βιβλίο, σελ. 157 (μετά από τον ορισμό).

iv. Ισχύει για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, όπως προκύπτει από το θεώρημα 2 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου.

v. Αναφέρεται σε σχόλιο στη σελ. 228 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι συνεχής ως ρητή, επομένως κατακόρυφη ασύμπτωτη αναζητούμε μόνο στα πεπερασμένα άκρα του πεδίου ορισμού της f, στα οποία όμως αυτή δεν ορίζεται. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,\alpha^2)\cup(\alpha^2,+\infty)$, άρα μοναδικό τέτοιο σημείο είναι το $x=\alpha^2$.

Αφού η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, έπεται ότι $\alpha^2=1$, οπότε $\alpha=-1$ ή $\alpha=1$.

- Αν $\alpha=-1$, τότε $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}=x$ για κάθε $x\neq 1$ και άρα

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x=1.$$

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, η ευθεία $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

- Αν $\alpha=1$, τότε $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ για κάθε $x\neq 1$ και άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty.$$

Επομένως, η $x=1$ θα είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f σε αυτήν την περίπτωση. Τελικά λοιπόν θα ισχύει $\boxed{\alpha=1.}$

B2. Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, $x\neq 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2.$$

Εφόσον ο παρονομαστής είναι θετικός, το πρόσημο της f' εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο των παραγόντων x και $x-2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=0$ το $f(0)=-1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=2$ το $f(2)=3$.

Β3. Η C_f έχει την $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$. Θα εξετάσουμε αν η C_f έχει ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$ στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

άρα $\lambda=1$. Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0,$$

άρα $\beta=0$.

Επομένως, η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν η C_f έχει ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$ στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

άρα $\lambda=1$. Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0,$$

άρα $\beta=0$.

Επομένως, η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=x$.

Εφόσον η C_f έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$, αποκλείεται να έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Για το σύνολο τιμών της f εργαζόμαστε ως εξής:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,0)$ και άρα

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=(-\infty,-1),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -1$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_2 = [0,1)$ και άρα για το σύνολο τιμών ισχύει ότι

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), f(0)\right] = (-\infty,-1],$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\infty.$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_3 = (1,2]$ και άρα

$$f(\Delta_3) = \left[f(2), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = [3,+\infty),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $f(2)=3$ και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x+1}{x-1} = +\infty.$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_4 = (2,+\infty)$ και άρα για το σύνολο τιμών ισχύει

$$f(\Delta_4) = \left(\lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (3,+\infty),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 3$, και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\boxed{f(\mathbb{R}-\{1\}) = (\infty,-1] \cup [3,+\infty).}$

B4. Αφού $f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, η f' είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως ρητή και για κάθε $x \neq 1$ ισχύει

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας για την f:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$.
- Η f δεν ορίζεται στο $x_0=1$, άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Β5. Ισχύει

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{x^2-x+1}{x-1}dx=\int_2^3\frac{x(x-1)+1}{x-1}dx=\int_2^3\left(x+\frac{1}{x-1}\right)dx.$$

Επομένως,

$$I=\left[\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|\right]_2^3=\left(\frac{3^2}{2}+\ln|3-1|\right)-\left(\frac{2^2}{2}+\ln|2-1|\right)=\frac{9}{2}+\ln2-2$$

$$\boxed{=\ln2+\frac{5}{2}.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θεωρούμε για $x>0$ τη συνάρτηση $g(x)=2\ln x+\frac{5\alpha}{x}-5\alpha$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{5\alpha}{x^2},\ x>0.$$

Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$, άρα η σχέση (2) γράφεται $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x>0$. Επομένως, ισχύει ότι:

- Η g παρουσιάζει ελάχιστο (άρα και τοπικό ελάχιστο) στο $x_0=1$.
- Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Από το Θεώρημα Fermat έπεται ότι

$$g'(1)=0 \Leftrightarrow 2-5\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{5}.$$

Γ2. Για το δοσμένο όριο χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u=e^{-h}$. Καθώς $h\to+\infty$, θα ισχύει $u\to 0^{+}$. Επίσης, ισχύει $e^{h}=\frac{1}{u}$. Επομένως, το ζητούμενο όριο γράφεται ως

$$\lim_{h\to+\infty} e^{h}\left(f\left(x+e^{-h}\right)-f(x)\right)=\lim_{u\to 0^{+}}\left[\frac{1}{u}\left(f(x+u)-f(x)\right)\right]=f'(x),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου και συγκεκριμένα από τη συζήτηση μετά από τον ορισμό στη σελ. 95 του σχολικού βιβλίου.

Γ3. Από το προηγούμενο ερώτημα και από τη σχέση (1) που δίνεται στην εκφώνηση, καθώς και από το γεγονός ότι $\alpha=\frac{2}{5}$, προκύπτει ότι $e^{2x+f(x)}f'(x)=1-2x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^{f(x)}f'(x)e^{2x}=1-2x \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}.$$

Το παραπάνω ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$e^{f(x)}f'(x)=(x)'e^{-2x}+x\left(e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(xe^{-2x}\right)'$$

για κάθε $x\geq 0$. Επιπλέον, οι συναρτήσεις $e^{f(x)}$, xe^{-2x} είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$, άρα από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$e^{f(x)}=xe^{-2x}+c \quad \text{για κάθε } x\geq 0.$$

Για $x=0$ έχουμε $e^{f(0)}=c \Leftrightarrow c=e^{0}=1$ και άρα

$$\boxed{e^{f(x)}=xe^{-2x}+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(xe^{-2x}+1\right) \quad \text{για κάθε } x\geq 0.}$$

Γ4. **i.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{e^{-2x}-2xe^{-2x}}{xe^{-2x}+1}=\frac{e^{-2x}(1-2x)}{xe^{-2x}+1}.$$

Αναζητούμε αρχικά τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-2x}(1-2x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Επίσης, η παράγωγος είναι θετική όταν $1-2x>0$, δηλαδή όταν $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, και αντίστοιχα αρνητική για $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
- Στη θέση $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με $f(0)=0$. Στη θέση $x_2=\frac{1}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο με $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)$. Πράγματι, αν $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$. Αν $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, τότε, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$. Συνεπώς, για κάθε $x\ge 0$ είναι $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$.

ii. Για $x\ge 0$, η δοσμένη εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$$x=e^{2x}\left(e^{\lambda}-1\right)\Leftrightarrow xe^{-2x}=e^{\lambda}-1$$
$$\Leftrightarrow xe^{-2x}+1=e^{\lambda} \Leftrightarrow \ln\left(xe^{-2x}+1\right)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda.$$

Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

Στο $\Delta_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(\Delta_1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right),f(0)\right]=\left[0,\ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)\right].$$

Στο $\Delta_2=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to\frac{1}{2}^{+}}f(x)\right).$$

Τώρα, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(xe^{-2x}+1\right) \quad (1)$$

Θέτουμε $u = xe^{-2x}$. Πρέπει να βρούμε το όριο του u, καθώς $x\to+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

Επομένως, το αρχικό όριο στη σχέση (1) είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(xe^{-2x}+1\right) = \lim_{u\to 0}\ln(u+1) = \ln 1 = 0.$$

Επιπλέον, ισχύει $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)$, συνεπώς

$$f(\Delta_2) = \left(0, \ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)\right)$$

και άρα

$$f(A_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[0, \ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)\right].$$

Για το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε τα επιμέρους σύνολα τιμών ως εξής:

- Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda \notin f(D_f)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία λύση.
- Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $f(x) = 0$, η οποία έχει ως μοναδική λύση την $x = 0$.
- Αν $0 < \lambda < \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in \Delta_1$, $x_2 \in \Delta_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \lambda$. Το $x_1 \in \Delta_1$ είναι μοναδικό στο Δ_1, γιατί $f \nearrow \Delta_1$ και ομοίως το $x_2 \in \Delta_2$ είναι μοναδικό στο Δ_2, γιατί $f \searrow \Delta_2$.
- Αν $\lambda = \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$ έχει ακριβώς μία ρίζα, την $x = \frac{1}{2}$ (μοναδική θέση ολικού μεγίστου).
- Αν $\lambda > \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$, τότε $\lambda \notin f(D_f)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία λύση.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. i. Ισχύει $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$. Θέτουμε $c=\int_0^1 f(x)dx$, οπότε για κάθε $x\geq 0$ ισχύει $f(x)=x-xe^x+2c$. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της ισότητας στο διάστημα $[0,1]$ παίρνουμε

$$c=\int_0^1(x-xe^x+2c)dx=\int_0^1(x+2c)dx-\int_0^1 xe^x dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+2cx\right]_0^1-\left[xe^x\right]_0^1+\int_0^1 e^x dx=\frac{1}{2}+2c-e+\left[e^x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}+2c-e+e-1=2c-\frac{1}{2},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$c=2c-\frac{1}{2}\Leftrightarrow c=\frac{1}{2},$$

δηλαδή $\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\text{, όπως θέλαμε.}}$

ii. Αφού η f συνεχής στο D_f θα ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$. Κοιτάζουμε ξεχωριστά καθένα από τα τρία μέλη της παραπάνω ισότητας.

- $f(0)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\alpha-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x)=\alpha-1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-xe^x+1)=1$.

Επομένως, πρέπει να ισχύει $\alpha-1=1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2.}$

Έτσι, ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x, & -\frac{\pi}{2}\leq x<0\\ x-xe^x+1, & x\geq 0\end{cases}.$$

Δ2. i. Στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$f'(x)=e^{-x}\sigma\upsilon\nu x+e^{-x}\eta\mu x=e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x).$$

Αναζητούμε τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \overset{\eta\mu x\neq 0}{\Leftrightarrow} \sigma\varphi x=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι $\eta\mu x\neq 0$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με $\eta\mu x$. Η μοναδική ρίζα της τελευταίας εξίσωσης στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι η $x=-\frac{\pi}{4}$. Άρα το $x=-\frac{\pi}{4}$ θα είναι κρίσιμο σημείο της f. Στο $(0,+\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με $f'(x)=(1-e^x)-xe^x$. Η τελευταία ποσότητα είναι αρνητική ως άθροισμα δύο αρνητικών ποσοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x>0$ ισχύει $e^x>1\Rightarrow 1-e^x<0$ και επιπλέον $-xe^x<0$. Τέλος, εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x-1}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(e^{-x}\sigma\upsilon\nu x+e^{-x}\eta\mu x\right)=1,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-e^x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1-e^x)=1-1=0.$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα και αυτό είναι κρίσιμο σημείο της. Έτσι, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα:

$$\boxed{x=-\frac{\pi}{4} \text{ και } x=0.}$$

ii. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς που έγιναν στο προηγούμενο υποερώτημα, ο τύπος της f' θα είναι

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x), & -\frac{\pi}{2}\leq x<0 \\ 1-e^x-xe^x, & x>0 \end{cases}.$$

Από το Δ2i έχουμε ήδη δείξει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$ και, αφού f συνεχής και στο $x_0=0$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, η f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, εφόσον δείξαμε παραπάνω ότι η μοναδική της ρίζα είναι το $x=-\frac{\pi}{4}$. Έπεται ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά. Ας προσδιορίσουμε το πρόσημό της επιλέγοντας μια τιμή από κάθε διάστημα:

- Είναι $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ και $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\pi/2}<0$, οπότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$
- Επίσης, $-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ και $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=e^{\pi/6}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)>0$, συνεπώς $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ και $[0,+\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$.
- Στη θέση $x_1=-\frac{\pi}{2}$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$.
- Στη θέση $x_2=-\frac{\pi}{4}$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\sqrt{2}\,e^{-\pi/4}}{2}.$$
- Στη θέση $x_3=0$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(0)=1$.

Δ3. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x>0$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι οι ποσότητες $e^{1-x}+x-2$ και $x-1-\ln x$ είναι μη αρνητικές.

Για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $\ln x\le x-1$ και άρα $x-1-\ln x\ge 0$.
Μάλιστα, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=1$.

Όπως έχουμε αναφέρει ξανά, αυτή η ανίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$. Αυτό μπορούμε να το δούμε αντικαθιστώντας το x με e^x στην ανισότητα $\ln x \leq x-1$. Προκύπτει τότε $\ln e^x \leq e^x - 1$, δηλαδή $e^x \geq x+1$. Μάλιστα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $e^x = 1$, δηλαδή όταν $x=0$. Αν τώρα στη θέση της μεταβλητής x θέσουμε το $1-x$, τότε θα έχουμε και $e^{1-x} \geq 1-x+1$, επομένως $e^{1-x}+x-2 \geq 0$, όπως θέλαμε.

Για να λύσουμε τη ζητούμενη ανισότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0,+\infty)$.

$$f\left(e^{1-x}+x-2\right) > f\left(x-1-\ln x\right) \overset{f\searrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} e^{1-x}+x-2 > x-1-\ln x$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x}-1+\ln x > 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{1-x}-1+\ln x,\ x>0$. Αρχικά, η h έχει προφανή ρίζα την $x=1$, αφού $h(1)=e^0-1+0=0$. Επιπλέον, η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = -e^{1-x}+\frac{1}{x}$$

για κάθε $x>0$. Όπως είδαμε παραπάνω, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $e^x \geq x+1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Αν στη θέση του x θέσουμε το $x-1$, θα είναι $e^{x-1} \geq x$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x-1=0$, δηλαδή για $x=1$.

Για $x>0$ μπορούμε να αντιστρέψουμε την ανισότητα και να καταλήξουμε στην $e^{1-x} \leq \frac{1}{x}$, η οποία, σύμφωνα με τον τύπο της h' παραπάνω, συνεπάγεται ότι $h'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, με ισότητα μόνο για $x=1$. Αφού η h είναι συνεχής στο $x_0=1$, η h θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως, η (1) ισοδύναμα γίνεται

$$e^{1-x}-1+\ln x > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(1) \boxed{\overset{h\nearrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} 0<x<1.}$$

Δ4. **i.** Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της f' που προσδιορίσαμε στο Ερώτημα Δ2i. Εφόσον η συνάρτηση είναι δίκλαδη, δουλεύουμε ξεχωριστά για κάθε κλάδο.

- Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x) = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - e^{-x}\eta\mu x - e^{-x}\eta\mu x + e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$$

$$= -2e^{-x}\eta\mu x.$$

Επειδή όμως ημx < 0 για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $e^x > 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, έπεται ότι

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

- Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x) = -e^x - e^x - xe^x = -e^x(x+2) < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\pi/2$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$

- Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$.
- Το σημείο $A(0,1)$ δεν είναι σημείο καμπής της C_f, αφού η f δεν είναι καν παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. Για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι

$$e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \overset{e^x > 0}{\Rightarrow} e^{2x} > e^x > 1.$$

Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα μετά από μια απλή αναδιάταξη των όρων της ως

$$f(e^{2x}) - f(e^x) < f(e^x)e^x - e^x f(1) \Leftrightarrow \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^x} < f(e^x) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x} < \frac{f(e^x) - 1}{e^x - 1},$$

όπου στο τελευταίο βήμα απλώς διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με τη θετική ποσότητα $e^x - 1$. Για να αποδείξουμε την τελευταία ανισότητα, θεωρούμε τυχόν $x > 0$. Τότε:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1, e^x]$ και $[e^x, e^{2x}]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1, e^x)$ και (e^x, e^{2x}).

Έτσι, από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (1, e^x)$, $\xi_2 \in (e^x, e^{2x})$ για τα οποία

$$f'(\xi_1) = \frac{f(e^x) - 1}{e^x - 1},\ f'(\xi_2) = \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x}.$$

Όμως ισχύει ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Έτσι, έχουμε

$$\xi_2 > \xi_1 > e^x > 1 \overset{f' \searrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_2) < f'(\xi_1) \boxed{\Leftrightarrow \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x} < \frac{f(e^x) - 1}{e^x - 1},}$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο. Αφού η ανισότητα ισχύει για το τυχόν $x > 0$, θα ισχύει σε κάθε $x > 0$.

Διαγώνισμα 4.5

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 77.

Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Λύση

Β1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$g(x) = xf(x) = x\frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{\ln x}.$$

Ισχύει λοιπόν $g'(x) = \dfrac{-1}{x\ln^2 x}$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$. Επίσης, για κάθε $0 < x \neq 1$ ισχύει ότι $\ln^2 x > 0$ και άρα $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1, +\infty)$.

B2. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει

$$g''(x)=-\frac{-\left(x\ln^2 x\right)'}{x^2\ln^4 x}=\frac{\ln^2 x+2x\ln x\dfrac{1}{x}}{x^2\ln^4 x}=\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x^2\ln^4 x}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα ισχύει η ισοδυναμία

$$g''(x)>0\overset{x^2\ln^4 x>0}{\Leftrightarrow}\ln^2 x+2\ln x>0.$$

Για τη μελέτη αυτής της ανίσωσης, θέτουμε $\omega=\ln x$. Ισχύει $\omega\neq 0$, καθώς $0<x\neq 1$. Τότε η ανίσωση γίνεται $\omega^2+2\omega>0$. Αυτό το τριώνυμο έχει ρίζες $\omega=0,\ \omega=-2$. Από τον πίνακα προσήμου του $\omega^2+2\omega$ προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $\omega\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, επομένως πρέπει $\omega<-2$ ή $\omega>0$.

ω	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\omega^2+2\omega$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Εφόσον $\omega=\ln x$, προκύπτει ότι

$$\ln x<-2\ \text{ή}\ \ln x<0\ \Leftrightarrow\ x<e^{-2}\ \text{ή}\ x<1.$$

Συνεπώς, ισχύει η ισοδυναμία

$$g''(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(0,e^{-2}\right)\cup(1,+\infty).$$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$g(x)$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

- Η g είναι κυρτή στο $\left(0,e^{-2}\right]$ και στο $(1,+\infty)$ και κοίλη στο $\left(e^{-2},1\right)$.
- Η C_g παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(e^{-2},g\left(e^{-2}\right)\right)=\left(e^{-2},-\frac{1}{2}\right)$.

Β3. Αρχικά εξετάζουμε αν οι κατακόρυφες ευθείες $x=0$, $x=1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_g.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$ αφου $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

  Άρα η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

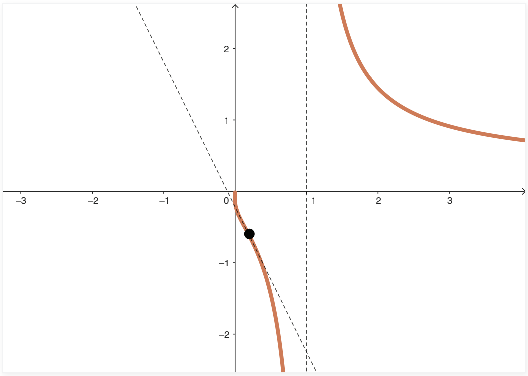
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln x}=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0$ και $\ln x<0$ για $x<1$.

  Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν υπάρχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\,.$$

Συνεπώς, η οριζόντια ευθεία $\boxed{y=0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Εφόσον υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη, δεν υπάρχουν πλάγιες. Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Σε αυτήν, μπορούμε να δούμε την κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς και το σημείο καμπής στο οποίο η εφαπτόμενη διαπερνά τη γραφική παράσταση.



Β4. **i.** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x\ln x}\right)'=\frac{-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}$$

και επομένως

$$f''(x)=\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x^2\ln^2 x+(\ln x+1)\left(2x\ln^2 x+2x^2\ln x\frac{1}{x}\right)}{x^4\ln^4 x}$$

$$=\frac{-x\ln^2 x+(\ln x+1)(2x\ln^2 x+2x\ln x)}{x^4\ln^4 x}=\frac{-x\ln^2 x+(\ln x+1)2x\ln x(\ln x+1)}{x^4\ln^4 x}$$

$$=\frac{x\ln x\left(-\ln x+2(\ln x+1)^2\right)}{x^4\ln^4 x}=\frac{2\ln^2 x+3\ln x+2}{x^3\ln^3 x}.$$

Για κάθε $x>1$ θα είναι $\ln x>0$, άρα $f''(x)>0$ και άρα η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(e,f(e))$ είναι:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{e^2}(x-e)+\frac{1}{e}=-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e}$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$, η C_f θα είναι «πάνω» από την εφαπτομένη της, με εξαίρεση ίσως το σημείο επαφής τους. Επομένως θα ισχύει ότι

$$\boxed{f(x)\geq -\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e}}$$

για κάθε $x>1$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=e$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η g είναι είναι εξ υποθέσεως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$. Έχουμε λοιπόν:

- $g(0)=f(0)-0^2+0=0$.
- $g'(0)=f'(0)-0+1=1$.
- $g'(1)=f'(1)-2+1=-1$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(0,g(0))$ θα έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y=g'(0)(x-0)+g(0)=x.$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(1,g(1))$ θα έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_2: y=g'(1)(x-1)+g(1)=-(x-1)+g(1).$$

Όμως αφού οι δύο εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$, προκύπτει αντικαθιστώντας $x=\frac{1}{2}$ στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ότι

$$\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+g(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+g(1)\ \boxed{\Leftrightarrow g(1)=0.}$$

Γ2. Η δοσμένη ισότητα, με μεταβλητή το x αντί του ξ, γράφεται ως

$$g'(x)+2x=1\Leftrightarrow g'(x)+2x-1=0\ \Leftrightarrow\left(g(x)+x^2-x\right)'=0.$$

Βάσει της υπόθεσης όμως, γνωρίζουμε ότι $g(x)=f(x)-x^2+x$, δηλαδή $g(x)+x^2-x=f(x)$. Επομένως, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως $f'(x)=0$. Ισχύει ότι:

- $f(0)=0$.
- $f(1)=g(1)+1^2-1=g(1)=0$.

Επιπλέον, η f είναι εξ υποθέσεως συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$, έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Όμως, όπως είδαμε και παραπάνω, ισχύει $f'(x)=g'(x)+2x-1$ και άρα το ξ ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow g'(\xi)+2\xi-1=0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow g'(\xi)+2\xi=1,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Γ3. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)f'(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xf'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1\ \Leftrightarrow\int_0^1\left[xf(x)\right]'dx=f(1)-f(0)$$

$$\overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow}\left[xf(x)\right]_0^1=f(1)\ \Leftrightarrow f(1)=f(1),$$

το οποίο προφανώς ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική ισότητα.

Γ4. Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Επομένως, από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ και $x_1,x_2\in[0,1]$, έτσι ώστε

$$m=f'(x_1)\le f'(x)\le M=f'(x_2)$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
m \le f'(x) \le M \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} mx \le xf'(x) \le Mx & \\
\Rightarrow \int_0^1 mxdx \le \int_0^1 xf'(x)dx \le \int_0^1 Mxdx & \\
\Leftrightarrow \left[\frac{mx^2}{2}\right]_0^1 \le \int_0^1 xf'(x)dx \le \left[\frac{Mx^2}{2}\right]_0^1 & \\
\Leftrightarrow \frac{m}{2} \le \int_0^1 xf'(x)dx \le \frac{M}{2} \Leftrightarrow m \le 2\int_0^1 xf'(x)dx \le M. \quad (1) &
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f'(x) - 2\int_0^1 f(x)dx,\ x \in [x_1, x_2]$$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, καθώς η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Επιπλέον, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
h(x) = f'(x) - 2\int_0^1 f(x)dx &\overset{\Gamma3.}{=} f'(x) - 2\int_0^1 (1-x)f'(x)dx \\
&= f'(x) - 2\int_0^1 xf'(x)dx.
\end{aligned}
$$

Από την (1) προκύπτει επίσης ότι

- $h(x_1) = f'(x_1) - 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx = m - 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx \le 0.$
- $h(x_2) = f'(x_2) - 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx = M - 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx \ge 0.$

Επομένως, έχουμε $h(x_1)h(x_2) \le 0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $h(x_1)h(x_2) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο $h(x_0) = 0$.
- Αν $h(x_1)h(x_2) = 0$, τότε είτε $h(x_1) = 0$ είτε $h(x_2) = 0$ και άρα σε αυτήν την περίπτωση $x_0 = x_1$ ή $x_0 = x_2$.

Έτσι, σε οποιαδήποτε περίπτωση, υπάρχει $x_0 \in [x_1, x_2]$ για το οποίο να ισχύει

$$\boxed{h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2\int_0^1 f(x)dx.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Στην ισότητα $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$, το δεύτερο μέλος είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Το πρώτο μέλος θα είναι συνεπώς επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα η f είναι πράγματι δύο φορές παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας παίρνουμε ότι

Η $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αλλά εδώ προφανώς ισχύει $\sqrt{16+f^2(x)}>0$, άρα το παραπάνω δεν αποτελεί πρόβλημα.

$$f''(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16+f^2(x)}}=\frac{f(x)}{\sqrt{16+f^2(x)}}\sqrt{16+f^2(x)}=f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπως θέλαμε. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα, για να δείξουμε ότι είναι σταθερή, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} g'(x)&=\left(f'(x)+f(x)\right)'e^{-x}+\left(f'(x)+f(x)\right)\left(e^{-x}\right)' \\ &=\left(f''(x)+f'(x)\right)e^{-x}-\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x} \\ &=e^{-x}\left(f''(x)-f(x)\right)=0, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f''(x)=f(x)$.

Δ2. Εφόσον $f''(x)=f(x)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f''(x)dx=\left[f'(x)\right]_{-1}^{1}=f'(1)-f'(-1)$$

$$=\sqrt{16+f^2(1)}-\sqrt{16+f^2(-1)}\overset{f(-1)=-f(1)}{=}\sqrt{16+f^2(1)}-\sqrt{16+\left(-f(1)\right)^2}$$

$$\boxed{=0,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Δ3. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Έστω ότι είναι ίση με μία σταθερά c. Ισχύει τότε η ισοδυναμία

$$g(x)=c\Leftrightarrow\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}=c\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=ce^{x}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι $f(0)=0$, οπότε από τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτει επίσης ότι $f'(0)=\sqrt{16+f^2(0)}=\sqrt{16}=4$. Όμως η παραπάνω ισότητα για $x=0$ δίνει

$$f'(0)+f(0)=c \Leftrightarrow c=4.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f'(x)+f(x)=4e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την ισότητα με e^x παίρνουμε

$$f'(x)e^x+f(x)e^x=4e^{2x} \Leftrightarrow \left(f(x)e^x\right)'=\left(2e^{2x}\right)'$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $f(x)e^x=2e^{2x}+C$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου C είναι μια νέα σταθερά. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(x)=2e^x+ce^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Για $x=0$ θα έχουμε $f(0)=2+c \Leftrightarrow c=-2$. Έτσι,

$$\boxed{f(x)=2e^x-2e^{-x}=2\left(e^x-e^{-x}\right),\ x\in\mathbb{R}.}$$

Δ4. Από την υπόθεση έχουμε $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εφόσον είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της f θα είναι το

$$f(\mathbb{R})\overset{f\nearrow}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},$$

όπου τα τελευταία όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\left(e^x-e^{-x}\right)$.

  Υπολογίζουμε το τελευταίο όριο σε δύο μέρη ξεχωριστά. Το πρώτο μέρος είναι απλό: $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0$. Για το δεύτερο μέρος, δηλαδή το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{-x}$, εκτελούμε την αντικατάσταση $u=-x$. Καθώς $x\to-\infty$, θα είναι $u\to+\infty$. Το όριο τώρα γράφεται $\lim\limits_{u\to+\infty}2e^u=+\infty$. Έπεται λοιπόν ότι

  $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2e^x-\lim_{x\to-\infty}2e^{-x}=0-(+\infty)=-\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(e^x-e^{-x}\right)$.

  Υπολογίζουμε και το τελευταίο όριο σε δύο μέρη ξεχωριστά. Το πρώτο μέρος είναι απλό: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Για το δεύτερο μέρος, δηλαδή για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-x}$, εκτελούμε και πάλι την αντικατάσταση $u=-x$, οπότε θα είναι $u\to-\infty$, καθώς $x\to+\infty$. Το όριο λοιπόν ισούται με $\lim\limits_{u\to-\infty}2e^u$ και έτσι το αρχικό όριο είναι ίσο με

  $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2e^x-\lim_{x\to+\infty}2e^{-x}=+\infty-0=+\infty.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, αυτή η ισοδυναμία γράφεται πιο αναλυτικά ως

$$\begin{aligned} y = 2\left(e^x - e^{-x}\right) &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \frac{y}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \frac{y}{2} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = \frac{y}{2}e^x \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{y}{2}e^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα $\omega = e^x > 0$. Τότε η παραπάνω ισότητα γίνεται $\omega^2 - \frac{y}{2}\omega - 1 = 0$. Θεωρούμε το y σταθερά και λύνουμε την εξίσωση ως προς x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \frac{y^2}{4} + 4 = \frac{y^2 + 16}{4} > 0.$$

Οι δύο λύσεις του τριωνύμου δίνονται τότε ως εξής:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\frac{y}{2} \pm \frac{\sqrt{y^2+16}}{2}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2+16}}{4}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι $y < \sqrt{y^2+16}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $y \le 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής. Αν $y \ge 0$, η ανισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$y < \sqrt{y^2+16} \Leftrightarrow y^2 < y^2 + 16,$$

το οποίο ισχύει. Επομένως, η λύση $\omega = \frac{y - \sqrt{y^2+16}}{4}$ δεν γίνεται δεκτή, καθώς έτσι θα είχαμε $\omega < 0$ που είναι άτοπο, διότι θυμηθείτε ότι $\omega = e^x > 0$. Επομένως, θα είναι $\omega = \frac{y + \sqrt{y^2+16}}{4}$ και άρα $e^x = \frac{y + \sqrt{y^2+16}}{4}$ και επομένως $x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2+16}}{4}\right)$. Η αντίστροφη συνάρτηση δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+16}}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Δ5. Ισχύει

$$I=\int_0^3 \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)dx=\int_0^3 f^{-1}(x)dx.$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα, θέτουμε $u=f^{-1}(x)$. Ισχύει τότε

$$u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u),$$

επομένως $dx=f'(u)du$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x=0$, τότε $u=f^{-1}(0)=\ln\left(\frac{\sqrt{16}}{4}\right)=\ln\left(\frac{4}{4}\right)=\ln 1=0$.
- Όταν $x=3$, τότε $u=f^{-1}(3)=\ln\left(\frac{3+\sqrt{9+16}}{4}\right)=\ln\left(\frac{3+5}{4}\right)=\ln 2.$

Επομένως, το ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$I=\int_0^{\ln 2} uf'(u)du$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} uf'(u)du &= \left[uf(u)\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}(u)'f(u)du\\ &=\ln 2 f(\ln 2)-\int_0^{\ln 2} f(u)du=\ln 2 f(\ln 2)-2\int_0^{\ln 2}\left(e^u-e^{-u}\right)du\\ &=\ln 2 f(2)-2\left[e^u+e^{-u}\right]_0^{\ln 2}=2\ln 2\left(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right)-2\left(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}-2\right)\\ &=2\ln 4\left(2-\frac{1}{2}\right)-2\left(2+\frac{1}{2}-2\right)\ \boxed{=3\ln 2-1.}\end{aligned}$$

Διαγώνισμα 4.6

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Το αντίστροφο είναι σωστό, όμως αυτή η κατεύθυνση δεν ισχύει απαραίτητα. Κλασικό παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=-x^3$, $x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, όμως παρ' όλα αυτά για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=-3x^2$, οπότε $f'(0)=0$.

ii. Η μεταβλητή ολοκλήρωσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Είναι το ίδιο να γράψουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \text{ ή } \int_\alpha^\beta f(y)dy \text{ ή } \int_\alpha^\beta f(u)du.$$

Για τον ισχυρισμό της πρότασης, δείτε τη σελ. 212 του σχολικού βιβλίου.

iii. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116.

iv. Το συμπέρασμα θα ήταν σωστό αν μας είχε δοθεί ότι $x_0\in(\alpha,\beta)$, λόγω του θεωρήματος του Fermat. Όπως έχει διατυπωθεί, η πρόταση είναι λανθασμένη. Για παράδειγμα, αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή η $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο $x_0=0$, όμως παρ' όλα αυτά ισχύει $f'(0)=1\neq 0$.

v. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 214 (θεώρημα 3).

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{x}+2x>0,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Εφόσον είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{f\big((0,+\infty)\big)=\Big(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big)=\mathbb{R},}$$

όπου στο τελευταίο βήμα κάναμε τον υπολογισμό των ορίων ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x+x^2-1\right)=2(-\infty)+0-1=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln x+x^2-1\right)=2(+\infty)+(+\infty)-1=+\infty.$

B2. Εφόσον το πεδίο ορισμού είναι το $(0,+\infty)$, έχει νόημα να αναζητήσουμε ασύμπτωτες στο $x_0=0$ και στο $+\infty$. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο ερώτημα, ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είδαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Αναζητούμε λοιπόν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+x-\frac{1}{x}\right).$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι εύκολοι στον υπολογισμό, οπότε επικεντρωνόμαστε στον πρώτο όρο. Αυτός έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De L' Hospital. Προκύπτει έτσι ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=0+(+\infty)-0=+\infty,$$

οπότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

B3. Τα σημεία τομής είναι όλα τα σημεία της μορφής $A(x_0,0)$, όπου x_0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=0$. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα, αυτή η εξίσωση μπορεί να έχει το πολύ μία λύση. Παρατηρούμε ότι $f(1)=2\ln 1+1^2-1=0$, επομένως το $x_0=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης. Το ζητούμενο σημείο τομής είναι λοιπόν το $A(1,0)$. Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f σε αυτό το σημείο, πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά την παράγωγο $f'(1)$. Είδαμε στο Ερώτημα Β1 ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}+2x$, οπότε $f'(1)=3$. Η ζητούμενη εφαπτόμενη θα έχει λοιπόν εξίσωση

$$(\varepsilon): y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+0\boxed{=3x-3.}$$

Β4. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x^2+x^3}{x+1}=\frac{x^2(x+1)}{x+1}=x^2,$$

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_1^e(2\ln x+x^2-1-x^2)dx=\int_1^e(2\ln x-1)dx$$

$$=2\int_1^e\ln x dx-[x]_1^e=2\int_1^e\ln x dx-(e-1)\quad(1)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου όρου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, όπως κάνουμε πολύ συχνά σε ολοκληρώματα λογαριθμικών συναρτήσεων. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\int_1^e\ln x dx=\int_1^e(x)'\ln x dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x(\ln x)'dx$$

$$=(e\ln e-\ln 1)-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-\int_1^e 1dx$$

$$=e-[x]_1^e=e-(e-1)=1.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (1) ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$2\int_1^e\ln x dx-(e-1)=2-(e-1)\boxed{=3-e.}$$

Β5. Θεωρώντας τον λογάριθμο των δύο μελών, η δοσμένη ισότητα μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=e^{\beta^2-\alpha^2}\Rightarrow\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\ln e^{\beta^2-\alpha^2}\Rightarrow 2\ln\frac{\alpha}{\beta}=\beta^2-\alpha^2$$

$$\Rightarrow 2(\ln\alpha-\ln\beta)=\beta^2-\alpha^2\Rightarrow 2\ln\alpha+\alpha^2=2\ln\beta+\beta^2$$

$$\Rightarrow 2\ln\alpha+\alpha^2-1=2\ln\beta+\beta^2-1\Rightarrow f(\alpha)=f(\beta).$$

Η f όμως είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1». Επομένως, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $\boxed{\alpha=\beta\text{, όπως θέλαμε.}}$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Από τον τύπο της g προκύπτει άμεσα ότι $g(0)=f(0)=0$. Εφόσον η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\in\mathbb{R}.$$

Υπολογίζουμε καθένα από τα δύο όρια ξεχωριστά.

Για το δεξί όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f(x)-2x}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-2x}{x^2}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-2}{2x}\overset{f'(0)=2}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0),$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(0)=0$ και εφαρμόσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$ και στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση f' στο σημείο $x_0=0$. Γνωρίζουμε εξ υποθέσεως ότι η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$, οπότε αυτό μας επιτρέπει τη χρήση του ορισμού της παραγώγου.

Για το αριστερό όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-\frac{3x}{2}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\overset{f(0)=0}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{3}{2}\right)=f'(0)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση f στο σημείο $x_0=0$.

Από την ισότητα των δύο ορίων έπεται ότι $\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}$, οπότε $\boxed{f''(0)=1.}$

Γ2. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}-1 \text{ για } x\neq 0.$$

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η συνάρτηση είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0,+\infty)$ και $(-\infty,0)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}-1\right)'=\frac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}-\frac{x(e^x)'-(x)'e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\frac{xe^x-e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}.$$

Από τη δοσμένη σχέση γνωρίζουμε ότι

$$xf'(x)-f(x)=(x-1)e^x+1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, απ' όπου προκύπτει ότι $h'(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η h είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, όχι όμως απαραίτητα σταθερή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}-\{0\}$.

Η αντίστοιχη συνέπεια του Θ.Μ.Τ ισχύει μόνο για διαστήματα. Δείτε τη σελ. 133 του σχολικού βιβλίου.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x)=c_1$ για $x<0$ και $h(x)=c_2$ για $x>0$, όπου c_1,c_2 είναι σταθερές. Ισχύει τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=c_1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=c_2$. Όμως από τον τύπο της h προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}h(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}-1\right)\overset{f(0)=0}{=}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{e^x-1}{x}-1\right). \quad (2)$$

Ο πρώτος όρος στο παραπάνω όριο ισούται με $f'(0)$ από τον ορισμό της παραγώγου. Για το δεύτερο όρο μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα De L' Hospital, εφόσον αυτός ο όρος έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Ο κανόνας De L' Hospital δίνει

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=1,$$

άρα πλέον από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}h(x)=f'(0)-1-1=f'(0)-2=0,$$

διότι γνωρίζουμε ότι $f'(0)=2$. Παραπάνω όμως είδαμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=c_1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι τελικά $c_1=0$. Με μία εντελώς όμοια διαδικασία, αυτήν τη φορά για το δεξί όριο, μπορούμε να δείξουμε ότι $c_2=0$. Προκύπτει λοιπόν ότι $h(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, το οποίο ισοδύναμα μας δίνει ότι

$$\boxed{\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}+1 \quad \text{για κάθε } x\neq 0\text{, όπως θέλαμε.}}$$

ii. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας του Ερωτήματος Γ2i με το x προκύπτει ότι $f(x)=e^x+x-1$ για κάθε $x\neq 0$. Γνωρίζουμε όμως ότι $f(0)=0$, και ταυτόχρονα $e^0+0-1=0$, οπότε οι τύποι των δύο συναρτήσεων συμφωνούν και για $x=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{f(x)=e^x+x-1 \quad \text{για κάθε } x\neq 0\,.}$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=\left(e^x+x-1\right)'=e^x+1$. Είναι προφανές ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι λοιπόν και «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας, αυτό δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Υπολογίζουμε τα δύο όρια ξεχωριστά:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-1\right)=0+(-\infty)-1=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-1\right)=(+\infty)+(+\infty)-1=+\infty\,.$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

Γ4. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=+\infty$. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα όπως και η f, άρα το σύνολο τιμών της δίνεται από τη σχέση

$$f^{-1}(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x),\lim_{x\to+\infty}f^{-1}(x)\right). \qquad (3)$$

Γνωρίζουμε όμως από την άλλη ότι το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι ίσο με το πεδίο ορισμού της f, όπως ισχύει με κάθε ζεύγος αντίστροφων συναρτήσεων. Με άλλα λόγια, το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι ίσο με το $\mathbb{R}$. Έπεται λοιπόν από την (3) ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty \text{, όπως θέλαμε.}$$

Στο ζητούμενο όριο θέτουμε $u=f^{-1}(x)$. Θα ισχύει τότε $x=f(u)$. Επίσης, όπως δείξαμε ακριβώς παραπάνω, ισχύει $u\to+\infty$, καθώς $x\to+\infty$. Επομένως, το όριο γράφεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+f^{-1}(x)}{x-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)+u}{f(u)-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u+2u-1}{e^u+u-2}$$

$$\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u+2}{e^u+1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{e^u}=1,$$

όπου στο τρίτο και στο τέταρτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Αρχικά παρατηρούμε ότι, αφού η ευθεία $y=2x$ είναι εφαπτόμενη της C_f στο $O(0,0)$, θα ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=2$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα περιέχει την $f(x)$ και στην υπόθεση μας έχει δοθεί ένα ολοκλήρωμα που περιέχει την $f''(x)$. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν ολοκλήρωση κατά παράγοντες με σκοπό να εμφανίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα την f'' και να χρησιμοποιήσουμε τη δοσμένη υπόθεση. Ισχύει λοιπόν

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x-2)'f(x)dx=\left[(x-2)f(x)\right]_0^2-\int_0^2(x-2)f'(x)dx$$

$$=-(-2)\cdot f(0)-\int_0^2\left(\frac{(x-2)^2}{2}\right)'f'(x)dx$$

$$\overset{f(0)=0}{=}-\left[\frac{(x-2)^2}{2}f'(x)\right]_0^2+\int_0^2\frac{(x-2)^2}{2}f''(x)dx$$

$$=-0+\frac{(-2)^2}{2}f'(0)-3\overset{f'(0)=2}{=}1,$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση

$$\int_0^2(x-2)^2f''(x)dx=-6.$$

Δ2. Έστω $g(x)=f(x)\ln(x-1)+e^{2-x}-3+x$ για $x\in(1,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $g(x)\le 0$ για κάθε $x>1$. Ισχύει όμως

$$g(2)=f(2)\ln 1+e^{2-2}-3+2\ =0,$$

άρα η g παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο στη θέση $x=2$. Εφόσον είναι παραγωγίσιμη και το $x=2$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, έπεται ότι $g'(2)=0$. Για κάθε $x>1$ είναι

$$\begin{aligned} g'(x)&=\left(f(x)\ln(x-1)+e^{2-x}-3+x\right)' \\ &=f'(x)\ln(x-1)+f(x)\cdot\frac{1}{x-1}+e^{2-x}\cdot(2-x)'+1 \\ &=f'(x)\ln(x-1)+\frac{f(x)}{x-1}-e^{2-x}+1, \end{aligned}$$

άρα

$$g'(2)=f'(2)\ln 1+\frac{f(2)}{2-1}-e^{0}+1=f(2)$$

Εφόσον $g'(2)=0$, έπεται ότι $\boxed{f(2)=0\text{, όπως θέλαμε.}}$

Δ3. Εφόσον $f(1)\ne \eta\mu f(1)$, είναι καταρχάς ξεκάθαρο ότι $f(1)\ne 0$. Ας υποθέσουμε ότι $f(1)<0$. Τότε, για τη συνάρτηση g του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} g(x)&=\lim_{x\to 1^+}\left(f(x)\ln(x-1)+e^{2-x}-3+x\right) \\ &=f(1)\cdot(-\infty)+e-3+1\ =+\infty, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε λόγω της συνέχειας της f στο σημείο $x_0=1$ και η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι $f(1)<0$. Εφόσον $\lim_{x\to 1^+} g(x)=+\infty$, έπεται ότι $g(x)>0$ για x κοντά στο $x_0=1$ (και δεξιά από αυτό). Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $g(x)\le 0$ για κάθε $x>1$. Εφόσον καταλήξαμε σε άτοπο, συμπεραίνουμε ότι τελικά $f(1)>0$.

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα εν προκειμένω ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_1\in(0,1)\subseteq(0,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)>0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[1,2]$, παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_2\in(1,2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\overset{f(2)=0}{=}-f(1)<0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\boxed{f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0\text{, όπως θέλαμε.}}$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι η f'' είναι συνεχής. Επομένως, θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη, άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$. Σημειώνουμε ότι $\xi_1<\xi_2$, καθώς είδαμε ότι $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,2)$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε αυτό το διάστημα, παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\frac{-f(1)-f(1)}{\xi_2-\xi_1}=-\frac{2f(1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

Εφόσον η f'' διατηρεί πρόσημο, έπεται ότι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ5. i. Η f' είναι συνεχής διότι είναι παραγωγίσιμη. Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, μια και γνωρίζουμε ότι $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$. Προκύπτει λοιπόν ότι η f' έχει μια ρίζα ρ στο διάστημα (ξ_1,ξ_2). Λόγω του ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζουμε τώρα τα δύο μέλη της ισότητας $f(x)=f(2-x)$ και παίρνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=f'(2-x)(2-x)'=-f'(2-x).$$

Για $x=\rho$ προκύπτει ότι $0=f'(\rho)=-f'(2-\rho)$, δηλαδή $f'(2-\rho)=0$. Εξηγήσαμε όμως ότι το ρ είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $2-\rho=\rho$, δηλαδή $\rho=1$. Συμπεραίνουμε ότι τελικά η μοναδική ρίζα της f' είναι η $\rho=1$, άρα αυτό είναι και το μοναδικό κρίσιμο της f. Άλλου είδους κρίσιμα σημεία δεν υπάρχουν, διότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Όσον αφορά τη μονοτονία της f, αυτή εξαρτάται από το πρόσημο της f'. Είδαμε όμως ότι $f'(1)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f \nearrow (-\infty,1]$ και $f \searrow [1,+\infty)$.

ii. Είδαμε ότι η μοναδική ρίζα της f' είναι η $x=1$, οπότε η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$f(e^x+x)+\int_0^2 f(t)dt-f(1)=1 \Leftrightarrow f(e^x+x)+1-f(1)=1$$

$$\Leftrightarrow f(e^x+x)=f(1),$$

όπου στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος, δηλαδή ότι $\int_0^2 f(t)dt=1$. Στο Ερώτημα i είδαμε ότι $f \nearrow (-\infty,1]$ και $f \searrow [1,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=1$, και μάλιστα, λόγω της μονοτονίας, η θέση $x=1$ είναι η μοναδική στην οποία η f λαμβάνει την τιμή $f(1)$. Επομένως, η εξίσωση $f(e^x+x)=f(1)$, στην οποία έχουμε καταλήξει παραπάνω, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$e^x+x=1 \Leftrightarrow e^x+x-1=0.$$

Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, μπορούμε να θεωρήσουμε $g(x)=e^x+x-1$ για $x\in\mathbb{R}$ και να αποδείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Εφόσον $g(0)=0$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες της λύσης, καθώς η g είναι ακριβώς η συνάρτηση f στο ΘΕΜΑ Γ, στο οποίο την έχουμε ήδη μελετήσει αναλυτικά ως προς τη μονοτονία. Παραπέμπουμε λοιπόν εκεί για τις λεπτομέρειες.

Διαγώνισμα 4.7

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Για το πεδίο ορισμού της f, θα πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ και άρα $D_f=(-1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1},\ x>-1.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2},\ x>-1.$$

Επειδή για κάθε $x>-1$ ισχύει $e^x>0$ και $1/(x+1)^2>0$, προκύπτει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο D_f.

Β2. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=e^0-\frac{1}{0+1}=1-1=0$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

- Αν $-1<x<0$, τότε, αφού $f'\nearrow(-1,+\infty)$, προκύπτει ότι $f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$.
- Αν $x>0$, τότε, αφού $f'\nearrow(-1,+\infty)$, προκύπτει ότι $f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται και στον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=e^0-\ln 1-2=-1$. Πράγματι, αν $-1<x\le 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, ισχύει ότι

$$f(x)\ge f(-1).$$

B3. Έστω $\Delta_1=(-1,0]$ και $\Delta_2=(0,+\infty)$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, θα ισχύει

$$f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim_{x\to -1^+} f(x)\right)=[-1,+\infty),$$

όπου το όριο

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(e^x-\ln(x+1)-2\right)$$

στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκε ως εξής:

- $\lim_{x\to -1^+}\left(e^x-2\right)=e^{-1}-2.$
- Για τον όρο $\lim_{x\to -1^+}-\ln(x+1)$ θέτουμε $u=x+1$. Θα ισχύει τότε $u\to 0^+$, καθώς $x\to -1^+$, άρα αυτό το όριο γράφεται ως $\lim_{u\to 0^+}-\ln u=+\infty$.

Προσθέτοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει ότι $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, όπως ισχυριστήκαμε παραπάνω.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2, θα ισχύει

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=(-1,+\infty),$$

όπου τα όρια στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-1$
  όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο $x=0$.

- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} e^x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)$

  Ο δεύτερος όρος έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$, οπότε χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{e^x}\right)=0\cdot 0=0.$$

Για τον τρίτο όρο ισχύει προφανώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$. Το όριο ξαναγράφεται λοιπόν ως

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=(+\infty)(1-0-0)=+\infty,\text{ όπως θέλαμε.}$$

Προκύπτει τελικά ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(D_f)=[-1,+\infty)\cup(-1,+\infty)=[-1,+\infty).$$

Η εξίσωση $e^x=\ln(x+1)+2026$ ισοδύναμα γράφεται

$$e^x=\ln(x+1)+2026 \Leftrightarrow e^x-\ln(x+1)-2=2024$$
$$\Leftrightarrow f(x)=2024.$$

Ισχύει ότι:

- $2024\in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $x_1\in(-1,0]$ για το οποίο ισχύει ότι $f(x_1)=2024$. Το x_1 είναι το μοναδικό στο Δ_1 με αυτήν την ιδιότητα, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1. Επιπλέον, $x_1\neq 0$, αφού
$$f(0)=-1\neq 2024.$$
- $2024\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $x_2\in(0,+\infty)$ για το οποίο ισχύει ότι $f(x_2)=2024$. Το x_2 είναι το μοναδικό στο Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

B4. Είδαμε στο Ερώτημα Β2 ότι $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$, οπότε η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είδαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Θα αναζητήσουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τα εξής:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$,

  όπου στο πρώτο βήμα κάναμε χρήση του κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty,$

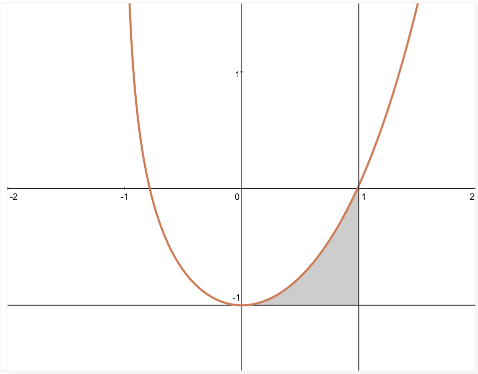
  όπου και πάλι στο πρώτο βήμα κάναμε χρήση του κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντια, ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B5. Από τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων προκύπτει ότι για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq -1\Leftrightarrow f(x)+1\geq 0,$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το εν λόγω γραμμοσκιασμένο σκιασμένο χωρίο Ω. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με



$$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)-(-1)|dx\overset{f(x)+1\geq 0}{=}\int_0^1(f(x)+1)dx$$

$$=\int_0^1(e^x-\ln(x+1)-1)dx=\left[e^x\right]_0^1-\int_0^1\ln(x+1)dx-[x]_0^1$$

$$=e-1-\int_0^1\ln(x+1)dx-1.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_0^1\ln(x+1)dx=\int_0^1(x+1)'\ln(x+1)dx$$

$$=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=2\ln2-[x]_0^1=2\ln2-1.$$

Επομένως, $E(\Omega)=e-1-(2\ln2-1)-1=e-1-2\ln2$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-xe^{2x}$. Τότε, από υπόθεση έχουμε ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=f(0)-0=0$ και άρα $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων σε όλο το $\mathbb{R}$ με
$$g'(x)=f'(x)-e^{2x}-2xe^{2x}$$
- Η g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$ που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Από το Θεώρημα Fermat προκύπτει ότι
$$g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)-1=0\ \boxed{\Leftrightarrow f'(0)=1.}$$

Γ2. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται
$$\int_0^1 f^2(x)-2xf(x)e^{2x}+x^2e^{4x}dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)-xe^{2x}\right)^2dx=0$$
$$\Leftrightarrow\int_0^1 g^2(x)\,dx=0,$$

όπου $g(x)=f(x)-xe^{2x}$. Ισχύει ότι $g^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και g^2 συνεχής στο $[0,1]$. Αν υπήρχε $x_0\in[0,1]$ για το οποίο $g(x_0)>0$, τότε θα ίσχυε ότι $g^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και η g^2 δεν θα ήταν παντού μηδέν στο $[0,1]$. Επομένως θα είχαμε ότι $\int_0^1 g^2(x)dx>0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού είδαμε προηγουμένως ότι $\int_0^1 g^2(x)dx=0$.

Άρα θα πρέπει τελικά να ισχύει ότι $g^2(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$, επομένως και $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Ισοδύναμα,
$$\boxed{f(x)-xe^{2x}=0\Leftrightarrow f(x)=xe^{2x}\ \text{ για κάθε } x\in[0,1].}$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει
$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(1+2x).$$

Επομένως, για το πρόσημο της f' ισχύει η ισοδυναμία
$$f'(x)>0\overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow}1+2x>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-1/2$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1/2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1/2$ το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}=-\frac{1}{2e}.$$

Πράγματι, αν $x\leq-\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, ενώ, αν $x\geq-\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=2e^{2x}+2(1+2x)e^{2x}=2e^{2x}(1+1+2x)=2e^{2x}(2+2x)=4e^{2x}(1+x).$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$f''(x)>0 \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} 1+x>0 \Leftrightarrow x>-1.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο προκύπτουν οι ισοδυναμίες $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

- Η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,-1]$.
- Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_1=-1$. Ισχύει $f(-1)=-e^{-2}=-\frac{1}{e^2}$, άρα

το σημείο καμπής είναι το $\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)$.

Γ4. i. Η F είναι αρχική της f, άρα είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $F'(x)=f(x)$. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow f(\xi)=\int_0^1 F'(x)dx \Leftrightarrow f(\xi)=F(1)-F(0).$$

Θα επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[0,1]$.

- Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ διότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ για τον ίδιο λόγο.

Από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε

$$f(\xi)=F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=F(1)-F(0),$$ όπως θέλαμε.

ii. Η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$, επομένως η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται για $x\geq -1$ «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Αυτό το γεγονός γράφεται με μαθηματικούς όρους ως

$$f(x)\geq f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right),$$

για κάθε $x\geq -1$. Επειδή το μοναδικό σημείο του $[-1,+\infty)$ στο οποίο ισχύει η ισότητα είναι το $x=\frac{1}{2}$, προκύπτει για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1\left(f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2\right]_0^1+f\left(\tfrac{1}{2}\right)[x]_0^1$$

$$=\tfrac{1}{2}f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\right)+f\left(\tfrac{1}{4}\right) \text{ ή } (1-0)=f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Για το σημείο ξ γνωρίζουμε όμως ότι $f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx$, άρα η παραπάνω σχέση μάς δίνει ότι $f(\xi)>f\left(\frac{1}{2}\right)$. Η f όμως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, όπως έχουμε δείξει στο Ερώτημα Γ3, οπότε από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι $\xi>\frac{1}{2}$, όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(x)dx$ είναι απλώς ένας σταθερός αριθμός, ο οποίος δεν εξαρτάται από το t. Μπορούμε επομένως να τον βγάλουμε εκτός του ολοκληρώματος ως προς t μέσα στο οποίο βρίσκεται. Η δοσμένη ισότητα λοιπόν γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$g(x) = \frac{3}{4}x^2\int_0^1 g(x)dx + \frac{9}{16}\int_0^1\left(\int_0^1 g(x)dx\right)g(t)dt$$

$$= \frac{3}{4}x^2\int_0^1 g(x)dx + \frac{9}{16}\int_0^1 g(x)dx\int_0^1 g(t)dt.$$

Θέτουμε $\alpha = \int_0^1 g(x)dx \in \mathbb{R}$. Προκύπτει τότε από την παραπάνω ισότητα ότι

$$g(x) = \frac{3}{4}\alpha x^2 + \frac{9}{16}\alpha^2.$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\alpha = \int_0^1 g(x)dx = \frac{\alpha}{4}\left[x^3\right]_0^1 + \frac{9}{16}\alpha^2\left[x\right]_0^1 = \frac{\alpha}{4} + \frac{9}{16}\alpha^2.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση

$$\alpha = \frac{\alpha}{4} + \frac{9}{16}\alpha^2 \overset{\cdot 16}{\Leftrightarrow} 12\alpha = 9\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 12\alpha - 9\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha(4-3\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \;\; \text{ή} \;\; 4 - 3\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \;\; \text{ή} \;\; \alpha = \frac{4}{3}.$$

Αν $\alpha = 0$, τότε $g(x) = \frac{3}{4}\cdot 0\cdot x^2 + \frac{9}{16}\cdot 0^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι άτοπο, αφού στην εκφώνηση μας έχει δοθεί ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, προκύπτει ότι $\alpha = \frac{4}{3}$ και έτσι

$$\boxed{g(x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^2 + \frac{9}{16}\cdot\frac{16}{9} = x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.}$$

Δ2. Είναι $f(\varepsilon\varphi x)=\dfrac{1}{g(\varepsilon\varphi x)}=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}$ και επομένως έχουμε

$$f(\varepsilon\varphi x)=\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi^2 x+1)f(\varepsilon\varphi x)=1\Leftrightarrow\left[F(\varepsilon\varphi x)\right]'=(x)'.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, ώστε $F(\varepsilon\varphi x)=x+c$ για κάθε $x>0$. Για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $F(\varepsilon\varphi 0)=0+c\Leftrightarrow c=0$ και άρα $F(\varepsilon\varphi x)=x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Επομένως, για $x=\pi/4$ θα έχουμε $F\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow F(1)=\frac{\pi}{4}$. Προκύπτει λοιπόν ότι

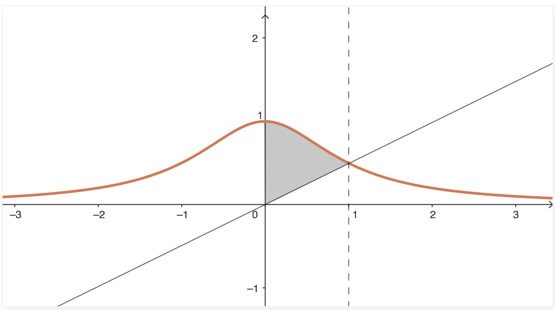
$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=F(1)-F(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4},\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Δ3. Ο άξονας $y'y$ είναι φυσικά η κατακόρυφη ευθεία $x=0$. Θα βρούμε αρχικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$, καθώς και τη σχετική θέση των δύο. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)\geq\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}\geq\frac{x}{2}\overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}2\geq x^3+x\Leftrightarrow x^3+x-2\leq 0.\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3+x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η (1) τότε γράφεται ισοδύναμα ως

$$h(x)\leq 0\Leftrightarrow h(x)\leq h(1)\overset{h\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}x\leq 1.$$



Έπεται ότι το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ είναι το $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ και ότι η C_f βρίσκεται «πάνω» από αυτήν την ευθεία για $x\leq 1$. Το διπλανό σχήμα απεικονίζει όλες αυτές τις πληροφορίες. Εφόσον $f(x)\geq x/2$ στο $[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδόν, εκφρασμένο σε τετραγωνικές μονάδες, είναι ίσο με

$$E(\Omega)=\int_0^1\left|f(x)-\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 f(x)dx-\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ \boxed{=\frac{\pi-1}{4}.}$$

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Για $x \geq 0$ ισχύει $f'(x) \leq 0$ και η ισότητα στην τελευταία ανισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Η f είναι συνεχής στη θέση $x = 0$, οπότε συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Σαφώς αυτό σημαίνει ότι είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[0,1] \subseteq [0,+\infty)$. Έτσι, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι:

$$\boxed{0 \leq x \leq 1 \overset{f \searrow [0,1]}{\Leftrightarrow} f(0) \geq f(x) \geq f(1),}$$

όπως θέλαμε. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$T(x) = \int_0^1 e^{t^2} f(t)dt - f(x)\int_0^1 e^{t^2} dt$$

για $x \in [0,1]$. Επειδή οι συναρτήσεις e^{t^2} και $f(t)$ είναι συνεχείς, η συνάρτηση $e^{t^2} f(t)$ είναι επίσης συνεχής και έτσι τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 e^{t^2} f(t)dt\,,\quad \int_0^1 e^{t^2} dt$$

ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί. Η T είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης έχουμε

Τα δύο ολοκληρώματα είναι απλώς πραγματικοί αριθμοί, άρα η συνάρτηση έχει τη μορφή α-β f(x).

$$T(1) = \int_0^1 e^{t^2} f(t)dt - f(1)\int_0^1 e^{t^2} dt$$

$$= \int_0^1 e^{t^2} f(t)dt - \int_0^1 f(1)e^{t^2} dt = \int_0^1 e^{t^2}\left(f(t) - f(1)\right)dt$$

και

$$T(0) = \int_0^1 e^{t^2} f(t)dt - f(0)\int_0^1 e^{t^2} dt$$

$$= \int_0^1 e^{t^2} f(t)dt - \int_0^1 f(0)e^{t^2} dt = \int_0^1 e^{t^2}\left(f(t) - f(0)\right)dt.$$

Από την $f(0) \geq f(t) \geq f(1)$, και εφόσον $e^{t^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ισοδύναμα ότι

$$e^{t^2} f(0) \geq e^{t^2} f(t) \geq e^{t^2} f(1) \quad (2)$$

για κάθε $t\in[0,1]$. Επομένως, είναι

$$e^{t^2}f(t)\geq e^{t^2}f(1)\Rightarrow e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)\geq 0$$

για κάθε $t\in[0,1]$. Όμως, η συνάρτηση $e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Για την ακρίβεια, το μοναδικό σημείο στο οποίο μηδενίζεται είναι το $t=1$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμά της θα είναι αυστηρά θετικό, δηλαδή

$$\int_0^1 e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)dt>0\Rightarrow T(1)>0. \qquad (3)$$

Με όμοιο τρόπο, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι είναι $e^{t^2}f(t)\leq e^{t^2}f(0)$, άρα $e^{t^2}\left(f(t)-f(0)\right)\leq 0$. Όμοια με πριν, η συνάρτηση $e^{t^2}\left(f(t)-f(0)\right)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Άρα το ολοκλήρωμά της είναι γνησίως αρνητικό, δηλαδή

$$\int_0^1 e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)dt<0\Rightarrow T(1)<0. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $T(0)\cdot T(1)<0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε

$$T(\xi)=0\Leftrightarrow\int_0^1 e^{t^2}f(t)dt-f(\xi)\int_0^1 e^{t^2}dt=0,$$

όπως θέλαμε. Επιπλέον, η T είναι παραγωγίσιμη διότι και η f είναι παραγωγίσιμη. Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει

$$T'(x)=-f'(x)\int_0^1 e^{t^2}dt.$$

Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f'(x)\leq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Επίσης, για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $e^{t^2}>0$, άρα $\int_0^1 e^{t^2}dt>0$. Από αυτές τις δύο ανισότητες συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $T'(x)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Εφόσον η T είναι συνεχής στη θέση $x=0$, προκύπτει λοιπόν ότι η T είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το $[0,1]$. Συνεπώς, η ρίζα ξ της συνάρτησης T, την οποία βρήκαμε παραπάνω, είναι μοναδική.

Δ5. Για το ολοκλήρωμα $\int_{1/2}^1 3x^2f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $y=f^{-1}(x)$. Ισχύει τότε $x=f(y)$, οπότε $dx=f'(y)dy$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=1$ έχουμε $f(y)=1 \Leftrightarrow f(y)=f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} y=0$.
- Για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε $f(y)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(y)=f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} y=1$.

Έτσι, αυτό το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_{1/2}^{1} 3x^2 f^{-1}(x)dx = \int_{1}^{0} 3yf^2(y)f'(y)dy.$$

Φυσικά, στο δεξιό ολοκλήρωμα μπορούμε να αλλάξουμε πάλι τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από y σε x. Επομένως, το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης γράφεται ως

$$\int_0^1 f^3(x)dx - \int_{1/2}^{1} 3x^2 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f^3(x)dx + \int_0^1 3xf^2(x)f'(x)dx$$

$$= \int_0^1 (x)' f^3(x) + x\cdot\left(f^3(x)\right)' dx = \int_0^1 \left(xf^3(x)\right)' dx$$

$$= \left[xf^3(x)\right]_0^1 = f^3(1) - 0\cdot f^3(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \boxed{=\frac{1}{8}.}$$

Διαγώνισμα 4.8

ΘΕΜΑ Α

Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216-217.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 143.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

A4. Σχολικό βιβλίο, σελ. 156.

A5. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Λύση

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f=\mathbb{R}$, καθώς $x^2+9\geq 9>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(6x)'\left(x^2+9\right)-6x\left(x^2+9\right)'}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{6\left(x^2+9\right)-6x\cdot 2x}{\left(x^2+9\right)^2}$$

$$=\frac{6x^2+54-12x^2}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{54-6x^2}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{6\left(9-x^2\right)}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Ισχύει τώρα ότι η ισοδυναμία

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{6\left(9-x^2\right)}{\left(x^2+9\right)^2}>0 \overset{x^2+9>0}{\Leftrightarrow} 9-x^2>0$$

$$\Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3.$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι $f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, ενώ οι ρίζες της παραγώγου είναι οι $x=\pm 3$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-3		$+3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[-3,3]$ και γνησίως φθίνουσα στα υποδιαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-3)$ και $\Delta_3(3,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1=-3$ με $f(-3)=-1$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2=3$ με $f(3)=1$.

Β2. Βρίσκουμε την εικόνα καθενός από τα υποδιαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ μέσω της f.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to -3^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)=(-1,0),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{6x}{x^2+9}=\lim_{x\to -\infty}\frac{6x}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{6}{x}=0,$$

και

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=f(-3)=-\frac{18}{18}=-1.$$

Στο πρώτο βήμα της τελευταίας ισότητας χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στη θέση $x=3$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2, άρα

$$f(\Delta_2)=\left[f(-3),f(3)\right]=[-1,1],$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις ισότητες $f(-3)=-1$, $f(3)=1$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3, άρα

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to3^+}f(x)\right)=(0,1),$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0$$

και $\lim_{x\to3^+}f(x)=f(3)=1$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη συνέχεια της f.

Έτσι, τελικά προκύπτει ότι $\boxed{f(\mathbb{R})=(-1,0)\cup[-1,1]\cup(0,1)=[-1,1].}$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=6\left(\frac{(9-x^2)}{(x^2+9)^2}\right)'=6\frac{-2x(x^2+9)^2-(9-x^2)\cdot2(x^2+9)\cdot2x}{(x^2+9)^4}$$

$$=6\frac{(x^2+9)\left(-2x(x^2+9)-4x(9-x^2)\right)}{(x^2+9)^4}$$

$$=6\frac{-2x^3-18x-36x+4x^3}{(x^2+9)^3}=6\frac{2x^3-54x}{(x^2+9)^3}$$

$$=12\frac{x^3-27x}{(x^2+9)^3}=\frac{12x(x^2-27)}{(x^2+9)^3}.$$

Βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x(x^2-27)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\pm\sqrt{27}=\pm3\sqrt{3}.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	$-3\sqrt{3}$		0		$3\sqrt{3}$		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-27	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

- Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-3\sqrt{3}\right]$ και $\left[0,3\sqrt{3}\right]$ και κυρτή στα διαστήματα $\left[-3\sqrt{3},0\right]$ και $\left[3\sqrt{3},+\infty\right)$.

- Τα σημεία $A\left(-3\sqrt{3},f\left(-3\sqrt{3}\right)\right)$, $B\left(0,f(0)\right)$, $\Gamma\left(3\sqrt{3},f\left(3\sqrt{3}\right)\right)$ είναι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης C_f.

Β4. Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $D_g=\{x\in D_f \mid f(x)\neq 0\}$
Όμως ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6x}{x^2+9}=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $D_g=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$g(x)=\frac{12}{\frac{6x}{x^2+9}}=\frac{12\left(x^2+9\right)}{6x}=\frac{2\left(x^2+9\right)}{x}.$$

Αναζητούμε αρχικά τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f. Το μοναδικό υποψήφιο σημείο για την κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι το $x=0$. Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+9\right)\cdot\frac{2}{x}=+\infty,$$

επομένως η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Στη συνέχεια, αναζητούμε πλάγια-οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2\cdot\frac{x^2+9}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty,$$

άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Εξετάζουμε στη συνέχεια αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{x^2+9}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+18}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2:=\lambda.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{x^2+9}{x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+18-2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18}{x}=0:=\beta.$$

Έπεται ότι η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Με εντελώς όμοιο τρόπο, προκύπτει ότι η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Β5. Ισχύει

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{6x}{x^2+9}dx=3\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+9}dx=3\int_{-1}^{1}\frac{\left(x^2+9\right)'}{x^2+9}dx=3\left[\ln\left(x^2+9\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{=3\left[\ln 10-\ln 10\right]=0.}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με

$$B=\int_{1}^{3}\frac{6}{xf(x)}dx=\int_{1}^{3}\frac{6}{x\cdot\frac{6x}{x^2+9}}dx=\int_{1}^{3}\frac{x^2+9}{x^2}dx=\int_{1}^{3}\left(1+\frac{9}{x^2}\right)dx=\left[x-\frac{9}{x}\right]_{1}^{3}$$

$$\boxed{=3-3-(1-9)=8.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(1)=e^{1-1}-\alpha\cdot 1^2=1-\alpha$ και επομένως από την υπόθεση προκύπτει ότι $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως:

- η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$,
- αυτό το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f=\mathbb{R}$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Συνεπώς, από το Θεώρημα Fermat έπεται ότι $f'(1)=0$. Όμως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(e^{x^2-1}-\alpha x^2\right)'=2xe^{x^2-1}-2\alpha x.$$

Εφόσον $f'(1)=0$, προκύπτει από τον παραπάνω τύπο ότι

$$2\cdot 1\cdot e^{1^2-1}-2\alpha\cdot 1=0\Leftrightarrow 2-2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=1.$$

Γ2. i. Όπως δείξαμε προηγουμένως, και αφού $\alpha=1$, προκύπτει ότι

$$f'(x)=2xe^{x^2-1}-2x=2x\left(e^{x^2-1}-1\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα βρούμε τώρα τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; e^{x^2-1}=1=e^0 \overset{e^x\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow} x=0 \;\text{ ή }\; x^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; x=\pm 1.$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων $2x$ και $e^{x^2-1}-1$. Ο παράγοντας $e^{x^2-1}-1$ είναι θετικός όταν

$$x^2-1>0\Leftrightarrow |x|>\sqrt{1}\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x^2-1}-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ και $\Delta_3=(0,1)$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\Delta_2=[-1,0]$ και $\Delta_4=[1,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-1$ με $f(-1)=0$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2=0$ με $f(0)=\frac{1}{e}$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_3=1$ με $f(1)=0$.

ii. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, θα έχουμε

$$f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty),$$

όπου για την τελευταία ισότητα υπολογίσαμε το όριο ως εξής:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x^2-1}-x^2\right).$$

Εκτελούμε την αντικατάσταση $u=x^2-1$. Καθώς το x τείνει στο $-\infty$, ισχύει

$$u=x^2-1\to+\infty-1=+\infty.$$

Επομένως, το παραπάνω όριο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{u\to+\infty}e^u\left(1-\frac{u}{e^u}-\frac{1}{e^u}\right).$$

Στο τελευταίο όριο όλοι οι όροι είναι άμεσα υπολογίσιμοι, εκτός από τον $\frac{u}{e^u}$, ο οποίος έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$ και για τον οποίο χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^u}=0.$$

Έτσι, το αρχικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{u\to+\infty}e^u\left(1-\frac{u}{e^u}-\frac{1}{e^u}\right)=(+\infty)(1-0-0)=+\infty,$$

όπως ακριβώς ισχυριστήκαμε και παραπάνω.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2, οπότε ισχύει

$$f(\Delta_2)=[f(-1),f(0)]=\left[0,\frac{1}{e}\right].$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_3, οπότε ισχύει

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=\left(0,\frac{1}{e}\right),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f για να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\frac{1}{e}.$$

- Τέλος, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_4, οπότε ισχύει

$$f(\Delta_4)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,+\infty),$$

όπου για το τελευταίο βήμα υπολογίσαμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όπως ακριβώς είχαμε υπολογίσει και το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ λίγο παραπάνω (δηλαδή μέσω της αντικατάστασης $u=x^2-1$ και του κανόνα De L'Hospital).

Προκύπτει λοιπόν ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο

$$f(\mathbb{R})=[0,+\infty)\cup\left[0,\frac{1}{e}\right]\cup\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup[0,+\infty)\ \boxed{=[0,+\infty).}$$

Γ3. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(\lambda+x^2)e^{1-x^2}=1\Leftrightarrow e^{x^2-1}=\lambda+x^2\ \Leftrightarrow e^{x^2-1}-x^2=\lambda\ \Leftrightarrow f(x)=\lambda.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda<0$, τότε $\lambda\notin f(\mathbb{R})$ και άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=0$, τότε έχουμε ότι $f(-1)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, άρα έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- Αν $0<\lambda<\frac{1}{e}$, τότε έχουμε ότι $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$, $\lambda\in f(\Delta_3)$, $\lambda\in f(\Delta_4)$, οπότε υπάρχουν $x_1\in\Delta_1$, $x_2\in\Delta_2$, $x_3\in\Delta_3$, $x_4\in\Delta_4$, έτσι ώστε

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=\lambda.$$

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα, αυτή η εξίσωση έχει ακριβώς αυτές τις 4 λύσεις.

- Αν $\lambda=\frac{1}{e}$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα υπάρχει μοναδική λύση στο Δ_1. Επίσης, $\lambda\in f(\Delta_2)$ και μάλιστα $f(0)=\frac{1}{e}$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2, η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, $\lambda\notin f(\Delta_3)$,$\lambda\in f(\Delta_4)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_4, άρα υπάρχει μοναδική λύση στο Δ_4. Έτσι, συνολικά σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση θα έχει ακριβώς 3 ρίζες.

- Αν $\lambda>\frac{1}{e}$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$, $\lambda\notin f(\Delta_3)$, $\lambda\in f(\Delta_4)$ και άρα υπάρχει μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης στο Δ_1 και μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης στο Δ_4. Έτσι, συνολικά σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση θα έχει ακριβώς 2 ρίζες.

Γ4. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Ισχύει

$$A=\int_1^{\sqrt{2}}2x^3\left[f(x)+x^2\right]dx=\int_1^{\sqrt{2}}2x^3e^{x^2-1}dx=\int_1^{\sqrt{2}}x^2\left(x^2-1\right)'e^{x^2-1}dx$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}x^2\left(e^{x^2-1}\right)'dx=\left[x^2e^{x^2-1}\right]_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2\right)'e^{x^2-1}dx$$

$$=2e-1-\int_1^{\sqrt{2}}2xe^{x^2-1}dx=2e-1-\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)'e^{x^2-1}dx$$

$$=2e-1-\int_1^{\sqrt{2}}\left(e^{x^2-1}\right)'dx=2e-1-\left[e^{x^2-1}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=2e-1-(e-1)=e.$$

Γ5. Σημειώνουμε αρχικά ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $x^2-x=x(x-1)>0$. Αυτή η παρατήρηση θα μας χρησιμεύσει σε λίγο. Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$f\left(x^2\right)+xf'(x)>x^2f'(x)+f(x)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)-f(x)>x^2f'(x)-xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2\right)-f(x)>\left(x^2-x\right)f'(x)$$

$$\overset{x^2-x>0}{\Leftrightarrow}\frac{f\left(x^2\right)-f(x)}{x^2-x}>f'(x).$$

Έστω $x>1$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[x,x^2\right]$. Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in\left(x,x^2\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(x^2\right)-f(x)}{x^2-x}.$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Από αυτό, θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε ότι $f'(\xi)>f'(x)$, μια και $\xi>x>1$. Αυτό με τη σειρά του, σε συνδυασμό με τις παραπάνω παρατηρήσεις, θα μας δώσει το ζητούμενο.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=2\left(e^{x^2-1}-1\right)+2x\cdot 2x\cdot e^{x^2-1}=e^{x^2-1}\left(4x^2+2\right)-2.$$

Για $x>1$ έχουμε $x^2>1$, άρα $x^2-1>0$ και, αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι

$$e^{x^2-1}>1 \qquad (1)$$

Επιπλέον, για κάθε $x>1$ ισχύει

$$4x^2>4 \Rightarrow 4x^2+2>4+2 \Rightarrow 4x^2+2>6 \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) κατά μέλη, παίρνουμε

$$e^{x^2-1}(4x^2+2)>6 \Rightarrow e^{x^2-1}(4x^2+2)-2>4 \Rightarrow f''(x)>4>0$$

οπότε f'' γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Τότε όμως, όπως εξηγήσαμε και νωρίτερα, προκύπτει από τη σχέση $\xi>x>1$ ότι

$$\boxed{f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}>f'(x),}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. i. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$x(x-1)g'(x)+g(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[(x-1)g(x)\right]'=(\ln x)'$$

για κάθε $x>0$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $(x-1)g(x)=\ln x+c$ για κάθε $x>0$. Για $x=1$ προκύπτει ότι $c=0$. Επομένως, για κάθε $x\neq 1$ θα είναι $g(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$, οπότε

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ g(1), & x=1\end{cases}.$$

Όμως, αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό το διάστημα, άρα και στο $x_0=1$. Έτσι όμως προκύπτει ότι

$$g(1)=\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}1/x=1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}.}$$

ii. Ελέγχουμε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με χρήση του ορισμού. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x-(x-1)}{x-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x-x+1)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2},$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=-\frac{1}{2}$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,g(1))$ έχει εξίσωση

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\ \boxed{\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.}$$

Δ2. i. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $(1+\alpha)^x+\beta^{-x}\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(1+\alpha)^x+\beta^{-x}$. Η προηγούμενη σχέση τότε γράφεται ισοδύναμα ως $\varphi(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε όμως ότι $\varphi(0)=(1+\alpha)^0+\beta^{-0}=1+1=2$, άρα για $x=0$ ισχύει η ισότητα. Με άλλα λόγια, ισχύει $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$. Έτσι λοιπόν έχουμε ότι:

- Η φ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=0$.
- Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $D_\varphi=\mathbb{R}$.
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Από το Θεώρημα Fermat προκύπτει ότι $\varphi'(0)=0$. Όμως, ο τύπος της παραγώγου είναι

$$\varphi'(x)=(1+\alpha)^x\ln(1+\alpha)+\beta^{-x}\ln\beta(-x)'=(1+\alpha)^x\ln(1+\alpha)-\beta^{-x}\ln\beta.$$

Άρα $\varphi'(0)=\ln(1+\alpha)-\ln\beta$. Εξηγήσαμε όμως ότι $\varphi'(0)=0$, άρα προκύπτει ότι

$$\ln(1+\alpha)=\ln\beta\overset{\ln 1-1}{\Leftrightarrow}\boxed{\alpha+1=\beta,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

ii. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, επομένως ισχύει $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$. Υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά. Το δεξιό πλευρικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot x\ln x\right)=-1\cdot 0=0,$$

όπου για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

Στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Το αριστερό πλευρικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(e^{\alpha}(1+x)-\beta e^x\right)=e^{\alpha}-\beta.$$

Τα δύο πλευρικά όρια θα πρέπει να είναι ίσα, άρα

$$e^{\alpha}-\beta=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=\beta.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα όμως έχουμε και $\alpha+1=\beta$, άρα το α πρέπει να ικανοποιεί την ισότητα

$$e^{\alpha}=\alpha+1.\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-x-1$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x-1$. Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της h. Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$h'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}x>0.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η παράγωγος είναι αρνητική για $x<0$ και ότι μηδενίζεται για $x=0$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

- Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=e^0-0-1=0$. Πράγματι, αν $x\le 0$, τότε $h(x)\ge h(0)$, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε $h(x)\ge h(0)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $h(x)\ge h(0)$.

Άρα ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$ και $h(x)=0$ μόνο για $x=0$. Έτσι, η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^{\alpha}=\alpha+1 \Leftrightarrow e^{\alpha}-\alpha-1=0 \Leftrightarrow h(\alpha)=0 \ \boxed{\Leftrightarrow \alpha=0.}$$

Έπεται λοιπόν ότι $\boxed{\beta=\alpha+1=0+1=1.}$

Δ3. i. Για $\alpha=0$ και $\beta=1$ ισχύει

$$f(x)=\begin{cases} 1+x-e^x, & x\le 0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\ne 1. \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, γι' αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πράξη παραγωγίσιμων. Μάλιστα, για κάθε $x<0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(1+x-e^x\right)'=1-e^x.$$

Όμως για κάθε $x<0$ έχουμε

$$x<0 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow f'(x)>0.$$

Από τη συνέχεια της f στη θέση $x=0$, σε συνδυασμό με την τελευταία ανισότητα, παίρνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Η f είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$, και για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)'=\frac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=-\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}.$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\le x-1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενα σημεία του βιβλίου, αυτή η ανισότητα θεωρείται γνωστή και μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη, αφού αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ. 148).

Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει $\ln x<x-1$. Από τον τύπο της παραγώγου, τον οποίο υπολογίσαμε παραπάνω, προκύπτει τελικά ότι $f'(x)>0$ στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή όμως η f είναι συνεχής και στη θέση $x=1$ (λόγω του Ερωτήματος Δ1i), αλλά και στη θέση $x=0$ (λόγω του Ερωτήματος Δ2ii), έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η f είναι γνησίως αύξουσα στα υποδιαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, άρα είναι τελικά γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $x^2+1>0$, οπότε η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{e-1}{e}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)<x^2$$

Η ανίσωση δεν έχει ως λύση της το $x=0$, αφού για $x=0$ έχουμε

$$\frac{e-1}{e}\cdot 1\cdot 0>0^2,$$

δηλαδή την αντίστροφη φορά. Μπορούμε λοιπόν στο εξής να θεωρήσουμε ότι $x\neq 0$. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{e-1}{e}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)<\left(x^2+1\right)-1\overset{e-1,x^2>0}{\Leftrightarrow}\frac{\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)-1}<\frac{e}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)<f(e) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+1<e \Leftrightarrow x^2<e-1 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{e-1}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{e-1}<x<\sqrt{e-1}.$$

Ωστόσο πρέπει να απαιτήσουμε και $x \neq 0$, αφού, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, το μηδέν δεν αποτελεί λύση της ανίσωσης. Άρα τελικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι

$$\boxed{x \in \left(-\sqrt{e-1},0\right) \cup \left(0,\sqrt{e-1}\right).}$$

Διαγώνισμα 4.9

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 117.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 95.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α4. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$. Παρόλο που ισχύει ότι $f'(0)=0$, αυτή η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

Α5. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ,

ΘΕΜΑ Β

Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $h \circ g$ είναι το $D_{h\circ g}=\left\{x \in D_f \text{ και } g(x) \in D_h\right\}$. Αυτές οι συνθήκες γράφονται ισοδύναμα ως

$$\begin{cases} x<2 \\ -\dfrac{1}{3}<g(x)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ -\dfrac{1}{3}<\dfrac{x}{2-x}<1 \end{cases} \overset{x<2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x<2 \\ -(2-x)<3x<3(2-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ (x-2<3x) \text{ και } (3x<6-3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ (-2x<2) \text{ και } (6x<6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \text{ και } x<1 \end{cases}$$

Οι παραπάνω συνθήκες αληθεύουν αν και μόνο αν $x \in (-1,1)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $D_{h \circ g} = (-1,1)$. Επιπλέον, για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \ln\left(\frac{1+\frac{3x}{2-x}}{1-\frac{x}{2-x}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2-x+3x}{2-x}}{\frac{2-x-x}{2-x}}\right) = \ln\left(\frac{2+2x}{2-2x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

B2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} > 0,$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f, επομένως δεν έχει ακρότατα.

B3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $D_f = (-1,1)$, επομένως για το σύνολο τιμών της ισχύει ότι

$$f(D_f) = \left(\lim_{x \to -1^+} f(x), \lim_{x \to 1^-} f(x)\right).$$

Τα δύο όρια υπολογίζονται ως εξής:

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

  Εκτελούμε την αντικατάσταση $u = \frac{1+x}{1-x}$. Καθώς $x \to -1^+$, ισχύει $u \to 0^+$. Επομένως, το τελευταίο όριο γράφεται ως

$$\lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty.$$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

  Εκτελούμε και πάλι την αντικατάσταση $u = \frac{1+x}{1-x}$. Καθώς $x \to 1^-$, ισχύει $u \to +\infty$. Επομένως, το τελευταίο όριο γράφεται ως

$$\lim_{u \to +\infty} \ln u = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(D_f) = \mathbb{R}$.

> Επειδή ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

B4. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f, άρα θα είναι «1-1» και συνεπώς θα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το σύνολο $D_{f^{-1}} = f(D_f) = \mathbb{R}$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x. Για κάθε $x \in D_f$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow 1+x=e^y(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 1+x=e^y-xe^y \Leftrightarrow x+xe^y=e^y-1$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y-1 \overset{e^y+1>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{e^y-1}{e^y+1}.$$

Συνεπώς, ο τύπος της f^{-1} θα είναι

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}.}$$

B5. Για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{2}{(1+x)(1-x)}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, ως ρητή, και για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right)'=\left(\frac{2}{1-x^2}\right)'=\frac{-2(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

Το μοναδικό σημείο μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου είναι το $x=0$, όπως φαίνεται από την ισοδυναμία

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε από τον τύπο της ότι, εφόσον ο παρονομαστής είναι θετικός, η f είναι κοίλη στο $(-1,0]$ και κυρτή στο $[0,1)$. Επιπλέον, η C_f έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$. Αυτά τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	-1		0		$+1$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Β6. Ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=2$, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα από τους τύπους της f και της f'. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ είναι

$$\boxed{\varepsilon : y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=2x.}$$

Με βάση τις παρατηρήσεις για τη μονοτονία και την κυρτότητα της f, τις οποίες κάναμε στα προηγούμενα ερωτήματα, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f, άρα η ευθεία (ε), ως εφαπτομένη της C_f στο O, «διαπερνά» την καμπύλη.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. **i.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(f(x)+x)^2=4 \Leftrightarrow |f(x)+x|=2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής με $|h(x)|=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $2\neq 0$, θα είναι και $|h(x)|\neq 0$ και άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού η h είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $h(1)=f(1)+1=2>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f(x)+x=2 \Leftrightarrow f(x)=2-x.}$$

ii. Για το σημείο Λ ισχύει ότι $y_\Lambda=\alpha$ και $\Lambda\in C_f$, άρα

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x_\Lambda+2=\alpha,$$

δηλαδή $x_\Lambda=2-\alpha$ και άρα $\Lambda(2-\alpha,\alpha)$. Επομένως, το εμβαδόν του $OK\Lambda M$ είναι ίσο με $E_{OK\Lambda M}=(2-\alpha)\alpha$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε $\alpha\in(0,2)$ ισχύει

$$\boxed{E(\alpha)=(2-\alpha)\alpha=2\alpha-\alpha^2.}$$

Γ2. Αφού $E(\alpha)=2\alpha-\alpha^2$ με $\alpha\in(0,2)$, η E είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και για κάθε $\alpha\in(0,2)$ ισχύει $E'(\alpha)=2-2\alpha$. Βρίσκουμε τώρα τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=1,$$

άρα η μοναδική ρίζα της παραγώγου είναι η $\alpha = 1$. Για το πρόσημο της παραγώγου, παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1.$$

Αντίστοιχα, η παράγωγος είναι αρνητική για $1 < \alpha < 2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

α	0		1		2
$E'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$E(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Από αυτόν τον πίνακα προκύπτει ότι πράγματι η συνάρτηση $E(\alpha)$ μεγιστοποιείται για $\alpha = 1$. Πράγματι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε $E(x) \leq E(1)$, αφού η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, ενώ, αν $1 \leq \alpha \leq 2$, τότε $E(\alpha) \leq E(1)$, καθώς η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Επομένως, για κάθε $\alpha \in (0,2)$ ισχύει ότι $E(\alpha) \leq E(1)$.

Με άλλα λόγια, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\alpha = 1$. Γι' αυτήν την τιμή του α ισχύει

$$\boxed{(OM) = (OK) = 1}$$

δηλαδή το ορθογώνιο $OK\Lambda M$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Έπεται λοιπόν ότι είναι τετράγωνο, όπως θέλαμε.

Γ3. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι

$$d = (O\Lambda) = \sqrt{(2-\alpha)^2 + \alpha^2} = \sqrt{4 - 4\alpha + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2\alpha^2 - 4\alpha + 4}.$$

Επειδή έχουμε $\alpha = \alpha(t)$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση συναρτήσει του t ως

$$d(t) = \sqrt{2\alpha^2(t) - 4\alpha(t) + 4}.$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα η $d(t)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία για τα οποία η υπόρριζη ποσότητα είναι ίση με 0. Αυτό όμως δεν συμβαίνει για καμία τιμή του t, καθώς η υπόρριζη ποσότητα είναι ένα τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα.

$$d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha^2(t) - 4\alpha(t) + 4}} \left(2\alpha^2(t) - 4\alpha(t) + 4\right)'$$

$$=\frac{4\alpha(t)\alpha'(t)-4\alpha'(t)}{2\sqrt{2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4}}=\frac{2\alpha'(t)(\alpha(t)-1)}{\sqrt{2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4}}.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_0 θα ισχύει ότι

$$\boxed{d'(t_0)=\frac{2024\cdot(1-1)}{\sqrt{2\cdot 1^2-4\cdot 1+4}}=0.}$$

Γ4. **i.** Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,2]$, επομένως

$$g(\Delta)=[g(0),g(2)].$$

Επειδή όμως $g(\Delta)=[0,2]$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$g(0)=0 \text{ και } g(2)=2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-f(x), x\in[0,2]$.

- Η φ είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f,g.
- $\varphi(0)=g(0)-f(0)=0-2=-2.$
- $\varphi(2)=g(2)-f(2)=2-0=2$

Προκύπτει επομένως ότι $\varphi(0)\varphi(2)<0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$.

Επιπλέον, η φ είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξη των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f,g. Για κάθε $x\in(0,2)$ ισχύει

$$\varphi'(x)=g'(x)-f'(x)=g'(x)+1>0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f'(x)=-1$ και ότι $g'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$, επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$. Συμπεραίνουμε από την τελευταία ανισότητα ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$. Επομένως, η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$. Άρα η C_g τέμνει τη C_f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

ii. Παρατηρούμε ότι, για τη ρίζα x_0 της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο Ερώτημα, ισχύει ότι

$$g(x_0)=f(x_0)=-x_0+2.$$

Για τη συνάρτηση g έχουμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,2]$, όπου $x_0 \in (0,2)$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,x_0)$ και $(x_0,2)$.

Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,x_0)$ και ένα $\xi_2 \in (x_0,2)$ τέτοια, ώστε

$$g'(\xi_1)=\frac{g(x_0)-g(0)}{x_0-0}=\frac{-x_0+2}{x_0},$$

και

$$g'(\xi_2)=\frac{g(2)-g(x_0)}{2-x_0}=\frac{2+x_0-2}{2-x_0}=\frac{x_0}{2-x_0}.$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $g(0)=0$, $g(2)=2$ και $g(x_0)=-x_0+2$. Προφανώς ισχύει $\xi_1 \neq \xi_2$, αφού $0<\xi_1<x_0<\xi_2$.

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$g'(\xi_1)g'(\xi_2)=\frac{-x_0+2}{x_0}\cdot\frac{x_0}{2-x_0}=\frac{2-x_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{2-x_0}=1.$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g=\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x-2}\right)'=-e^{2x-2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της g στο $x=1$ είναι ίσος με $g'(1)=-e^0=-1$. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha\ln x}{x-\beta}$ ορίζεται για $x\in(0,\beta)\cup(\beta,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, με

$$f'(x)=\frac{\frac{\alpha}{x}(x-\beta)-\alpha\ln x}{(x-\beta)^2}$$

για κάθε $x\in(0,\beta)\cup(\beta,+\infty)$. Η κλίση της C_f στο $x=1$ είναι ίση με

$$f'(1)=\frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\beta)^2}=\frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Αφού όμως $f'(1)=g'(1)$, τότε θα είναι

$$\frac{\alpha}{1-\beta}=-1 \Leftrightarrow \alpha=\beta-1 \Leftrightarrow \beta=\alpha+1, \quad (1)$$

Επιπλέον, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\beta^x\geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\beta^x-2\geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\beta^x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η παραπάνω ανισότητα είναι τότε ισοδύναμη με την

$$\varphi(x)\geq 0 \ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\varphi(0)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^0+\beta^0-2=1+1-2=0,$$

συνεπώς η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\varphi(x)\geq\varphi(0) \ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η φ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση $x=0$. Επιπλέον, η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\varphi'(x)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x\cdot\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\beta^x\cdot\ln\beta.$$

Επομένως, συγκεντρωτικά, ισχύει ότι

- η φ είναι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$,
- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα του Fermat προκύπτει λοιπόν ότι

$$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\ln\beta=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\ln\beta$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\overset{\ln:1-1}{\Leftrightarrow}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow \alpha\beta=2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι τα α,β ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \alpha\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \beta(\beta-1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \beta^2-\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \beta^2-\beta-2=0\end{cases}$$

Για την εξίσωση $\beta^2-\beta-2=0$, χρησιμοποιούμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $\beta_{1,2}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2}$, δηλαδή $\beta=2$ ή $\beta=-1$.

Επειδή μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ότι $\beta>0$, συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\beta=2}$. Προκύπτει έτσι και ότι

$$\boxed{\alpha=\beta-1=2-1=1,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

ii. Αφού $\beta=2$ και $\alpha=1$, προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το

$$D_f=(0,2)\cup(2,+\infty)$$

Επίσης, από τον τύπο της f, προκύπτει ότι για κάθε $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-2}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in D_f$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)-\ln x}{(x-2)^2}=\frac{1-\frac{2}{x}-\ln x}{(x-2)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή. Εξετάζουμε λοιπόν τον αριθμητή ξεχωριστά. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=1-\frac{2}{x}-\ln x$ για $x>0$. Για κάθε $x\in D_f$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{K(x)}{(x-2)^2}. \qquad (3)$$

Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που θεωρήσαμε τη συνάρτηση K. Θα επιχειρήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε το πρόσημο αυτής της συνάρτησης. Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$K'(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2-x}{x^2}.$$

Καθώς ο παρονομαστής x^2 είναι θετικός, το πρόσημο της K' προσδιορίζεται ως εξής:

- $K'(x)>0\Leftrightarrow 2-x>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\in(0,2)$.
- $K'(x)<0\Leftrightarrow 2-x<0\Leftrightarrow x>2$.
- $K'(x)=0\Leftrightarrow x=2.$

Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		2		$+\infty$
$K'(x)$		$+$	0	$-$	
$K(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Προκύπτει έτσι ότι η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει μάλιστα ολικό μέγιστο στη θέση $x=2$ την τιμή $K(2)=1-\frac{2}{2}-\ln 2=-\ln 2<0$. Πράγματι, αν $0<x\le 2$, τότε $K(x)\le K(2)$, αφού η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$, ενώ, αν $x\ge 2$, τότε $K(x)\le K(2)$, καθώς η K είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $K(x)\le K(2)$.

Εφόσον η μέγιστη τιμή της K είναι αρνητική, προκύπτει ότι $K(x)<0$ για κάθε $x>0$. Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in D_f$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,2)$ και $(2,+\infty)$. Από τα παραπάνω προκύπτει φυσικά ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Όπως έχουμε σημειώσει ξανά, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Το θεώρημα της σελ. 135 του σχολικού βιβλίου αφορά μόνο διαστήματα.

Δ2. i. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,2)$, επομένως για το σύνολο τιμών της ισχύει ότι

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R},$$

όπου τα δύο όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\ln x\right)=(-\infty)\cdot\ln 2=-\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$.

- Το δεύτερο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\ln x\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-\infty)=+\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(2,+\infty)$, επομένως για το σύνολο τιμών της θα ισχύει ότι

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to2^+}f(x)\right)=(0,+\infty),$$

όπου τα όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-2}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

- Το δεύτερο όριο ισούται με

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\ln x\right)=(+\infty)\cdot\ln2=+\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\boxed{f(D_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\mathbb{R}.}$$

ii. Το $x=2$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $e^x x^2=e^2x^e$. Πράγματι, αν ήταν, τότε θα ίσχυε

$$4e^2=e^2 2^e \Leftrightarrow 4=2^e \Leftrightarrow 2^2=2^e \overset{2^x:1-1}{\Leftrightarrow} 2=e,$$

άτοπο. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<x\neq2$. Η εξίσωση τότε ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}e^x x^2=e^2x^e &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2}=\frac{x^e}{x^2}\Leftrightarrow e^{x-2}=x^{e-2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln e^{x-2}=\ln x^{e-2}\\ &\Leftrightarrow x-2=(e-2)\ln x \overset{x\neq2}{\Leftrightarrow} 1=(e-2)\cdot\frac{\ln x}{x-2}\\ &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x-2}=\frac{1}{e-2}\Leftrightarrow f(x)=f(e),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(e)=\dfrac{1}{e-2}$. Άρα για $0<x\neq2$, η εξίσωση $e^x x^2=e^2x^e$ είναι ισοδύναμη της $f(x)=f(e)$, όπως θέλαμε.

- Αν $x \in \Delta_1 = (0,2)$, τότε $f(e) \in f(\Delta_1) = \mathbb{R}$, επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ ώστε $f(x_1) = f(e)$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, το x_1 είναι η μοναδική ρίζα στο Δ_1.
- Στο διάστημα $(2,+\infty)$, η εξίσωση έχει την προφανή ρίζα $x = e$, αφού $e \in (2,+\infty)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα, επομένως η μοναδική ρίζα στο Δ_2 είναι η $x_2 = e$.

Δ3. i. Ισχύει

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq 1 \\ f(x), & 1 < x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{2x-2}}{2}, & x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-2}, & 1 < x < 2 \end{cases}.$$

Τα κρίσιμα σημεία της h είναι τα εσωτερικά σημεία του $D_h = (-\infty,2)$ στα οποία η h' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία του D_h στα οποία η h' δεν ορίζεται. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x < 1$ ισχύει

$$h'(x) = g'(x) = -e^{2x-2} < 0.$$

Επιπλέον, η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ και για κάθε $x \in (1,2)$ ισχύει $h'(x) = f'(x)$. Στο Ερώτημα Δ1ii είδαμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η h' δεν έχει σημεία μηδενισμού στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Συνεπώς, το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο της h είναι το $x = 1$. Εξετάζουμε αν η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ υπολογίζοντας ξεχωριστά τα δύο αντίστοιχα πλευρικά όρια. Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) \qquad (4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \leq 1$, καθώς και τον ορισμό της παραγώγου της g στο σημείο $x = 1$. Για να υπολογίσουμε το δεξί όριο, σημειώνουμε αρχικά ότι

$$h(1) = g(1) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2\cdot 1-2}}{2} = 0 = f(1).$$

Επομένως, αυτό το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) έπεται ότι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=-1,$$

οπότε η h είναι παραγωγίσιμη και στη θέση $x=1$ με $h'(1)=-1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η h είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και ισχύει $h'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D_h$. Συνεπώς, η h δεν έχει κρίσιμα σημεία.

ii. Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$(x+1)h(x)>h(x^2)\Leftrightarrow xh(x)+h(x)>h(x^2)\Leftrightarrow xh(x)>h(x^2)-h(x)$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} h(x)>\frac{h(x^2)-h(x)}{x}\overset{x-1<0}{\Leftrightarrow}\frac{h(x)}{x-1}<\frac{h(x^2)-h(x)}{x(x-1)}$$

$$\overset{h(1)=0}{\Leftrightarrow}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}<\frac{h(x^2)-h(x)}{x^2-x},$$

όπου στο προτελευταίο βήμα αλλάξαμε τη φορά διότι διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με $x-1<0$. Τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας μας παραπέμπουν στο Θ.Μ.Τ. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να την αποδείξουμε με τη χρήση αυτού του θεωρήματος. Αρχικά παρατηρούμε ότι για $0<x<1$ ισχύει ότι $x^2<x<1$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν $x\in(0,1)$.

Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x^2,x]$ και $[x,1]$, καθώς είναι συνεχής σε αυτά και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό τους. Επομένως, υπάρχουν $\xi_1\in(x^2,x)$ και $\xi_2\in(x,1)$ τέτοια, ώστε

$$h'(\xi_1)=\frac{h(x)-h(x^2)}{x-x^2}=\frac{h(x^2)-h(x)}{x^2-x}$$

και

$$h'(\xi_2)=\frac{h(1)-h(x)}{1-x}=\frac{h(x)-h(1)}{x-1}.$$

Μας έχει δοθεί όμως ότι η h είναι κοίλη στο $[0,1]$, συνεπώς η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Εφόσον

$$0<x^2<\xi_1<x<\xi_2<1,$$

έπεται από τη μονοτονία της h' ότι

$$h'(\xi_2) < h'(\xi_1) \Leftrightarrow \frac{h(x)-h(1)}{x-1} < \frac{h(x^2)-h(x)}{x^2-x},$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο. Αφού το $x \in (0,1)$ ήταν τυχαίο, η ανισότητα θα ισχύει για κάθε $x \in (0,1)$.

Διαγώνισμα 4.10

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 96.

Α4. Ο ισχυρισμός είναι σωστός. Πράγματι, ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ όπου } \nu \text{ περιττός.}$$

- Αν $\alpha_\nu > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_\nu x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha_\nu x^\nu = -\infty$. Επομένως, υπάρχει $\alpha < 0$ κοντά στο $-\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\alpha) < 0$, και $\beta > 0$ κοντά στο $+\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\beta) > 0$. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση P είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $P(\alpha)P(\beta) < 0$, επομένως, από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ για το οποίο $P(x_0) = 0$, δηλαδή το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

- Αν $\alpha_\nu < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_\nu x^\nu = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha_\nu x^\nu = +\infty$. Επομένως, υπάρχει $\alpha < 0$ κοντά στο $-\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\alpha) > 0$, και $\beta > 0$ κοντά στο $+\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\beta) < 0$. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση P είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $P(\alpha)P(\beta) < 0$, επομένως, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ για το οποίο $P(x_0) = 0$, δηλαδή το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, το πολυώνυμο P θα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Α5. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η σύνθεση της g με την h είναι η συνάρτηση $h \circ g$. Αυτή η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία:

Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η σύνθεση της g με την h είναι η h∘g και όχι η g∘h. Παραπέμπουμε στον ορισμό στη σελ. 25 του σχολικού βιβλίου. Αν και λεπτομέρεια, καλό είναι να θυμόμαστε τη συγκεκριμένη ορολογία.

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Ισχύει λοιπόν $D_{h \circ g} = (0,+\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\boxed{(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{e^{2\ln x} - 1}{e^{\ln x}} = \frac{e^{\ln x^2} - 1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}.}$$

Β2. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)' = \frac{(x^2 - 1)'x - (x^2 - 1)x'}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα. Επιπλέον, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)' = \frac{\left({}^2 + 1\right)' x^2 - (x^2 + 1)(x^2)'}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}.$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$. Επομένως, η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. i. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, θα είναι και «1-1» σε αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, το οποίο και θα βρούμε. Από τη συνέχεια της f προκύπτει ότι

$$f((0,+\infty)) \overset{f \nearrow (0,+\infty)}{=} \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \mathbb{R},$$

όπου τα όρια για την τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{x}\right] = (-1)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

- Το όριο στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Συνεπώς θα ισχύει $\boxed{D_{f^{-1}} = f((0,+\infty)) = \mathbb{R}.}$

ii. Θα βρούμε αρχικά τις κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επειδή το πεδίο ορισμού είναι το $(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής σε όλα τα εσωτερικά σημεία του $(0,+\infty)$, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη μόνο στο $x_0 = 0$.

Από προηγούμενο ερώτημα όμως ξέρουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, άρα προκύπτει ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είδαμε επίσης στο προηγούμενο υποερώτημα ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Αναζητούμε λοιπόν πλάγια ασύμπτωτη. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1 := \lambda.$$

Επίσης,

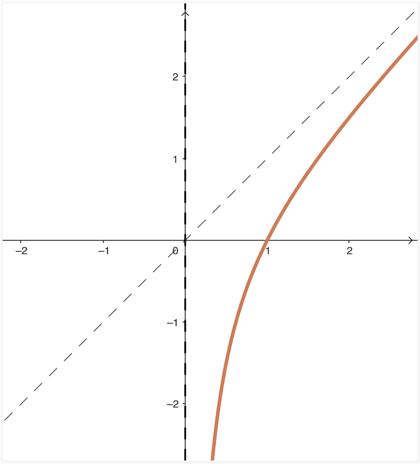
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0 := \beta.$$

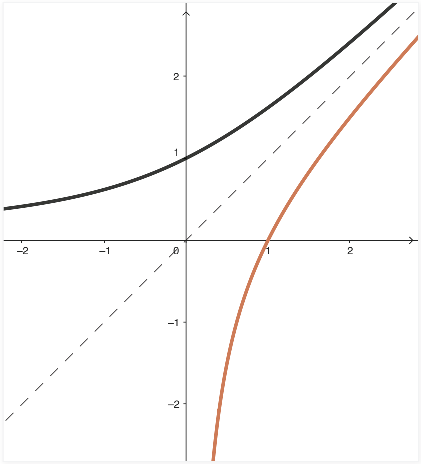
Έπεται λοιπόν ότι η ευθεία με εξίσωση

$$\boxed{y = \lambda x + \beta = x}$$

είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Λαμβάνοντας υπόψη τη μονοτονία της f, καθώς και την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες της C_f, σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση στο ακόλουθο γράφημα (αριστερό σχήμα). Σε αυτό το γράφημα φαίνονται επίσης οι ασύμπτωτες της C_f που βρέθηκαν παραπάνω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y = x$ και φαίνεται επίσης στο ακόλουθο γράφημα με μαύρο χρώμα (δεξιό σχήμα).





ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{x-f(x)}{1+e^x}=-\frac{1}{f(x)-x}\Leftrightarrow\frac{x-f(x)}{1+e^x}=\frac{1}{x-f(x)}\Leftrightarrow\left(x-f(x)\right)^2=1+e^x,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\left(x-f(x)\right)^2=1+e^x\Leftrightarrow\left|x-f(x)\right|=\sqrt{1+e^x}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x-f(x)$ για $x\in\mathbb{R}$. Τότε, σύμφωνα με την παραπάνω ισότητα, ισχύει $\left|h(x)\right|=\sqrt{1+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $\sqrt{1+e^x}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι $\left|h(x)\right|\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(0)=\sqrt{2}$, προκύπτει ότι

$$h(0)=-f(0)=-\sqrt{2}<0.$$

Είδαμε παραπάνω ότι η h διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα έπεται από την παραπάνω σχέση ότι $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|h(x)\right|=-h(x)$ και επομένως

$$-h(x)=\sqrt{1+e^x}\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{1+e^x}\ \boxed{\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{1+e^x},\text{ όπως θέλαμε.}}$$

Γ2. i. Ισχύει

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\le 0 \\ \sqrt{2}-x\ln(x+1), & x>0 \end{cases} = \begin{cases} x+\sqrt{1+e^x}, & x\le 0 \\ \sqrt{2}-x\ln(x+1), & x>0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0=0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)=\sqrt{2}.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Πράγματι, η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x<0$ ισχύει

$$g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\left(1+e^x\right)'=1+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}>0.$$

Επειδή η g είναι επιπλέον και συνεχής στο $x_0=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $(-\infty,0]$.

Θα μελετήσουμε τώρα τη μονοτονία της g στο $(0,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g'(x)=\left(\sqrt{2}-x\ln(x+1)\right)'=-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}. \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι αρνητική. Ισχύει η συνεπαγωγή

$$x>0\Rightarrow x+1>1 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(x+1)>\ln 1\Rightarrow \ln(x+1)>0. \quad (2)$$

Επιπλέον, για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$$\frac{x}{x+1}>0. \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3), προκύπτει ότι $g'(x)<0$ για κάθε $x>0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της g σε δύο βήματα:

- Ισχύει $g\nearrow(-\infty,0]$, άρα, λόγω της συνέχειας, προκύπτει ότι

$$g\left((-\infty,0]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right]=\left(-\infty,\sqrt{2}\right],$$

όπου το όριο στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκε ως εξής:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+e^x}\right)=(-\infty)+\sqrt{1+0}=-\infty.$$

Καθώς $0 \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right]$, υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, 0]$, ώστε $g(\rho_1) = 0$. Δεν μπορεί να ισχύει $\rho_1 = 0$, αφού $g(0) = \sqrt{2}$. Άρα $\rho_1 < 0$. Το ρ_1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$, διότι η g είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

- Ισχύει $g \searrow (0, +\infty)$, άρα, λόγω της συνέχειας, προκύπτει ότι

$$g\big((0,+\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to 0^+} g(x)\right) = \left(-\infty, \sqrt{2}\right),$$

όπου τα δύο όρια στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2} - x\ln(x+1)\right) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2} - x\ln(x+1)\right) = \sqrt{2}.$

Καθώς $0 \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right]$, υπάρχει $\rho_2 \in (0, +\infty)$, ώστε $g(\rho_2) = 0$. Το ρ_2 είναι μοναδικό στο $(0, +\infty)$, γιατί g γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Συγκεντρωτικά λοιπόν, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = xg\big(g(x)\big) - x(x - \rho_1)g(x) + 2024(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

για $x \in [0, \rho_2]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0, \rho_2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- $h(0) = \rho_1 \rho_2 2024$, η οποία είναι αρνητική διότι $\rho_1 < 0 < \rho_2$.
- $h(\rho_2) = \rho_2 g\big(g(\rho_2)\big) \overset{g(\rho_2)=0}{=} \rho_2 g(0) = \rho_2\sqrt{2}$, η οποία είναι θετική, καθώς $\rho_2 > 0$.

Έχουμε λοιπόν $h(0)h(\rho_2) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (0, \rho_2)$ έτσι ώστε $h(\xi) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι το ξ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης. Ισχύει η ισοδυναμία

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi g\big(g(\xi)\big) - \xi(\xi - \rho_1)g(\xi) + 2024(\xi - \rho_1)(\xi - \rho_2) = 0$$

$$\overset{:\xi(\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)\neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{g(g(\xi))}{(\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)}-\frac{g(\xi)}{\xi-\rho_2}+\frac{2024}{\xi}=0,}$$

η οποία είναι πράγματι η δοσμένη εξίσωση.

Γ3. Θα αποδείξουμε ότι η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Για να το κάνουμε αυτό, υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια.

- Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2}}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\right)=1+\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

- Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}-x\ln(x+1)-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln(x+1)=0.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Στα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε υπολογίσει ότι

$$g'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}, & x<0\\[2ex] -\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}, & x>0\end{cases}$$

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ και για κάθε $x<0$ ισχύει

$$g''(x)=\left(1+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\right)'=\frac{2e^x\sqrt{1+e^x}-\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x}{4(1+e^x)}$$

$$=\frac{2e^x(1+e^x)-e^{2x}}{4(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}=\frac{2e^x+e^{2x}}{4(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}>0.$$

Έπεται ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$, άρα και «1-1» σε αυτό.

Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει ότι $g'(x_1) \neq g'(x_2)$. Άρα η g αποκλείεται να έχει παράλληλες εφαπτόμενες σε δύο σημεία με αρνητικές τετμημένες

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$g''(x) = \left(-\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right)' = -\frac{1}{x+1} - \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0.$$

Έπεται ότι η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα και «1-1» σε αυτό. Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει ότι $g'(x_1) \neq g'(x_2)$. Άρα η g αποκλείεται να έχει παράλληλες εφαπτόμενες σε δύο σημεία με θετικές τετμημένες.

Μένει να αποκλείσουμε την περίπτωση να υπάρχουν δύο παράλληλες εφαπτόμενες, μία σε σημείο με θετική τετμημένη και μία σε σημείο με αρνητική. Αυτό όμως αποκλείεται να ισχύει, διότι είδαμε στο Ερώτημα Γ2 ότι $g'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και $g'(x) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$. Έτσι, αν $x_1 < 0 < x_2$, τότε ισχύει $g'(x_1) > 0 > g'(x_2)$, άρα $g'(x_1) \neq g'(_2)$. Ομοίως, αν $x_2 < 0 < x_1$, θα έχουμε $g'(x_1) < 0 < g'(x_2)$, οπότε $g'(x_1) \neq g'(x_2)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $g'(x_1) \neq g'(x_2)$. Συνεπώς δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της C_g οι οποίες να είναι παράλληλες.

Γ4. Από το Ερώτημα Γ2 γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $\left(-\infty, \sqrt{2}\right]$, και μάλιστα η g παίρνει την τιμή $\sqrt{2}$ μόνο στη θέση $x = 0$.Ισχύει λοιπόν $g(x) < \sqrt{2}$ για κάθε $x \neq 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \sqrt{2}$, επομένως προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{g(x) - \sqrt{2}} = -\infty. \quad (4)$$

Επιπλέον, για κάθε $x \neq 0$ ισχύει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) + \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 3 \leq 1 + 1 - 3 = -1.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με την (αρνητική) ποσότητα $g(x) - \sqrt{2}$, προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-3}{g(x)-\sqrt{2}}\geq-\frac{1}{g(x)-\sqrt{2}}.$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{g(x)-\sqrt{2}}=+\infty$, οπότε από την προηγούμενη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-3}{g(x)-\sqrt{2}}=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

Λύση

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επιπλέον, αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα πρέπει

$$f(0)=f(1)\Leftrightarrow 0=e^{1-\alpha}-\alpha$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(\alpha)=e^{1-\alpha}-\alpha$ για $\alpha\in\mathbb{R}$. Η παραπάνω εξίσωση τότε γράφεται ως $T(\alpha)=0$. Η T είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$T'(\alpha)=e^{1-\alpha}(1-\alpha)'-\alpha'=-e^{1-\alpha}-1<0.$$

Επομένως, η T είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1» σε αυτό. Παρατηρούμε ότι $T(1)=e^{1-1}-1=0$. Η αρχική εξίσωση που θέλαμε να λύσουμε είναι τότε ισοδύναμη με

$$T(\alpha)=0\Leftrightarrow T(\alpha)=T(1)\boxed{\overset{T:1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=1.}$$

Δ2. Αφού $\alpha=1$, ισχύει για κάθε $x\geq0$ ότι $f(x)=xe^{x-1}-x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\geq0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(xe^{x-1}-x\right)'=e^{x-1}+xe^{x-1}-1.$$

Επιπλέον, η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\geq0$ ισχύει

$$f''(x)=\left(e^{x-1}+xe^{x-1}-1\right)'=e^{x-1}+e^{x-1}+xe^{x-1}$$
$$=2e^{x-1}+xe^{x-1}.$$

Για κάθε $x\geq 0$ ισχύει $2e^{x-1}>0$ και $xe^{x-1}\geq 0$. Επομένως, $f''(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $f'(0)=e^{-1}-1=\dfrac{1}{e}-1<0$
- $f'(1)=1>0$

Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Αυτό το ξ θα είναι μοναδικό γιατί η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x<\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<0.$
- $x>\xi\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)>0.$

Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		ξ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\xi]$, γνησίως φθίνουσα στο $(\xi,+\infty)$ και έχει πράγματι μοναδικό κρίσιμο σημείο ξ. Σε αυτό το σημείο παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

$$f(\xi)=\xi e^{\xi-1}-\xi. \quad (1)$$

Πράγματι, αν $0\leq x\leq\xi$, τότε $f(x)\geq f(\xi)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\xi]$, ενώ, αν $x\geq\xi$, τότε $f(x)\geq f(\xi)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\geq 0$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(\xi)$.

Όμως, από τον ορισμό του ξ γνωρίζουμε ότι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi-1}+\xi e^{\xi-1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow e^{\xi-1}(1+\xi)=1 \Leftrightarrow e^{\xi-1}=\frac{1}{1+\xi}.$$

Άρα, με αντικατάσταση της τελευταίας ισότητας στη σχέση (1), παίρνουμε ότι

$$f(\xi)=\xi e^{\xi-1}-\xi=\xi\frac{1}{1+\xi}-\xi=\frac{\xi}{1+\xi}-\xi=\frac{\xi-\xi(1+\xi)}{1+\xi}$$

$$\boxed{=-\frac{\xi^2}{\xi+1},\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Δ3. Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τουλάχιστον τρία σημεία, έστω

$$A(x_1,f(x_1)),\ B(x_2,f(x_2)),\ \Gamma(x_3,f(x_3)),$$

με $x_1<x_2<x_3$. Τότε η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-(\lambda x+\beta)=f(x)-\lambda x-\beta$$

έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1<x_2<x_3$, δηλαδή $g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=0$. Τότε όμως θα έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $g(x_1)=g(x_2)=0$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)$, έτσι ώστε $g'(\xi_1)=0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[x_2,x_3]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_2,x_3) ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$g(x_2)=g(x_3)=0$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_2\in(x_2,x_3)$, έτσι ώστε $g'(\xi_2)=0$.

- Η $g'(x)=f'(x)-\lambda$ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_2, x_3)$, έτσι ώστε $g''(\xi)=0$.

Ισχύει $g'(x)=f'(x)-\lambda$ και $g''(x)=f''(x)$, επομένως η σχέση $g''(\xi)=0$ δίνει ισοδύναμα ότι $f''(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού έχουμε δει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x \geq 0$.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=\lambda x+\beta$ έχει το πολύ δύο λύσεις.

Δ4. Η εξίσωση εφαπτομένης σε ένα τυχαίο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in [0,+\infty)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Το σημείο $A(0,-1)$ ανήκει στην ευθεία ε αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή αν

$$-1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)-x_0 f'(x_0)=-1$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{x_0-1}-x_0-x_0\left(e^{x_0-1}+x_0 e^{x_0-1}-1\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow -x_0^2 e^{x_0-1}=-1 \Leftrightarrow x_0^2 e^{x_0-1}-1=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=x^2 e^{x-1}-1$ για $x \geq 0$. Η παραπάνω εξίσωση τότε γράφεται ως $T(x)=0$. Παρατηρούμε ότι $T(1)=0$. Θα δείξουμε ότι η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της T. Η T είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$T'(x)=\left(x^2 e^{x-1}-1\right)'=2xe^{x-1}+x^2 e^{x-1}=e^{x-1}\left(x^2+2x\right).$$

Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι $x^2+2x \geq 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών. Επιπλέον, η ισότητα ισχύει όταν

$$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=0.$$

Έτσι, θα έχουμε $T'(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$. Συνεπώς η T είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα το $x_0=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $x_0^2 e^{x_0-1}-1=0$.

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon: y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=1\cdot(x-1)+0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow y=x-1.}$$

Δ5. Στο Ερώτημα Δ2 είδαμε ότι $f(\xi)=-\frac{\xi^2}{\xi+1}$. Έτσι, η αποδεικτέα ανισότητα γίνεται

$$\frac{f(x)}{1-x}+\frac{\xi^2}{(1-\xi)(1+\xi)}<0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x}-\frac{-\frac{\xi^2}{1+\xi}}{1-\xi}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x}-\frac{f(\xi)}{1-\xi}<0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x}<\frac{f(\xi)}{1-\xi} \Leftrightarrow \frac{-f(x)}{1-x}>\frac{-f(\xi)}{1-\xi}$$

$$\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \frac{f(1)-f(x)}{1-x}>\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}.$$

Θεωρούμε τυχόν $x\in(\xi,1)$. Τότε η f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\xi,x]$ και $[x,1]$ και επομένως υπάρχουν $x_1\in(\xi,x)$ και $x_2\in(x,1)$, έτσι ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},\ f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

Στο Ερώτημα Δ2 είδαμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$, άρα και στο υποδιάστημα $[\xi,1]$. Επομένως, καθώς

$$\xi<x_1<x<x_2<1,$$

προκύπτει ότι

$$x_2>x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x_2)>f'(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(1)-f(x)}{1-x}>\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Διαγώνισμα 4.11

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ , **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Λύση

Β1. Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g. Ισχύει $A_f = \mathbb{R}$, ενώ για την g παίρνουμε τον περιορισμό

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1$$

Επομένως, $A_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $h = f \circ g$ ως εξής:

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $A_h = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Για κάθε $x \in A_h$ ισχύει

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\boxed{= x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1}.}$$

Β2. Για να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της h δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες, θα αποδείξουμε ότι τα $\lim_{x \to -\infty} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1}^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - 2\right) = +\infty,$$

όπου για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$. Επίσης,

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - 2\right) = -\infty,$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$. Εφόσον κανένα από τα δύο όρια δεν είναι πραγματικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι η C_h δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

B3. i. Αυτό το όριο γράφεται ως

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{2}}=0.$$

ii. Αυτό το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-1}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2}$$

$$\overset{|x|=-x}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}}=\frac{1-0}{-\sqrt{1-0}}=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|x|=-x$, καθώς $x\to-\infty$.

B4. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει

$$h'(x)=\left(x^2-1-2\sqrt{x^2-1}\right)'=2x-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'=2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Επομένως, η εξίσωση $h'(x)=\dfrac{10x}{\sqrt{x^2-1}}-10x$ ισοδύναμα γίνεται:

$$2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{10x}{\sqrt{x^2-1}}-10x\Leftrightarrow 2x+10x=\frac{10x}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow 12x=\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow 12x-\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=0\Leftrightarrow 12x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 12x=0 \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad \sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad x^2=2$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad x=\sqrt{2} \quad \acute{\eta} \quad x=-\sqrt{2}.$$

Όμως $0 \in A_h$, άρα απορρίπτεται, ενώ οι αριθμοί $\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της h και επομένως είναι οι μόνες δεκτές λύσεις της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ Γ

Λύση

Γ1. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, δηλαδή ότι

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x).$$

- Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=4+\ln(\lambda+4).$$

- Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-\lambda x}{3x^2+x} \overset{:x>0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-\lambda}{3x+1}=\frac{1-\lambda}{1}=1-\lambda.$$

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει ότι

$$4+\ln(\lambda+4)=1-\lambda \Leftrightarrow 3+\lambda+\ln(\lambda+4)=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=3+x+\ln(x+4)$, $x>-4$. Η T είναι παραγωγίσιμη στο $(-4,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>-4$ ισχύει $T'(x)=1+\frac{1}{x+4}>0$. Άρα η T είναι γνησίως αύξουσα στο $(-4,+\infty)$, οπότε και «1-1» σε αυτό. Παρατηρούμε ότι $T(-3)=0$, επομένως η μοναδική ρίζα της T είναι η $x=3$. Έτσι, η εξίσωση $3+\lambda+\ln(\lambda+4)=0$ ισοδύναμα γράφεται

$$T(\lambda)=0 \Leftrightarrow T(\lambda)=T(-3) \boxed{\overset{T\,:1\text{–}1}{\Leftrightarrow} \lambda=-3.}$$

Έτσι, τελικά ο τύπος της f θα είναι:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{3\eta\mu x+1}+\ln(-3+4), & -\dfrac{1}{3}<x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x-(-3)x}{3x^2+x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4}{3\eta\mu x+1}, & -\dfrac{1}{3}<x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x+3x}{3x^2+x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Γ2. Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,4)$ ορίζεται, θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Θα υπολογίσουμε τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά. Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{4}{3\eta\mu x+1}-4}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-4(3\eta\mu x+1)}{x(3\eta\mu x+1)}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{-12\sigma\upsilon\nu x}{(3\eta\mu x+1)+3x\sigma\upsilon\nu x}=\frac{-12}{1+0}=-12,$$

όπου στο τρίτο βήμα της ισότητας χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x+3x}{3x^2+x}-4}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+3x-4(3x^2+x)}{x(3x^2+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-x-12x^2}{3x^3+x^2}\overset{:x^2}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x-x}{x^2}-12}{3x+1}=\frac{0-12}{0+1}=-12,$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital ως εξής:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-x}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Εφόσον και τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα με -12, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=-12$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,4)$ θα είναι

$$\boxed{(\varepsilon): y-4=-12(x-0)\Leftrightarrow y=-12x+4.}$$

Γ3. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού $A_f=\left(-\frac{1}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται, καθώς και τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f' ισούται με 0.

Για $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ έχουμε

$$f(x)=\frac{4}{3\eta\mu x+1}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων, με

$$f'(x)=\frac{-12\sigma\upsilon\nu x}{(3\eta\mu x+1)^2}.$$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu x>0$ και $(3\eta\mu x+1)^2>0$. Επομένως, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$, άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία σε αυτό το διάστημα. Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. έχουμε

$$f(x)=\frac{\eta\mu x+3x}{3x^2+x}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(\sigma\upsilon\nu x+3)(3x^2+x)-(\eta\mu x+3x)(6x+1)}{(3x^2+x)^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(\sigma\upsilon\nu x+3)(3x^2+x)-(\eta\mu x+3x)(6x+1)$$

για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Τότε, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(3x^2+x)^2}\qquad(1)$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει

$$g'(x)=-\eta\mu x(3x^2+x)+(\sigma\upsilon\nu x+3)(6x+1)-(\sigma\upsilon\nu x+3)(6x+1)-6(\eta\mu x+3x)$$

$$=-\eta\mu x(3x^2+x)-6(\eta\mu x+3x).$$

Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύουν τα εξής:

- $\eta\mu x\geq 0$ με ισότητα μόνο για $x=0$,
- $3x^2+x\geq 0$ με ισότητα μόνο για $x=0$,
- $\eta\mu x+3x\geq 0$ με ισότητα μόνο για $x=0$.

Επομένως, για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ θα ισχύει ότι

$$-\eta\mu x(3x^2+x)-6(\eta\mu x+3x)\leq 0$$

με ισότητα μόνο για $x=0$. Ισοδύναμα, ισχύει $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $g'(0)=0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $g(x)<g(0)$, δηλαδή

$$g(x)<(\sigma\upsilon\nu 0+1)\cdot 0-0\cdot 1=0.$$

Άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Τέλος, από το Γ2 έχουμε $f'(0)=-12$, άρα ούτε το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f δεν έχει καθόλου κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, $-\frac{1}{3}<\alpha\le 0$ έχει εξίσωση

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha).$$

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον $y'y$, θέτουμε $x=0$. Τότε

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(0-\alpha)\Leftrightarrow y=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha).$$

Αφού το α μεταβάλλεται σύμφωνα με τον χρόνο t, ομοίως θα μεταβάλλεται και το y. Ισχύει μάλιστα $y(t)=f(\alpha(t))-\alpha(t)f'(\alpha(t))$. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(f(\alpha(t))-\alpha(t)f'(\alpha(t))\right)' \\ &= \alpha'(t)f'(\alpha(t))-\alpha'(t)f'(\alpha(t))-\alpha(t)\alpha'(t)f''(\alpha(t)) \\ &= -\alpha(t)\alpha'(t)f''(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\alpha'(t)=-1$ μονάδες/δευτερόλεπτο. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $\alpha(t_0)=0$, θα ισχύει λοιπόν ότι

$$\boxed{y'(t_0)=-\alpha(t_0)\alpha'(t_0)f''(\alpha(t_0))=0 \text{ μονάδες/δευτερόλεπτο.}}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων και ισχύει

$$f'(x)=\left(x^2-\sigma\upsilon\nu x\right)'=2x+\eta\mu x.$$

Επιπλέον, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=2+\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αυτή η ρίζα θα είναι και μοναδική. Επομένως, για κάθε $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ την τιμή $f(0)=0^2-\sigma\upsilon\nu 0=-1$. Πράγματι, αν $x\le 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge f(0)$.

Δ2. Παρατηρούμε ότι

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}>0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ως διαφορά συνεχών και επιπλέον ισχύει

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f(0)=(-1)\cdot\frac{\pi^2}{4}<0.$$

Έτσι, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. Το x_1 είναι το μοναδικό σημείο στο $(-\infty,0)$ με αυτήν την ιδιότητα, διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, καθώς:

- Το πεδίο ορισμού της είναι το $A_f=\mathbb{R}$ και προφανώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x)=(-x)^2-\sigma\upsilon\nu(-x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x=f(x).$$

Ισχύει ότι $-x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(-x_1)=f(x_1)=0$, οπότε η f έχει ρίζα και στο διάστημα $(0,+\infty)$ την $x_2=-x_1$. Αυτή η ρίζα είναι μοναδική στο $(0,+\infty)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Έτσι, συνολικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες οι οποίες είναι μεταξύ τους αντίθετες.

Δ3. i. Αφού η f είναι άρτια, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=f(-x)$. Επομένως, παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε $f'(x)=-f'(-x)$. Για $x=x_1$ παίρνουμε ότι

$$f'(x_1)=-f'(-x_1)\overset{x_2=-x_1}{\Leftrightarrow}f'(x_1)=-f'(x_2).$$

Έστω τώρα $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1,f(x_1))$ με τον άξονα $x'x$ και $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(x_2,f(x_2))$ με τον άξονα $x'x$. Επειδή $\varepsilon\varphi\omega=f'(x_1)$ και $\varepsilon\varphi\theta=f'(x_2)$, θα έχουμε ότι

$$\varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi(\pi-\theta).\quad (1)$$

Αν ισχύει ότι $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\pi-\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, τότε $\varepsilon\varphi\omega>0$ και $\varepsilon\varphi(\pi-\theta)<0$ που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (1). Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο στην περίπτωση που $\omega\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και $\pi-\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς, είτε θα ισχύει ότι $\omega,\pi-\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είτε θα ισχύει ότι $\omega,\pi-\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Όμως η συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, αλλά και στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, οπότε σε κάθε περίπτωση προκύπτει από τη σχέση (1) ότι

$$\boxed{\omega=\pi-\theta\Leftrightarrow\omega+\theta=\pi.}$$

Με άλλα λόγια, οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές.

ii. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x)=\frac{f'(x_2)(x-x_2)-1}{2}\Leftrightarrow 2f(x)-f'(x_2)(x-x_2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)+1+\left[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\right]=0$$

Αφού η f είναι κυρτή, η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενή της στο σημείο $A(x_2, f(x_2))$, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Ισχύει δηλαδή

$$f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)\overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_2$. Από το Δ1 γνωρίζουμε επιπλέον ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι:

- $f(x)+1\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
- $f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_2>0$.

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left[f(x)+1\right]+\left[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\right]\geq 0$$

και, για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι επιμέρους ισότητες $f(x)=-1$ και $f(x)=f'(x_2)(x-x_2)$. Αυτές όμως δεν έχουν κοινή λύση, αφού η μία ισχύει για $x=0$ και η άλλη για $x=x_2>0$. Άρα η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Έστω F η αρχική της f για την οποία ισχύει ότι $F(x_1)=0$. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$F'(x)=f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x=\left(\frac{x^3}{3}-\eta\mu x\right)'.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι

$$F(x)=x^3-\eta\mu x+c,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας $x=x_1$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $F(x_1)=0$, παίρνουμε ότι

$$0=x_1^3-\eta\mu x_1+c\Leftrightarrow c=\eta\mu x_1-x_1^3$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $F(x)=x^3-\eta\mu x-x_1^3+\eta\mu x_1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού η f έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1<x_2$ και είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (x_1,x_2). Ισχύει $0\in(x_1,x_2)$ και $f(0)=-1$, επομένως $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

Εφόσον $f = F'$, η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$. Επομένως, για κάθε $x \in (x_1, x_2]$ ισχύει ότι

$$F(x) < F(x_1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - \eta\mu(x) + \eta\mu(x_1) - \frac{x_1^3}{3} < 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x - x_1^3 < 3(\eta\mu x - \eta\mu x_1), \text{ το οποίο είναι το ζητούμενο.}}$$

Διαγώνισμα 4.12

ΘΕΜΑ Α

Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 25.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

Καλό είναι να συμπεριλαμβάνουμε και το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης, που αναφέρεται κάτω από τον ορισμό.

A4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Λάθος: **Χρειάζεται πολλή προσοχή** στα σημεία στα οποία πρέπει να ισχύει η συνέχεια/παραγωγισιμότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η πρόταση είναι λάθος επειδή η συνάρτηση $g \circ f$ μπορεί να μην ορίζεται καν στο σημείο $g(x_0)$, πόσο μάλλον να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. Η πρόταση θα ήταν σωστή αν το τελευταίο μέρος ήταν «…τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι υποχρεωτικά παραγωγίσιμη στο x_0».

ii. Σωστό.

iii. Σωστό: Η πρόταση είναι αληθής λόγω του θεωρήματος Rolle. Οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται διότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Το θεώρημα Rolle απαιτεί να είναι η f συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Εδώ αυτές οι υποθέσεις δεν δίνονται αυτούσιες στην εκφώνηση, όμως μας έχει δοθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, το οποίο είναι μια ισχυρότερη υπόθεση. Εφόσον δηλαδή ισχύει αυτή, θα ισχύουν και οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

iv. Σωστό: Δες το θεώρημα 3 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου. Εδώ η πρόταση έχει την αντίστροφη φορά της ανισότητας, αλλά, ακόμη και έτσι, εκείνο το θεώρημα συνεχίζει να ισχύει (φυσικά με την αντίστροφη φορά σε όλες τις ανισότητες). Η υπόθεση ότι η f δεν είναι παντού μηδέν ικανοποιείται λόγω της συνθήκης $f(2) < 0$.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η δοθείσα ανισότητα γράφεται και ως $xe^x+1>0$. Επομένως, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xe^x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$g'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'+(1)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x.$$

Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της g'. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x)>0\Leftrightarrow e^x(x+1)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}x+1>0\Leftrightarrow x>-1.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η f' είναι αρνητική για $x<-1$ και μηδενίζεται μόνο για $x=-1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συμπεραίνουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=-1$. Αυτό το ολικό ελάχιστο είναι

$$g(-1)=(-1)e^{-1}+1=1-e^{-1}.$$

Πράγματι, αν $x\le-1$, τότε $g(x)\ge g(-1)$, καθώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, ενώ, αν $x\ge-1$, τότε $g(x)\ge g(-1)$, καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x)\ge g(-1)$.

Επειδή ισχύει ότι $e^{-1}<1$, θα έχουμε ότι $g(-1)>0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)\ge g(-1)>0,$$

δηλαδή $\boxed{g(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'+(x+1)'$$
$$=e^x+(x-1)e^x+1=xe^x+1=g(x).$$

Από το προηγούμενο ερώτημα, ξέρουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από την προηγούμενη ισότητα έπεται ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι $f''(x)=g'(x)$.

Το πρόσημο της f' δίνεται στον πίνακα του Ερωτήματος Β1. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας για την f.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-1)$ και κυρτή στο $(-1,+\infty)$.
- Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής το $(-1,f(-1))$. Καθώς $f(-1)=-2e^{-1}$, αυτό το σημείο είναι το $(-1,-2e^{-1})$.

Β3. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},$$

όπου τα δύο όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το όριο στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^x+x+1\right)=(+\infty-1)\cdot(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty.$$

- Το όριο στο $-\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x+x+1\right).\qquad (1)$$

Για τον πρώτο όρο χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x \overset{-\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}} \overset{-\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

Ο κανόνας De L' Hospital χρησιμοποιήθηκε στο τρίτο βήμα για την απροσδιόριστη μορφή $-\infty/+\infty$. Ισχύει επιπλέον ότι $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, άρα από τη σχέση (1) και την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x + x + 1\right) = 0 + (-\infty) = -\infty.$$

Σχετικά με το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του x, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $f(0)=0$. Καθώς όμως η f είναι γνησίως αυξουσα, έπεται ότι:

- $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.
- $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$.

Το πεδίο ορισμού της h είναι το $D_h=\mathbb{R}$ και η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h'(x) = \frac{(e^x-x)'(x^2+1)-(e^x-x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(e^x-1)(x^2+1)-2x(e^x-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2e^x+e^x-x^2-1-2xe^x+2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)+x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1)^2+(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(e^x(x-1)+x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)f(x)}{(x^2+1)^2}.$$

Επειδή ισχύει ότι $(x^2+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της h' εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή $(x-1)f(x)$. Το πρόσημο της f είναι γνωστό από το προηγούμενο ερώτημα. Επομένως, μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα προσήμων για την h' απ' όπου θα προκύψουν και τα διαστήματα μονοτονίας της h.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Λόγω της συνέχειας της h στα σημεία $x_0=0$ και $x_1=1$, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η h είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$.
- Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=x\ln x+x$$

για κάθε $x>0$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$h'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'+(x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1=\ln x+2.$$

Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της h'. Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$h'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+2>0\Leftrightarrow \ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}.$$

Ομοίως, μπορούμε να δούμε ότι η h' είναι αρνητική για $x\in(0,e^{-2})$ και μηδενίζεται για $x=e^{-2}$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την h:

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ο αριθμός e^{-1} ανήκει στο διάστημα $[e^{-2},+\infty)$, στο οποίο η h είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, για κάθε $x>e^{-1}$ ισχύει

$$h(x)>h(e^{-1})=e^{-1}\ln e^{-1}+e^{-1}=e^{-1}\cdot(-1)+e^{-1}=0,$$

δηλαδή $\boxed{x\ln x+x>0}$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Γ2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(e^{-1},+\infty)$ και ισχύει

$$g'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}f'(x),$$

οπότε η ζητούμενη σχέση $g'(x)=1+\dfrac{g(x)}{x}$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$g'(x)=1+\frac{g(x)}{x}\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=1+\frac{e^{f(x)}}{x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-f(x)}\neq 0$, η τελευταία ισότητα γράφεται ως

$$e^{f(x)}f'(x)=1+\frac{e^{f(x)}}{x}\Leftrightarrow f'(x)=e^{-f(x)}+\frac{1}{x},$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x\geq 1$ από την υπόθεση του προβλήματος.

Γ3. Η ισότητα $g'(x)=1+\dfrac{g(x)}{x}$ ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$g'(x)=1+\frac{g(x)}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow} xg'(x)=x+g(x)\Leftrightarrow xg'(x)-g(x)=x$$

$$\overset{:x^2>0}{\Leftrightarrow}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{x}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{g(x)}{x}\right)'=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{g(x)}{x}\right)'=(\ln x)'$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει έτσι ότι $\dfrac{g(x)}{x}=\ln x+c$ για κάθε $x>e^{-1}$, όπου c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

Μας έχει δοθεί ότι $f(1)=0$, οπότε $g(1)=e^{f(1)}=e^0=1$. Αντικαθιστώντας λοιπόν $x=1$ στην παραπάνω ισότητα, παίρνουμε ότι

$$\frac{g(1)}{1}=\ln 1+c\Leftrightarrow c=1.$$

Επομένως, για κάθε $x>e^{-1}$ ισχύει

$$\frac{g(x)}{x}=\ln x+1\Leftrightarrow g(x)=x\ln x+x$$
$$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x\ln x+x$$
$$\boxed{\Leftrightarrow f(x)=\ln(x\ln x+x).}$$

Σημειώνουμε ότι στο τελευταίο βήμα μπορούμε να θεωρήσουμε τους λογάριθμους, καθώς έχουμε δείξει στο Ερώτημα Γ1 ότι $x\ln x+x>0$ για κάθε $x>e^{-1}$.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1).\quad (1)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(e^{-1},+\infty\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln x+x}(x\ln x+x)' =\frac{x\cdot(\ln x)'+(x)'\ln x+(x)'}{x\ln x+x}$$

$$=\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln x+1}{x\ln x+x}=\frac{2+\ln x}{x\ln x+x}.$$

Ισχύει λοιπόν $f'(1)=2$. Γνωρίζουμε επίσης από πριν ότι $f(1)=0$. Άρα, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1), παίρνουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y=2x-2}$$

Γ5. Γνωρίζουμε ότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Προκύπτει έτσι ότι

Αυτή η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

$$f(x)=\ln(x\ln x+x)\le x\ln x+x-1$$

για κάθε $x>e^{-1}$, όπου χρησιμοποιήσαμε την παραπάνω ανισότητα για την ποσότητα $y=x\ln x+x$. Μάλιστα, στην τελευταία ανισότητα, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $y=1$, δηλαδή όταν $x\ln x+x=1$. Αυτή η ισότητα προφανώς και δεν ισχύει για κάθε $x\in[1,2]$. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι δεν ισχύει για $x=\sqrt{e}\in(1,2)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 3 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα θα ισχύει η γνήσια ανισότητα

$$\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2(x\ln x+x-1)dx. \quad (2)$$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους σε δύο μέρη και τα υπολογίζουμε ξεχωριστά. Το πρώτο μέρος θα είναι το

$$I=\int_1^2 x\ln x dx,$$

το οποίο υπολογίζουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_1^2 x\ln x\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\,dx$$

$$=\frac{4}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\int_1^2\frac{x}{2}dx$$

$$=2\ln 2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

Το δεύτερο μέρος είναι ίσο με

$$\int_1^2 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, παίρνουμε τελικά από τη σχέση (2) ότι

$$\int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 x\ln x dx + \int_1^2 (x-1)dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{= 2\ln 2 - \frac{1}{4},\ \text{που είναι και το ζητούμενο.}}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Θα λύσουμε αυτό το ερώτημα με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, συνεπώς υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Στην ισότητα που μας έχει δοθεί, αν αντικαταστήσουμε με $x = x_0$, παίρνουμε

$$f^2(x_0)+f(x_0) = 2x_0^2 + x_0 + 3 \overset{f(x_0)=0}{\Leftrightarrow} 2x_0^2 + x_0 + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση όμως είναι δευτεροβάθμια και έχει διακρίνουσα ίση με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1-24 = -23 < 0$. Αυτό σημαίνει ότι αυτή η εξίσωση είναι αδύνατη. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο, καθώς είναι αδύνατο το x_0 να είναι λύση της εξίσωσης $2x^2+x+3=0$. Επομένως, θα ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Σημείωση:

Βλέπουμε ότι για τη λύση χρειάστηκαν μόνο γνώσεις εξισώσεων β΄ βαθμού. Ίσως κάποιες φορές να αξίζει να δοκιμάσουμε απλές μεθόδους πριν προχωρήσουμε σε πιο σύνθετες (μονοτονία, ακρότατα, όπως πιθανά να προσπαθούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει σε αυτό το ερώτημα).

Δ2. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοσμένης ισότητας παίρνουμε

$$\left(f^2(x)\right)' + f'(x) = \left(2x^2\right)' + (x)' + (3)' \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+f'(x) = 4x+1$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(2f(x)+1\right) = 4x+1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Καθώς η f είναι συνεχής και δεν έχει ρίζες (όπως δείξαμε στο Γ1), συμπεραίνουμε ότι διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, επειδή $f(1)=2>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως $2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε όμως προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(x)\left(2f(x)+1\right)=4x+1 \overset{:(2f(x)+1)\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{4x+1}{2f(x)+1}$$

Συνεπώς, για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου f', δουλεύουμε ως εξής:

$$f'(x)>0 \overset{2f(x)+1>0}{\Leftrightarrow} 4x+1>0 \Leftrightarrow 4x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x<-\frac{1}{4}$ και $f'(x)=0$ μόνο για $x=-\frac{1}{4}$. Προκύπτει λοιπόν για την f ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$-1/4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο σημείο $x=-\frac{1}{4}$, παίρνουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$.
- Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση $x=-\frac{1}{4}$. Πράγματι, αν $x\le -\frac{1}{4}$, τότε $f(x)\ge f\left(-\frac{1}{4}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$, ενώ, αν $x\ge -\frac{1}{4}$, τότε $f(x)\ge f\left(-\frac{1}{4}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge f\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Δ3. Α΄ τρόπος:

Θέτουμε $y=f(x)$ στην αρχική σχέση που μας έχει δοθεί. Τότε ισοδύναμα θα έχουμε ότι:

$$y^2+y=2x^2+x+3 \Leftrightarrow y^2+y-\left(2x^2+x+3\right)=0.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι μπορούμε να θεωρήσουμε την τελευταία ως εξίσωση με άγνωστο το y (και απλώς αντιμετωπίζουμε το x σαν μία «σταθερά»).

Ως προς y, αυτή η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι η διακρίνουσα ισούται με

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot\left[-\left(2x^2+x+3\right)\right]=1+8x^2+4x+12=8x^2+4x+13.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

$$y_{1,2}=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}.$$

Η λύση $y_2=\dfrac{-1-\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}$ απορρίπτεται: Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η λύση είναι αρνητική για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θυμόμαστε όμως ότι $y=f(x)$ και, όπως είπαμε στη λύση του Ερωτήματος Γ2, η f είναι θετική σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Επομένως, αποκλείεται να είναι ίση με την (αρνητική) λύση y_2 για καμία τιμή του $x\in\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι πως

$$\boxed{f(x)=\frac{-1+\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μένει να εξηγήσουμε ότι η παράσταση που βρίσκεται κάτω από τη ρίζα είναι θετική για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$. Πράγματι, αυτή η παράσταση είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot8\cdot13<0$. Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημό της είναι ίδιο με το πρόσημο του συντελεστή α του όρου x^2. Καθώς $\alpha=8>0$, έπεται ότι η παράσταση είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Β΄ τρόπος:

Κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου στην αρχική ισότητα. Ο όρος που λείπει από την παράσταση $f^2(x)+f(x)$ για να συμπληρωθεί το τετράγωνο είναι το $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Προσθέτουμε αυτόν τον όρο και στα δύο μέλη και παίρνουμε

$$f^2(x)+f(x)+\frac{1}{4}=2x^2+x+3+\frac{1}{4}=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)^2=2x^2+x+\frac{13}{4}$$

$$=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8x^2+4x+13}{4}\Leftrightarrow\left|f(x)+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}.$$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα ξέρουμε ότι $2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η τελευταία ισότητα δίνει ότι

$$\boxed{f(x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1+\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ4. Κοντά στο $+\infty$ ισχύει $x>0$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε $x=|x|=\sqrt{x^2}$. Έτσι, θα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-1}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{8x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{13}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{8}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}=\sqrt{2},$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)=8$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Επομένως, έχουμε $\lambda:=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{2}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)$. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-1}{2}-\sqrt{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-2\sqrt{2}x}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{8x^2+4x+13}-2\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}^2-\left(2\sqrt{2}x\right)^2}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+13}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}\right).$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+13}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}$ βγάζουμε κοινό παράγοντα από τον αριθμητή το x και από την υπόρριζη ποσότητα το x^2. Τότε θα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+13}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2\left(\sqrt{x^2\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2\left(|x|\sqrt{\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}x\right)}\overset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2x\left(\sqrt{\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2\left(\sqrt{\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{2\left(\sqrt{8}+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{2\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{4}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Έτσι, το αρχικό όριο θα είναι ίσο με

$$-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-2\sqrt{2}x}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}.$$

Συνεπώς, η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι η ευθεία

$$\boxed{(\varepsilon):y=\sqrt{2}x+\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)}{4}.}$$

Διαγώνισμα 4.13

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 73.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

Α4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x + 1 = xe^x + 1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει

$$f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f''(x) > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $f''(x)<0$ για $x<-1$ και ότι η f'' μηδενίζεται μόνο για $x=-1$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας για την f:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗
$f(x)$	⌒		⌣

- Η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,1]$.
- Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(-1,f(-1))$ με $f(-1)=-\dfrac{2}{e}$.

B2. Με βάση το Ερώτημα Β1, η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$ με $f'(-1)=-\frac{1}{e}+1>0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)\geq f'(-1)=-e^{-1}+1>0,$$

απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f δεν έχει ακρότατα.

B3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{e^x-1}$ είναι το σύνολο

$$A_g=\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Αρχικά αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g είναι η ευθεία $x=0$, οπότε υπολογίζουμε το αντίστοιχο όριο:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+x+1}{e^x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+1}{e^x}=1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Καθώς όμως το $\lim_{x\to 0}g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Στη συνέχεια αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες της C_g στο $+\infty$.
Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^x+x+1\right]=(+\infty)\cdot(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty,$$

άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x+x+1}{x\left(e^x-1\right)}$$

$$\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)}{xe^x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}\right)}=1=\lambda,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Ισχύει επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1}{e^x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1-xe^x+x}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1-e^x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}-1\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}-1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{2\cdot 0+0-1}{1-0}=-1=\beta,$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η ευθεία

$$y=\lambda x+\beta=x-1$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Εφόσον έχει πλάγια ασύμπτωτη, η C_g δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Στη συνέχεια αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες της C_g στο $-\infty$. Θα υπολογίσουμε λοιπόν για αρχή το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Από το παραπάνω όριο προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x+x+1\right]=0+(-\infty)+1=-\infty.$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^x-1\right)=(-\infty)\cdot(-1)=+\infty$. Άρα,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^x+x+1}{x\left(e^x-1\right)}$$

$$\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x+1}{xe^x+e^x-1}=\frac{0+1}{0+0-1}=-1=\lambda,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $-\infty/+\infty$, καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{x}}=0.$$

Ισχύει λοιπόν

$$\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1}{e^x-1}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1+xe^x-x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+1+xe^x}{e^x-1}\right)$$

$$=\frac{0+1+0}{0-1}=-1=\beta,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

τα οποία είχαμε ήδη υπολογίσει σε προηγούμενα βήματα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία

$$y=\lambda x+\beta=-x-1$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$. Εφόσον έχει πλάγια ασύμπτωτη, η C_g δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Έχουμε

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[(x-1)e^x+x+1\right]dx=\int_0^1(x-1)e^x dx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$$

$$=\int_0^1(x-1)\left(e^x\right)'dx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1(x-1)'e^x dx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$$

$$=\left[(x-1)e\ \right]_0^1-\int_0^1 e^x dx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=1-\left[e^x\right]_0^1+\frac{1}{2}+1=3-e+\frac{1}{2}\boxed{=\frac{7}{2}-e.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x=1$. Θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης. Πράγματι, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0.$$

Επομένως, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική. Λόγω της μονοτονίας της f' προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για κάθε $0<x<1$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

  $$f'(x)<f'(1)=0,$$

  άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,1]$.

- Για κάθε $x>1$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

  $$f'(x)>f'(1)=0,$$

  άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$.

Αυτά τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Για να βρούμε το σύνολο τιμών, βρίσκουμε την εικόνα της f στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, επομένως

  $$f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-3,+\infty),$$

  όπου το όριο στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκε ως εξής:

  $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-3\right]=(-1)\cdot(-\infty)-3=+\infty.$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2, επομένως

  $$f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-3,+\infty),$$

όπου το όριο στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκε ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x - 3\right] = (+\infty)(+\infty) - 3 = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν τελικά ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\boxed{f\left((0,+\infty)\right) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [-3,+\infty).}$$

Γ2. Σημειώνουμε ότι, από τα συμπεράσματα του προηγούμενου ερωτήματος, προκύπτει ότι $f(x)\geq -3$ για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$T(x) = (e^x - 1)(f(\alpha)+5) + (4+f(\beta))(x-2)$$

για $x\in[0,2]$. Το σκεπτικό πίσω από την επιλογή αυτής της συνάρτησης είναι ότι προκύπτει μετά από απαλοιφή παρονομαστών στην εξίσωση που μας έχει δοθεί. Θα δείξουμε αρχικά ότι αυτή η συνάρτηση έχει ρίζα στο $(0,2)$ και στη συνέχεια ότι εκείνη η ρίζα ικανοποιεί και τη δοσμένη εξίσωση.

Η T είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξη συνεχών και επιπλέον:

- $T(0) = -(4+f(\beta))$. Αυτή η ποσότητα είναι αρνητική, καθώς, όπως σχολιάσαμε παραπάνω, ισχύει για κάθε $\beta>0$ ότι $f(\beta)\geq -3 > -4$, οπότε $4+f(\beta)>0$.
- $T(2) = (e^2-1)(f(\alpha)+5)$. Αυτή η ποσότητα είναι θετική, καθώς, όπως σχολιάσαμε παραπάνω, ισχύει για κάθε $\alpha>0$ ότι $f(\alpha)\geq -3 > -5$, οπότε $f(\alpha)+5>0$.

Έτσι, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $T(x_0)=0$. Ισοδύναμα, το x_0 ικανοποιεί τη σχέση

$$(e^{x_0}-1)(f(\alpha)+5) + (4+f(\beta))(x_0-2) = 0.$$

Καθώς όμως $x_0\in(0,2)$, οι όροι $e^{x_0}-1$ και x_0-2 είναι μη μηδενικοί, οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $(e^{x_0}-1)(x_0-2)$. Αυτή η εξίσωση τότε γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{f(\alpha)+5}{x_0-2} + \frac{4+f(\beta)}{e^{x_0}-1} = 0,$$

η οποία είναι η εξίσωση που μας είχε δοθεί στην εκφώνηση. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το x_0 είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

Γ3. Παίρνοντας λογάριθμους και στα δύο μέλη, η εξίσωση $x^{x-1}=e^{24}, x>0$ ισοδύναμα γράφεται

$$\ln x^{x-1}=24 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=24 \Leftrightarrow f(x)=21.$$

Είδαμε στο Ερώτημα Γ1 ότι $f(\Delta_1)=[-3,+\infty)$ και $f(\Delta_2)=[-3,+\infty)$. Ισχύει λοιπόν ότι $21\in f(\Delta_1)$ και $21\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχουν αντίστοιχα $x_1\in\Delta_1=(0,1]$ και $x_2\in\Delta_2=[1,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=21$, $f(x_2)=21$. Μάλιστα, τα x_1,x_2 είναι τα μοναδικά στα διαστήματα Δ_1, Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και f γνησίως αύξουσα στο Δ_2. Ισχύει ακόμη ότι $x_1,x_2\neq 1$, διότι $f(1)=3\neq f(x_1),f(x_2)$. Τέλος, επειδή $x_1\in\Delta_1=(0,1]$ και $x_2\in\Delta_2=[1,+\infty)$ και επειδή $x_1,x_2\neq 1$, είναι άμεσο ότι $x_1<x_2$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xf(x)-21x=x(f(x)-21)$, $x\in[x_1,x_2]$. Αυτήν τη συνάρτηση δε τη θεωρήσαμε τυχαία. Πράγματι, αν γράψουμε τη δοσμένη ισότητα με μεταβλητή το x αντί του ξ, τότε αυτή γράφεται ως

$$\begin{aligned} xf'(x)=21-f(x) &\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-21=0 \\ &\Leftrightarrow (xf(x)-21x)'=0 \Leftrightarrow g'(x)=0. \end{aligned}$$

Αυτός είναι και ο λόγος που ορίσαμε τη συνάρτηση g με αυτόν τον τρόπο. Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξη παραγωγίσιμων. Επιπλέον, γνωρίζουμε από το Γ3 ότι $f(x_1)=f(x_2)=21$, οπότε:

- $g(x_1)=x_1(f(x_1)-21)=0$.
- $g(x_2)=x_2(f(x_2)-21)=0$.

Επομένως, από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, έτσι ώστε $g'(\xi)=0$. Όμως, όπως είδαμε και προηγουμένως, ισχύει $g'(x)=xf'(x)+f(x)-21$. Επομένως,

$$\begin{aligned} g'(\xi)=0 &\Leftrightarrow \xi f'(\xi)+f(\xi)-21=0 \\ &\boxed{\Leftrightarrow \xi f'(\xi)=21-f(\xi)} \end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$xf'(x)-f(x)=x^2\left(e^{2x}-1\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\neq 0$, η παραπάνω ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^{2x}-1\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{2x}-x\right)'.$$

Επομένως, από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι

$$\frac{f(x)}{x}=e^{2x}-x+c_1 \text{ για κάθε } x<0$$

και

$$\frac{f(x)}{x}=e^{2x}-x+c_2 \text{ για κάθε } x>0,$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των παραπάνω εξισώσεων με το x, παίρνουμε ότι

$$f(x)=xe^{2x}-x^2+c_1x, \text{ για κάθε } x<0$$

και

$$f(x)=xe^{2x}-x^2+c_2x, \text{ για κάθε } x>0.$$

Οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. ισχύουν μόνο σε διαστήματα. Αυτός είναι και ο λόγος που θεωρούμε ξεχωριστή σταθερά για καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞).

Αφού $f(-1)=-\frac{1}{e^2}$, έπεται από τον πρώτο από τους παραπάνω τύπους ότι

$$-\frac{1}{e^2}=-\frac{1}{e^2}-1-c_1\Leftrightarrow c_1=-1.$$

Συνεπώς, για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)=xe^{2x}-x^2-x.$ Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$. Ισχύει λοιπόν

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(xe^{2x}-x^2-x\right)=0,$$

συνεπώς ο τύπος $f(x)=xe^{2x}-x^2-x$ ισχύει και για $x=0.$ Συνοψίζοντας, έχουμε ότι

$$f(x)=\begin{cases} xe^{2x}-x^2-x, & x\leq 0\\ xe^{2x}-x^2+c_2x, & x>0\end{cases}.$$

Για να υπολογίσουμε το c_2, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{xe^{2x}-x^2-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(e^{2x}-x-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}-x-1\right) = 1-1 = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{2x}-x^2+c_2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(e^{2x}-x+c_2\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}-x+c_2\right) = 1+c_2.$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0,$ θα πρέπει τα δύο πλευρικά όρια να είναι ίσα, δηλαδή να ισχύει

$$1+c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -1.$$

Από αυτήν την τελευταία ισότητα, προκύπτει τελικά ότι

$$\boxed{f(x) = xe^{2x}-x^2-x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = e^{2x}+2xe^{2x}-2x-1$$

$$= e^{2x}(1+2x)-(1+2x) = \left(e^{2x}-1\right)(1+2x). \qquad (1)$$

Το πρόσημο της παραγώγου f', το οποίο εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων $e^{2x}-1$ και $1+2x$, φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$1+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x}-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ και $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-\dfrac{1}{2}$ το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2e}+\frac{1}{4}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ το $f(0)=0$.

Δ3. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h'(x)=2+2e^{-2x}>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}f''(x)&=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}-2\\&=2e^{2x}\left(2x+2-e^{-2x}\right)=2e^{2x}h(x).\quad(2)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $h(-1)=-e^2<0$ και $h(0)=2-1=1>0$, επομένως, από το θεώρημα Bolzano για τη συνεχή συνάρτηση h, προκύπτει ότι υπάρχει $\rho\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$. Το ρ είναι μοναδικό, καθώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Μάλιστα, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f''(\rho)=2e^{2\rho}h(\rho)=0$.

- Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα, για κάθε $x<\rho$, ισχύει ότι

$$h(x)<h(\rho)=0.$$

Από αυτήν την παρατήρηση και από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f''(\rho)<0$ για κάθε $x<\rho$.

- Με εντελώς όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $f''(\rho)>0$ για $x>\rho$.

x	$-\infty$ ρ	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\rho]$, κυρτή στο $[\rho,+\infty)$ και ότι η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $M(\rho,f(\rho))$.

Δ4. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^1\left|xe^{2x}-x^2-x+x^2+3x\right|dx$$

$$=\int_0^1\left|xe^{2x}+2x\right|dx=\int_0^1\left|x\left(1+e^{2x}\right)\right|dx$$

$$\overset{x>0}{=}\int_0^1 x\left(1+e^{2x}\right)dx=\int_0^1 xdx+\int_0^1 xe^{2x}dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}+\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{4}\ \text{τετραγωνικές μονάδες.}}$$

Διαγώνισμα 4.14

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116-117.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 157.

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 225.

Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Λύση

Β1. Η σχέση $\dfrac{f(x)\left[f(x)-4x\right]}{e^{-x}-2x}=e^{-x}+2x$ γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{f(x)\left[f(x)-4x\right]}{e^{-x}-2x}=e^{-x}+2x\Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)=e^{-2x}-4x^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)-4xf(x)+4x^2=e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow\left(f(x)-2x\right)^2=\left(e^{-x}\right)^2\Leftrightarrow\left|f(x)-2x\right|=e^{-x}.$$

Επειδή όμως από την υπόθεση έχουμε $f(x) > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι $f(x) = 2x + e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού όμως $g(x) = \ln\left(\frac{e^{-2x}}{x+2}\right) + f(x)$, θα ισχύει για κάθε ότι

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^{-2x}}{x+2}\right) + 2x + e^{-x}$$
$$= \ln e^{-2x} - \ln(x+2) + 2x + e^{-x} \boxed{= e^{-x} - \ln(x+2).}$$

Β2. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. Έστω $x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 < -x_2 \overset{e^x \nearrow}{\Rightarrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \quad (1)$$

Επιπλέον,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \overset{\ln \nearrow}{\Rightarrow} \ln(x_1 + 2) < \ln(x_2 + 2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε ότι $g(x_1) > g(x_2)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2, +\infty)$, επομένως και «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της g.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-2, +\infty)$, για το σύνολο τιμών της θα ισχύει ότι

$$g((-2, +\infty)) = \left(\lim_{x \to +\infty} g(x), \lim_{x \to -2^+} g(x)\right) = \mathbb{R},$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \left(e^{-x} - \ln(x+2)\right) = e^2 - (-\infty) = +\infty,$
  όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x \to -2^+} \ln(x+2) \overset{y=x+2}{=} \lim\limits_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - \ln(x+2)\right) = 0 - (+\infty) = -\infty,$
  όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+2) \overset{y=x+2}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \overset{y=-x}{=} \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το $\boxed{D_{g^{-1}} = g((-2, +\infty)) = \mathbb{R}.}$

B3. Καθώς η g είναι «1-1», ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} g^{-1}(x)=x &\Leftrightarrow g\left(g^{-1}(x)\right)=g(x) \\ &\Leftrightarrow g(x)=x \\ &\Leftrightarrow g(x)-x=0, \end{aligned}$$

Η κατεύθυνση « $\Rightarrow$ » ισχύει για κάθε συνάρτηση. Η αντίστροφη κατεύθυνση ισχύει μόνο επειδή η g είναι «1-1».

όπου στο πρώτο βήμα συνθέσαμε με την g και στα δύο μέλη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$ για $x\in(-2,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα ισχύει ότι

$$-x_1>-x_2 \qquad (3)$$

Επιπλέον, αφού $x_1<x_2$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει

$$g(x_1)>g(x_2) \qquad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) παίρνουμε ότι $h(x_1)>h(x_2)$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$. Επιπλέον, ισχύει

$$h\left(-\frac{3}{2}\right)=e^{3/2}-\ln\left(2-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=e^{3/2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=e^{3/2}+\ln 2+\frac{3}{2}>0,$$

και $h(2)=e^{-2}-\ln 4-2<0$. Η h είναι συνεχής στο $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ ως διαφορά συνεχών και, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει $h\left(-\frac{3}{2}\right)h(2)<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(-\frac{3}{2},2\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow g(x_0)=x_0\Leftrightarrow g^{-1}(x_0)=x_0.$$

Το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και «1-1» στο πεδίο ορισμού της.

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\ln(x-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x-2}+\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x}-2024$$

για $x\in(2,3)$. Για να δείξουμε ότι αυτή η συνάρτηση έχει ρίζα στο $(2,3)$, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά της όρια στα άκρα του διαστήματος $(2,3)$. Ξεκινάμε με το πλευρικό όριο, καθώς $x\to 2^+$. Καθώς

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{x-2}\overset{y=x-2}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln y}{y}=\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y\cdot\frac{1}{y}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty,$$

έπεται ότι

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\ln(x-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x-2}\right)=(-\infty)\cdot\left[g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2\right]. \quad (5)$$

Θα αποδείξουμε ότι ο παράγοντας στο εσωτερικό της αγκύλης είναι αρνητικός. Πράγματι, ισχύει

$$-1<\lambda<0 \Leftrightarrow 0<-\lambda<1 \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(-\lambda)<\ln 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(-\lambda)<0 \Leftrightarrow -\ln(-\lambda)>0$$
$$\Leftrightarrow 1-\ln(-\lambda)>1.$$

Αφού όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα, έπεται από την τελευταία σχέση ότι

$$g(1-\ln(-\lambda))<g(0)\Leftrightarrow g(1-\ln(-\lambda))-g(0)<0,$$

άρα ο παράγοντας στην αγκύλη είναι όντως αρνητικός. Συνεπώς, το όριο στη σχέση (5) ισούται τελικά με $+\infty$. Ισχύει επίσης

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x}=g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda). \quad (6)$$

Από τις (5), (6) και από τον ορισμό της φ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}\varphi(x)=+\infty$. Συνεπώς, ισχύει $\varphi(x)>0$ για $x>2$ και για x κοντά στο 2. Άρα υπάρχει $x_1>2$, κοντά στο 2, τέτοιο, ώστε $\varphi(x_1)>0$. Συνεχίζουμε τώρα με το πλευρικό όριο, καθώς $x\to 3^-$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x}\left(g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)\right)=(-\infty)\cdot\left(g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)\right), \quad (1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x}=+\infty$. Αφού $\lambda\in(-1,0)$, ισχύει $\eta\mu\lambda<0$. Γνωρίζουμε επίσης από τη σελ. 52 του σχολικού βιβλίου ότι $|\eta\mu\lambda|<|\lambda|$. Σημειώνουμε ότι η ανισότητα είναι γνήσια, καθώς η ισότητα θα ίσχυε μόνο αν $\lambda=0$, κάτι που εδώ δεν ισχύει. Συνεπώς, προκύπτει η εξής συνεπαγωγή:

$$|\eta\mu\lambda|<|\lambda| \overset{\lambda,\eta\mu\lambda<0}{\Leftrightarrow} -\eta\mu\lambda<-\lambda \Leftrightarrow \eta\mu\lambda>\lambda$$
$$\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(\eta\mu\lambda)<g(\lambda)\Leftrightarrow g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)<0.$$

Επομένως, εφόσον ο παραπάνω παράγοντας είναι αρνητικός, το όριο στη σχέση (7) είναι ίσο με $+\infty$. Ισχύει επίσης

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\ln(x-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x-2}\right)=\ln 1\cdot\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{1}=0.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει ότι $\lim_{x\to 3^-}\varphi(x)=-\infty$. Συνεπώς, ισχύει $\varphi(x)<0$ για $x<3$ και για x κοντά στο 3. Άρα υπάρχει $x_2<3$, κοντά στο 3, ώστε $\varphi(x_2)<0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset(2,3)$ ως πράξη συνεχών. Επιπλέον, είδαμε ότι $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subset(2,3)$ τέτοιο, ώστε

$$\boxed{\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow \ln(x_0-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x_0-2}+\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x_0}=2024,}$$

όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in(0,+\infty)$ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1/2$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$. Από το θεώρημα Fermat έπεται ότι $f'(1/2)=0$. Ισχύει όμως

$$f'(x)=2+\frac{\kappa}{2x}-\frac{1}{x^2},$$

άρα προκύπτει η ισοδυναμία

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2+\frac{\kappa}{2\cdot\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0\ \Leftrightarrow 2+\kappa-4=0\ \boxed{\Leftrightarrow \kappa=2.}$$

Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=2+\frac{2}{2x}-\frac{1}{x^2}=\left(2x+\ln 2x+\frac{1}{x}\right)'$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι $f(x)=2x+\ln 2x+\frac{1}{x}+c$ για κάθε $x>0$.

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι $f\left(\frac{1}{2}\right)=5$, άρα, αντικαθιστώντας $x=\frac{1}{2}$ στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε ότι

$$1+\ln 1+2+c=5 \Leftrightarrow c=2.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\boxed{f(x)=2x+\ln 2x+\frac{1}{x}+2 \text{ για κάθε } x>0\,.}$$

Γ2. Από το Ερώτημα Γ1 έχουμε

$$f'(x)=2+\frac{2}{2x}-\frac{1}{x^2}=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2+x-1}{x^2}.$$

για κάθε $x>0$. Το πρόσημο της f' θα είναι λοιπόν το ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $2x^2+x-1$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9>0,$$

άρα οι ρίζες του είναι

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1-3}{4}=-1\,.$$

Άρα, με βάση την κλασική θεωρία για το πρόσημο του τριωνύμου, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Όμως η f ορίζεται μόνο για $x>0$, άρα θα κρατήσουμε μόνο ένα μέρος του παραπάνω πίνακα. Η μονοτονία της f φαίνεται λοιπόν παρακάτω:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\equiv\left(\frac{1}{2},5\right)$. Πράγματι, αν $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ τότε $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Αντίστοιχα, αν $x\geq\frac{1}{2}$ τότε $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Άρα, για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq f(0)$.

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, τότε θα ισχύει για το σύνολο τιμών της ότι

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=(5,+\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το όριο, καθώς $x\to\frac{1}{2}^-$, υπολογίζεται άμεσα λόγω της συνέχειας της f σε αυτό το σημείο:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=5.$$

- Το όριο, καθώς $x\to0^+$, γράφεται ως

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[2x+\ln2x+\frac{1}{x}+2\right].\quad(1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ορίου, παρατηρούμε αρχικά ότι $\lim\limits_{x\to0^+}(2x+2)=2$. Οι ενδιαφέροντες όροι είναι οι $\ln2x$ και $\frac{1}{x}$, καθώς ο πρώτος τείνει στο $-\infty$ και ο δεύτερος στο $+\infty$ και έτσι δημιουργείται απροσδιόριστη μορφή. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to0^+}\left(\ln2x+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(x\ln2x+1),\quad(2)$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του πρώτου όρου στην παρένθεση. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\lim_{x\to0^+}(x\cdot\ln2x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln2x}{\frac{1}{x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln2x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{2x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $-\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το όριο στη σχέση (2) ισούται με $(+\infty)\cdot(0+1)=+\infty$, άρα και το όριο στη σχέση (1) ισούται με $+\infty$.

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι πράγματι $f(\Delta_1)=(5,+\infty)$. Στο διάστημα Δ_2 η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε θα ισχύει για το σύνολο τιμών της ότι

$$f(\Delta_2)=\left[f(1/2),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[5,+\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα το όριο υπολογίστηκε ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+\ln 2x+\frac{1}{x}+2\right]=(+\infty)+(+\infty)+0+2=+\infty.$$

Η δοσμένη εξίσωση μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως

$$2\xi^2+\xi\ln 2\xi+1=2022\xi \overset{:\xi}{\Leftrightarrow} 2\xi+\ln 2\xi+\frac{1}{\xi}=2022$$

$$\Leftrightarrow 2\xi+\ln 2\xi+\frac{1}{\xi}+2=2024 \Leftrightarrow f(\xi)=2024,$$

όπου στο πρώτο βήμα η διαίρεση με ξ είναι επιτρεπτή, καθώς γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι $\xi>\frac{1}{2}$. Ισχύει ότι $2024\in f(\Delta_2)$, επομένως υπάρχει $\xi\in\Delta_2=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ για το οποίο $f(\xi)=2024$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2, το ξ θα είναι το μοναδικό στο Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα. Τέλος, ισχύει ότι $\xi>\frac{1}{2}$ αφού $f\left(\frac{1}{2}\right)=5\neq 2024$.

Γ3. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της g. Ισχύει $g(x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$, όπου $h(x)=\dfrac{1}{2e^{x-3}}$. Έτσι, το πεδίο ορισμού της g δίνεται ως εξής:

$$\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ \dfrac{1}{2e^{x-3}}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},$$

άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g=\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε από προηγούμενα ερωτήματα ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq 5$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(h(x))\geq 5$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$h(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2e^{x-3}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x-3}=1\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3.$$

Επομένως, η g παρουσιάζει ολικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο στο σημείο $B(3,5)$.

Γ4. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(1/2,5)$ και η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $B(3,5)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι ίσος με

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-5}{3-\frac{1}{2}}=0,$$

άρα η εξίσωση αυτής της ευθείας είναι

$$y-y_A=0\cdot(x-x_A)\Leftrightarrow y=5.$$

Όμως οι ευθείες $y=-2$, $y=5$ είναι και οι δύο παράλληλες στον άξονα $x'x$ ως οριζόντιες, άρα είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον $5f^4(x)+10\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης, η συνάρτηση $5f^4(x)+10$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων. Συνεπώς, από την ισότητα

$$f'(x)=\frac{22}{5f^4(x)+10}$$

προκύπτει ότι η f' είναι ίση με μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f' είναι και η ίδια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Για τη δεύτερη παράγωγό της ισχύει μάλιστα

$$\boxed{f''(x)=\left(\frac{22}{5f^4(x)+10}\right)'=\frac{-110f^3(x)f'(x)}{\left(5f^4(x)+10\right)^2}\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\,.}\quad(1)$$

Δ2. Επειδή $f'(x)=\dfrac{22}{5f^4(x)+10}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1». Για να προσδιορίσουμε τα σημεία καμπής, θα βρούμε το πρόσημο της f'' και τα σημεία μηδενισμού της. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\frac{-110f^3(x)f'(x)}{\left(f^4(x)+2\right)^2}>0$$

$$\overset{f'>0}{\Leftrightarrow} -110f^3(x)>0 \Leftrightarrow f^3(x)<0$$

$$\Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο παρονομαστής, όπως και η f', παίρνει μόνο θετικές τιμές. Με εντελώς όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $f''(x)<0$ για $x>0$ και ότι η μοναδική ρίζα της f'' είναι η $x=0$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $\boxed{O(0,f(0))\equiv(0,0).}$

Δ3. **i.** Η ισότητα $f'(x)=\dfrac{22}{5f^4(x)+10}$ ισοδύναμα γράφεται

$$5f^4(x)f'(x)+10f'(x)=22 \Leftrightarrow \left(f^5(x)+10f(x)\right)'=(22x)'$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι

$$f^5(x)+10f(x)=22x+c,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Αντικαθιστώντας $x=0$ στην παραπάνω ισότητα, παίρνουμε ότι

$$0+10\cdot0=22\cdot0+c,$$

οπότε $c=0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f^5(x)+10f(x)=22x.} \quad (2)$$

ii. Για $x=1$, η σχέση (2) δίνει ότι $f^5(1)+10f(1)=22$. Θα συνεχίσουμε με απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $f(1)\leq1$, τότε θα ίσχυε επίσης ότι $f^5(1)\leq1$ και $10f(1)\leq10$. Με πρόσθεση κατά μέλη, αυτές οι δύο σχέσεις δίνουν

$$f^5(1)+10f(1)\leq11 \Leftrightarrow 22\leq11,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα πρέπει να ισχύει αναγκαστικά $f(1)>1$. Όπως είδαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα για κάθε $x>1$ έχουμε $f(x)>1$, οπότε $f^5(x)>f(x)$. Έπεται ότι $f^5(x)+10f(x)<f^5(x)+10f^5(x)$, άρα η (2) δίνει

$$22x<11f^5(x)\Rightarrow 2x<f^5(x)\Rightarrow \sqrt[5]{2x}<\sqrt[5]{f^5(x)}\Rightarrow f(x)>\sqrt[5]{2x},$$

όπως θέλαμε. Σημειώνουμε ότι για $x>1$ επιτρέπεται να βάλουμε το $f^5(x)$ μέσα στη ρίζα, καθώς ισχύει $f(x)>1$ για κάθε $x>1$. Καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{2x}=+\infty$ και καθώς η $f(x)$ είναι μεγαλύτερη από $\sqrt[5]{2x}$ για $x>1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty. \qquad (3)$$

Για $x=-1$, η σχέση (2) δίνει ότι $f^5(-1)+10f(-1)=-22$. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $f(1)\geq -1$, τότε θα ίσχυε και ότι $f^5(-1)\geq -1$ και επίσης $10f(-1)\geq -10$. Με πρόσθεση κατά μέλη, αυτές οι δύο σχέσεις δίνουν

$$f^5(-1)+10f(-1)-11\Leftrightarrow -22\geq -11,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει να ισχύει αναγκαστικά ότι $f(-1)<-1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για $x<-1$ έχουμε $f(x)<f(-1)<-1$. Η σχέση $f(x)<-1$ συνεπάγεται ότι $f^5(x)<f(x)$ για κάθε $x<-1$. Πράγματι, η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$f^5(x)<f(x)\Leftrightarrow f(x)\left(f^4(x)-1\right)<0,$$

το οποίο ισχύει διότι ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός και ο δεύτερος θετικός. Το γεγονός ότι ο δεύτερος παράγοντας είναι θετικός προκύπτει από τη συνεπαγωγή

$$f(x)\langle -1\Rightarrow |f(x)|\rangle 1\Rightarrow |f(x)|^4>1\overset{|\theta|^4=\theta^4}{\Rightarrow} f^4(x)>1.$$

Από τη σχέση $f^5(x)<f(x)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^5(x)+10f(x)>f^5(x)+10f^5(x)&\overset{(2)}{\Rightarrow} 22x>11f^5(x)\\ &\Rightarrow f^5(x)<2x\Rightarrow -f^5(x)>-2x\\ &\Rightarrow \sqrt[5]{-f^5(x)}>\sqrt[5]{-2x}\Leftrightarrow f(x)<-\sqrt[5]{-2x}.\end{aligned}$$

Στο τρίτο βήμα πολλαπλασιάσαμε με -1 για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη ρίζα στη συνέχεια, καθώς οι όροι $f^5(x)$ και $2x$ είναι αρνητικοί για $x<-1$, ενώ οι όροι $-f^5(x)$ και $-2x$ είναι θετικοί.

Ισχύει όμως $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt[5]{-2x}=-\infty$, άρα, αφού η $f(x)$ είναι ακόμη μικρότερη από $-\sqrt[5]{-2x}$ για $x<-1$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty. \quad (4)$$

iii. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, για το σύνολο τιμών της θα ισχύει

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)\overset{(3),\,(4)}{=}(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Επειδή η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Για τον τύπο της αντίστροφης, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2) και την ισοδυναμία

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y),$$

η οποία ισχύει για κάθε συνάρτηση και την αντίστροφή της. Με χρήση αυτής της ισοδυναμίας, η σχέση (2) δίνει ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$y^5+10y=22f^{-1}(y)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{22}\left(y^5+10y\right).$$

Αλλάζοντας απλώς τη μεταβλητή από y σε x, προκύπτει ότι

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{22}\left(x^5+10x\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases},$$

για $x\in D_f\cap D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$. Έπεται από τη δεύτερη σχέση ότι $f(y)=x$. Προσθέτοντας κατά μέλη αυτήν την ισότητα με την πρώτη σχέση του συστήματος, παίρνουμε ότι $y+f(y)=x+f(x)$. Επομένως, το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y+f(y)=x+f(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ h(y)=h(x) \end{cases}.$$

όπου έχουμε ορίσει $h(x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, είναι άμεσο ότι

$$x_1+f(x_1)<x_2+f(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2).$$

Έτσι, τελικά το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ h(y)=h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y=x \end{cases},$$

απ' όπου προκύπτει ότι $f^{-1}(x)=x$. Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ λύνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{22}(x^5+10x)=x \ &\Leftrightarrow x^5+10x=22x \\ &\Leftrightarrow x^5-12x=0 \ \Leftrightarrow x(x^4-12)=0 \\ &\boxed{\Leftrightarrow x=0 \ \text{ή} \ x=\pm\sqrt[4]{12}.} \end{aligned}$$

Επομένως, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι τα σημεία

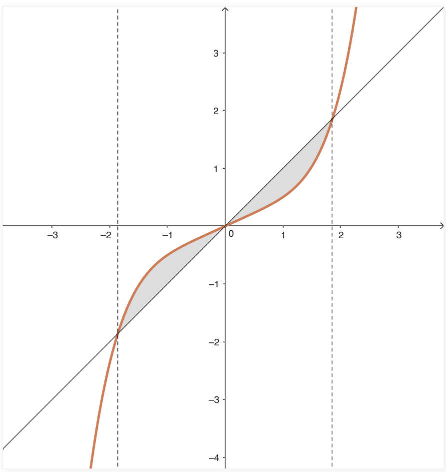
$$A\left(-\sqrt[4]{12},-\sqrt[4]{12}\right),\ O(0,0),\ B\left(\sqrt[4]{12},\sqrt[4]{12}\right).$$

Δ4. Τα σημεία τομής των $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y=x$ είναι τα σημεία A,O,B του προηγούμενου ερωτήματος, αφού αυτά προέκυψαν ακριβώς από τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x)=x$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τη σχέση

$$E=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{\sqrt[4]{12}}\left|f^{-1}(x)-x\right|dx=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{\sqrt[4]{12}}\left|\varphi(x)\right|dx,$$

όπου

$$\begin{aligned}\varphi(x)={}^{-1}(x)-x&=\frac{1}{22}(x^5+10x)-x \\ &=\frac{1}{22}(x^5+10x-22x) \\ &=\frac{1}{22}(x^5-12x).\end{aligned}$$



Σύμφωνα με το Ερώτημα Δ3iii, η φ έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς $x=0$

και $x=\pm\sqrt[4]{12}$. Επομένως, λόγω συνέχειας, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\sqrt[4]{12},0\right)$ και $\left(0,\sqrt[4]{12}\right)$, καθώς δεν έχει ρίζες σε αυτά. Ο αριθμός -1 ανήκει στο πρώτο διάστημα και ισχύει

$$\varphi(-1)=\frac{1}{22}\left[(-1)^5-12\cdot(-1)\right]=\frac{1}{22}(-1-12)=\frac{1}{2},$$

άρα, λόγω της διατήρησης προσήμου, έπεται ότι $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\sqrt[4]{12},0\right)$. Ομοίως, ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα $\left(0,\sqrt[4]{12}\right)$ και ισχύει

$$\varphi(1)=\frac{1}{22}\left(1^5-12\cdot 1\right)=\frac{1}{22}\cdot(-11)=-\frac{1}{2},$$

άρα, λόγω της διατήρησης προσήμου, έπεται ότι $\varphi(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\sqrt[4]{12}\right)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{\sqrt[4]{12}}|\varphi(x)|dx=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{0}|\varphi(x)|dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{12}}|\varphi(x)|dx=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{0}\varphi(x)dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{12}}-\varphi(x)dx.$$

Από τον ορισμό της φ, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\frac{1}{22}\left(\int_{-\sqrt[4]{12}}^{0}(x^5-12x)dx-\int_{0}^{\sqrt[4]{12}}(x^5-12x)dx\right)=\frac{1}{22}\left(\left[\frac{x^6}{6}-6x^2\right]_{-\sqrt[4]{12}}^{0}-\left[\frac{x^6}{6}-6x^2\right]_{0}^{\sqrt[4]{12}}\right)$$

$$=\frac{1}{22}\left(-\frac{\sqrt[4]{12}^6}{6}+6\cdot\sqrt[4]{12}^2-\frac{\sqrt[4]{12}^6}{6}+6\cdot\sqrt[4]{12}^2\right)$$

$$=\frac{1}{11}\left(6\sqrt{12}-\frac{\sqrt{12}^3}{6}\right)=\frac{1}{11}\left(6\sqrt{12}-\frac{12\sqrt{12}}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{11}\cdot 4\sqrt{12}$$

$$\boxed{=\frac{8\sqrt{3}}{11}\text{ τετραγωνικές μονάδες.}}$$

Διαγώνισμα 4.15

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 217.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,\pi/2]$, έπεται ότι

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \kappa+1=-\kappa^2+1\Leftrightarrow \kappa^2+\kappa=0$$
$$\Leftrightarrow \kappa(\kappa+1)=0 \Leftrightarrow \kappa=0 \text{ ή } \kappa=-1$$

Δίνεται όμως στην εκφώνηση ότι $\kappa\neq 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\kappa=-1.}$ Γι' αυτήν την τιμή του κ, η f πράγματι ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα έπονται από το γεγονός ότι η f είναι πράξη συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, ενώ η ισότητα των τιμών στα άκρα του διαστήματος έπεται από την παραπάνω ισοδυναμία.

Β2. Το θεώρημα Rolle εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον ενός $\xi\in(0,\pi/2)$ τέτοιου, ώστε $f'(\xi)=0$. Αυτό το ερώτημα ουσιαστικά μας ζητάει να προσδιορίσουμε αυτό το σημείο ξ. Θα λύσουμε λοιπόν την εξίσωση $f'(x)=0$. Αφού $\kappa=-1$, προκύπτει ότι

$$f(x)=-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1$$

για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$. Ειδικότερα, στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι η ισοδυναμία

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x.$$

Αφού $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, το $\sigma\upsilon\nu x$ είναι θετικός αριθμός, οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $\sigma\upsilon\nu x$. Τότε, αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Επειδή η $\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, η μοναδική λύση της εξίσωσης θα είναι η $x=\frac{\pi}{4}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\xi=\dfrac{\pi}{4}$.

2ος τρόπος για την τελευταία εξίσωση:

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x=1$ γράφεται στη μορφή $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Σύμφωνα με τη θεωρία για την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων (Άλγεβρα Β΄ Λυκείου), αυτή η εξίσωση έχει ρίζες όλους τους αριθμούς της μορφής $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, μπορούμε να βρούμε τις αποδεκτές τιμές του κ ως εξής:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\kappa<\frac{1}{4}$$

Επειδή όμως $\kappa\in\mathbb{Z}$, θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\kappa=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι $x=\frac{\pi}{4}$ και καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με προηγουμένως.

B3. **i.** Ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0-1=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα εφαρμόστηκαν οι ισότητες που υπάρχουν στο τέλος της σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

ii. Ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)}{4x-\pi}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{4x-\pi}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

όπου στη δεύτερη ισότητα εφαρμόστηκε ο κανόνας De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

B4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και ισχύει

$$f''(x)=(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x.$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα υπολογιστεί με παραγοντική ολοκλήρωση. Ισχύει λοιπόν

$$\begin{aligned}
I=\int_0^{\pi/2} e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)dx &=\int_0^{\pi/2}(e^x)'(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)dx\\
&=\left[e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2} e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)'dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\int_0^{\pi/2} e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\int_0^{\pi/2}(e^x)'(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\left[e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2} e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\left(e^{\pi/2}(-1+0)-1\right)-I\\
&=e^{\pi/2}-1+e^{\pi/2}+1-I=2e^{\pi/2}-I
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{I=2e^{\pi/2}-I\Leftrightarrow 2I=2e^{\pi/2}\Leftrightarrow I=e^{\pi/2}.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για τον άξονα $y'y$ αρκεί να θέσουμε $x=0$ στον τύπο της f. Ισχύει

$$f(0)=(1-0)e^0=1$$

επομένως το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,1)$. Για τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)=0\Leftrightarrow(1-x)e^2=0\overset{e^2\neq 0}{\Leftrightarrow}1-x=0\Leftrightarrow x=1.$$

Επομένως, το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $\boxed{B(1,0).}$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
f'(x)=\left((1-x)e^{2x}\right)' &=(1-x)'e^{2x}+(1-x)\left(e^{2x}\right)'\\
&=-e^{2x}+2(1-x)e^{2x}=e^{2x}(-1+2-2x)=e^{2x}(1-2x).
\end{aligned}$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $f'(x)$ είναι θετική όταν

$$1-2x>0 \Leftrightarrow 2x<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}.$$

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι $f'(x)<0$ για $x>\frac{1}{2}$ και $f'(x)=0$ για $x=\frac{1}{2}$.
Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=\frac{1}{2}$ την τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{1}=\frac{e}{2}$.
  Πράγματι, αν $x\leq\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, ενώ, αν $x\geq\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Για να μελετήσουμε την f ως προς την κυρτότητα, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγό της. Αυτό είναι επιτρεπτό, διότι η $f'(x)=e^{2x}(1-2x)$ είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει

$$f''(x)=\left(e^{2x}(1-2x)\right)'=2e^{2x}(1-2x)-2e^{2x}=2e^{2x}(1-2x-1)=-4xe^{2x}.$$

Ο παράγοντας e^{2x} είναι θετικός για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, οπότε το πρόσημο της f'' εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του παράγοντα x. Θα είναι μάλιστα αντίθετο από αυτό του παράγοντα x, λόγω του "$-$" που εμφανίζεται μπροστά. Με άλλα λόγια, ισχύει $f''(x)>0$ για $x<0$ και $f''(x)<0$ για $x>0$. Επίσης, η f' μηδενίζεται για $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

- Η f' είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $A(0,1)$.

Γ3. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ακολούθως, θα αναζητήσουμε τις πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και το $+\infty$.
Αρχικά, για το $+\infty$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{2x} = -\infty.$$

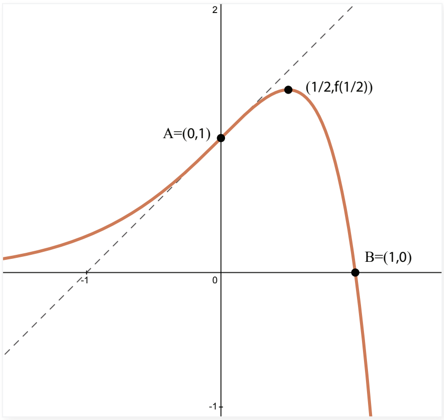
Επομένως, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)e^{2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{2x}\right] = -\infty,$$

οπότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Στη συνέχεια, για το $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)}{e^{-2x}} \overset{u=-x}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{1+u}{e^{2u}} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{2e^{2u}}\right) = 0,$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Με βάση τις πληροφορίες για τα σημεία τομής με τους άξονες, τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα. Εκτός των άλλων, έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα και την εφαπτομένη στο σημείο καμπής $A(0,1)$, έτσι ώστε να καταδείξουμε ότι «διαπερνά» τη C_f (χαρακτηριστική ιδιότητα του σημείου καμπής).



Γ4. Για κάθε $x\le 0$ ισχύει προφανώς και ότι $x<1$, επομένως $1-x>0$. Επίσης, ισχύει $e^{2x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=(1-x)e^{2x}>0$ για κάθε $x\le 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$E(\lambda) = \int_\lambda^0 |f(x)|dx = \int_\lambda^0 f(x)dx = \int_\lambda^0 (1-x)e^{2x}dx$$

$$= \int_\lambda^0 (1-x)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \left[\frac{(1-x)e^{2x}}{2}\right]_\lambda^0 - \int_\lambda^0 (1-x)'\frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda)e^{2\lambda}}{2} + \int_\lambda^0 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda)e^{2\lambda}}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_\lambda^0$$

$$=\frac{1-(1-\lambda)e^{2\lambda}}{2}+\frac{1-e^{2\lambda}}{4}=\frac{3-2(1-\lambda)e^{2\lambda}+e^{2\lambda}}{4}=\boxed{\frac{3+(2\lambda-3)e^{2\lambda}}{4}.}$$

Συνεπώς,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\mathrm{E}(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(2\lambda-3)e^{2\lambda}\right)\quad(1)$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\left[(2\lambda-3)e^{2\lambda}\right]=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{(2\lambda-3)}{e^{-2\lambda}}\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{-2u-3}{e^{2u}}$$

$$\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}-\frac{2}{2e^{2u}}=\lim_{u\to+\infty}-\frac{1}{e^{2u}}=0.$$

Επομένως, από τη σχέση (1), έπεται ότι $\boxed{\lim_{\lambda\to-\infty}\mathrm{E}(\lambda)=\frac{3}{4}.}$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\right)'=\left(x^{\kappa}\right)'(1-x)^{\lambda}+x^{\kappa}\left((1-x)^{\lambda}\right)'$$

$$=\kappa x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda}+\lambda x^{\kappa}(1-x)^{\lambda-1}(1-x)'=\kappa x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda}-\lambda x^{\kappa}(1-x)^{\lambda-1}$$

$$=x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}\left(\kappa(1-x)-\lambda x\right)=x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}(\kappa-\kappa x-\lambda x)$$

$$=x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}\left(\kappa-x(\kappa+\lambda)\right).$$

Ο πρώτος και ο δεύτερος παράγοντας είναι θετικοί στο $(0,1)$. Επομένως, το πρόσημο της f' στο $(0,1)$ εξαρτάται μόνο από τον τρίτο παράγοντα. Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\kappa-x(\kappa+\lambda)>0\Leftrightarrow x(\kappa+\lambda)<\kappa$$

$$\overset{\kappa+\lambda>0}{\Leftrightarrow}x<\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}.$$

Σημειώνουμε ότι ο $\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$ ανήκει στο $(0,1)$, καθώς οι κ,λ έχουν υποτεθεί θετικοί (και έτσι ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή –και προφανώς είναι και οι δύο θετικοί). Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f'(x)<0$ για $1>x>\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$. Θα βρούμε, τέλος, τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου, στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}\left(\kappa-x(\kappa+\lambda)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$$

Ο μηδενισμός της f' στα άκρα του διαστήματος δεν είναι στην πραγματικότητα τόσο σημαντικός όσον αφορά τη μονοτονία. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	$\kappa/(\kappa+\lambda)$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right]$.

- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$ με τιμή

$$f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^{\kappa}\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^{\lambda}.$$

Πράγματι, αν $x\in\left[0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$, τότε $f(x)\le f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$, ενώ, αν $x\in\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right]$, τότε $f(x)\le f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right]$. Επομένως, για κάθε $x[0,1]$ ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)$.

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα σημεία $x_1=0$ και $x_2=1$ με τιμή $f(0)=f(1)=0$.

Σημείωση:

Το γεγονός ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στα άκρα του διαστήματος δεν οφείλεται στον μηδενισμό της f' στα άκρα. Στην πραγματικότητα, για οποιαδήποτε συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό (ή ημι-ανοιχτό) διάστημα, πρέπει να ελέγχουμε τις τιμές στα άκρα όταν κάνουμε εντοπισμό των ακροτάτων. Αυτό αναφέρεται ξεκάθαρα στα σχόλια της σελ. 146 του σχολικού βιβλίου. Δείτε και τη συζήτηση εκεί για περισσότερες λεπτομέρειες.

Δ2. Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, ισχύει $f(0)=f(1)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Για την ακρίβεια, αυτά τα συμπεράσματα είναι άμεσα κατευθείαν από τον τύπο της f, χωρίς τη χρήση του προηγούμενου ερωτήματος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g=(0,1)$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Παραπάνω, σχολιάσαμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in A_g$. Άρα το πρόσημο της g' είναι ίδιο με το πρόσημο της f', το οποίο έχουμε προσδιορίσει στο Δ1. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		$\kappa/(\kappa+\lambda)$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Λόγω συνέχειας της g, προκύπτει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right)$. Για το σύνολο τιμών της, ισχύουν λοιπόν τα εξής:

- Εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$, έπεται ότι

$$g\left(\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]\right)=\left(\lim_{x\to0^+}g(x),g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\right]. \qquad (1)$$

Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(0)=0$, άρα, λόγω συνέχειας, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$. Ισχύει επίσης $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)\overset{u=f(x)}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Είδαμε επίσης ότι

$$f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^{\kappa}\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^{\lambda},$$

άρα

$$g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\ln\left[\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^{\kappa}\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^{\lambda}\right]=\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (1) ότι

$$g\left(\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]\right)=\left(-\infty,\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)\right] \quad (2)$$

- Εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\left[\kappa/(\kappa+\lambda),1\right)$, έπεται ότι

$$g\left(\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right)\right)=\left(\lim_{x\to 1^-} g(x),g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\right]. \quad (3)$$

Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(1)=0$, άρα, λόγω συνέχειας, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=0$. Ισχύει επίσης $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln f(x)\overset{u=f(x)}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Είδαμε επίσης προηγουμένως ότι

$$g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (3) ότι

$$g\left(\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right)\right)=\left(-\infty,\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)\right]. \quad (4)$$

Προκύπτει τελικά από τις (3), (4) ότι το σύνολο τιμών της g είναι το

$$\boxed{g((0,1))=\left(-\infty,\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)\right].}$$

Μένει να δείξουμε ότι η g είναι κοίλη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A_g$ ισχύει $x>0$ και $1-x>0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε την g ισοδύναμα στη μορφή

$$g(x)=\ln f(x)=\ln\left(x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\right)=\ln x^{\kappa}+\ln(1-x)^{\lambda}=\kappa \ln x+\lambda \ln(1-x).$$

Όπως έχουμε αναφέρει, η g είναι παραγωγίσιμη και, με βάση την τελευταία έκφραση, η παράγωγός της είναι ίση με

$$g'(x)=\frac{\kappa}{x}+\frac{\lambda}{1-x}(1-x)'=\frac{\kappa}{x}-\frac{\lambda}{1-x}.$$

Και αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και ισχύει

$$g''(x)=-\frac{\kappa}{x^2}+\frac{\lambda}{(1-x)^2}\cdot(1-x)'=-\frac{\kappa}{x^2}-\frac{\lambda}{(1-x)^2}.$$

Εφόσον $\kappa,\lambda>0$, έπεται ότι $g''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η g είναι κοίλη.

Δ3. Θέτουμε $u=1-x$, όπως ακριβώς υποδεικνύεται και στην εκφώνηση. Τότε, ισχύει $du=-dx$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$ έχουμε $u=1-0=1$.
- Για $x=1$ έχουμε $u=1-1=0$.

Τέλος, εφόσον $u=1-x$, θα ισχύει $x=1-u$. Επομένως, το πρώτο μέλος της δοσμένης ισότητας γράφεται στη μορφή

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\,dx=\int_1^0(1-u)^{\kappa}u^{\lambda}(-du)$$
$$=\int_0^1(1-u)^{\kappa}u^{\lambda}du=\int_0^1 u^{\lambda}(1-u)^{\kappa}du.$$

Όπως έχουμε δει ξανά, η μεταβλητή ολοκλήρωσης δεν είναι παρά ένα σύμβολο. Για παράδειγμα, τα ολοκληρώματα $\int_0^1 f(x)dx, \int_0^1 f(u)du$ και $\int_0^1 f(t)dt$ έχουν όλα ακριβώς το ίδιο νόημα.

Αλλάζοντας ξανά τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από u σε x, παίρνουμε απευθείας το ζητούμενο.

Δ4. Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Δ3, με $\kappa=1$ και $\lambda=10$. Σύμφωνα λοιπόν με το Δ3, ισχύει

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}dx=\int_0^1 x^1(1-x)^{10}dx=\int_0^1 x^{10}(1-x)^1 dx$$
$$=\int_0^1\left(x^{10}-x^{11}\right)dx=\left[\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{12}}{12}\right]_0^1=\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\boxed{=\frac{1}{132}}.$$

Διαγώνισμα 4.16

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 157 (συζήτηση μετά από το θεώρημα).

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 23.

Α3. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Θεωρούμε για παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

Η f είναι «1-1» διότι καμία οριζόντια ευθεία δεν τέμνει τη γραφική της παράσταση πάνω από μία φορά. Δείτε την αντίστοιχη συζήτηση στις σελ. 34-35 του σχολικού βιβλίου.

ii. Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, ανεξαρτήτως προσήμου.

iii. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116-117.

iv. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 212.

v. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει άπειρες θέσεις ολικού μεγίστου, και συγκεκριμένα όλες τις θέσεις της μορφής $x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\int_0^1 xg(x)dx=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow\int_0^1 x\left(x^3-\alpha x\right)dx=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow\int_0^1\left(x^4-\alpha x^2\right)dx=-\frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x^5}{5}-\frac{\alpha x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{5}-\frac{\alpha}{3}=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow-\frac{\alpha}{3}=-\frac{15}{5}\ \boxed{\Leftrightarrow\alpha=9}$$

B2. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A_f(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο A_f ως ρητή. Η f είναι επίσης παραγωγίσιμη στο A_f και για κάθε $x\in A_f$ ισχύει

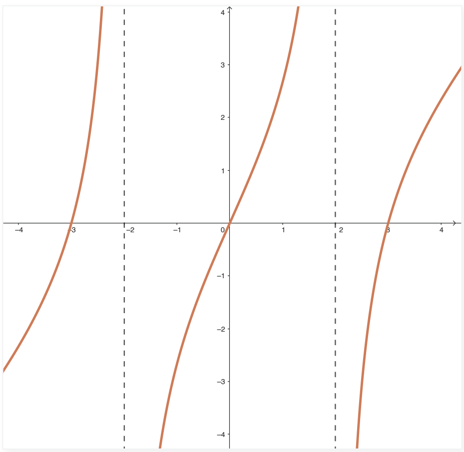
$$f'(x)=\frac{(3x^2-9)(x^2-4)-(x^3-9x)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{3x^4-12x^2-9x^2+36-2x^4+18x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-3x^2+36}{(x^2-4)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\neq\pm 2$, άρα δεν επηρεάζει το πρόσημο της παραγώγου. Βρίσκουμε το πρόσημο του αριθμητή. Θέτοντας $\omega=x^2\geq 0$, αυτός γράφεται ως $\omega^2-3\omega+36$. Αυτό είναι ένα τριώνυμο ως προς ω, με $\Delta=9-144=-135<0$. Προκύπτει έτσι ότι αυτό το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $\omega\geq 0$ (φυσικά και για κάθε $\omega<0$, αλλά από τον ορισμό της η μεταβλητή ω παίρνει μόνο θετικές τιμές). Προκύπτει λοιπόν έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$ $\quad$ -2		2 $\quad$ $+\infty$
x^4-3x^2+36	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2),(-2,2)$ και $(2,+\infty)$. Όπως έχουμε επισημάνει ξανά, αυτό δεν είναι αρκετό ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στην ένωση αυτών των διαστημάτων. Εξάλλου κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, όπως φαίνεται καθαρά από τη γραφική παράσταση της f.



B3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A_f ως ρητή και για κάθε $x \in A_f$ ισχύει

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-4)^2-(x^4-3x^2+36)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)((4x^3-6x)(x^2-4)-4x(x^4-3x^2+36)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4x^5-16x^3-6x^3+24x-4x^5+12x^3-144x}{(x^2-4)^3} = \frac{-10x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

όπου στο δεύτερο βήμα παραλείψαμε κάποιους απλούς υπολογισμούς χάριν συντομίας. Το πρόσημο της f'' εξαρτάται από δύο παράγοντες, το x στον αριθμητή και το x^2-4 στον παρονομαστή. Για το πρόσημο του παρονομαστή ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|<2$$

$$\Leftrightarrow x \in (-2,2).$$

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι ο παρονομαστής είναι θετικός για $x \in (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$. Η κυρτότητα της f φαίνεται λοιπόν στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-10x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-4		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(0,2)$ και κοίλη στα διαστήματα $(-2,0)$ και $(2,+\infty)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=\frac{9}{4}$, άρα η C_f έχει σημείο καμπής στη θέση $x_1=0$.

B4. Αναζητούμε αρχικά κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αυτό έχει νόημα να γίνει στα σημεία $x=2$ και $x=-2$, καθώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα πλευρικά όρια της f σε αυτά τα σημεία. Ισχύει

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-9x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\left(x^3-9x\right)\cdot\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)=0$ και $x^2-4<0$ κοντά στο 2 και αριστερά του 2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Σύμφωνα με τον ορισμό της ασύμπτωτης στη σελ. 161 του σχολικού βιβλίου, αρκεί να είναι το ένα πλευρικό όριο ίσο με $\pm\infty$ ώστε να χαρακτηριστεί η αντίστοιχη κατακόρυφη ευθεία ως ασύμπτωτη. Επομένως, στα παραπάνω δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το δεξί όριο, αλλά μας αρκεί μόνο το αριστερό. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και η ευθεία $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αναζητούμε στη συνέχεια πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x}{x^3-4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-9x}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x-x^3+4x}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x^2}=0,$$

επομένως η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$. Τέλος, εφόσον η C_f έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

B5. Ισχύει

$$\left|\eta\mu\left(x^4-13\right)\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot\left|\eta\mu\left(x^4-13\right)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\left(x^4-13\right)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\left(x^4-13\right)\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\quad(1)$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-9x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$$

Άρα από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu(x^4-13)}{f(x)} = 0.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Όπως γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου, δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών των ευθειών έχουν γινόμενο ίσο με -1. Σκοπός μας λοιπόν είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των δύο εφαπτόμενων, δηλαδή την παράγωγο της f στα δύο σημεία επαφής. Αρχικά όμως πρέπει να προσδιορίσουμε τα σημεία επαφής A, B. Λύνουμε λοιπόν την εξίσωση $f(x)=\kappa$ για να βρούμε τις τετμημένες των A, B.

$$\begin{aligned} f(x)=\kappa \Leftrightarrow |\ln(x-3)|+1=\kappa &\Leftrightarrow |\ln(x-3)|=\kappa-1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x_A-3)=\kappa-1 \quad \text{και} \quad \ln(x_B-3)=1-\kappa \\ &\Leftrightarrow x_A-3=e^{\kappa-1} \quad \text{και} \quad x_B-3=e^{1-\kappa} \\ &\Leftrightarrow x_A=e^{\kappa-1}+3 \quad \text{και} \quad x_B=e^{1-\kappa}+3, \end{aligned}$$

Άρα τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\kappa$ έχουν τετμημένες τις δύο παραπάνω λύσεις (και φυσικά έχουν κοινή τεταγμένη $y=\kappa$). Για ευκολία, εκτελούμε ένα ενδιάμεσο βήμα, την έκφραση του τύπου της f χωρίς απόλυτες τιμές. Αυτό το κάνουμε διότι, για να δείξουμε ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την παράγωγο f' και, για να το κάνουμε αυτό, θα πρέπει να απαλείψουμε τις απόλυτες τιμές. Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\ln(x-3)<0 \Leftrightarrow \ln(x-3)<\ln 1 \Leftrightarrow x-3<1 \Leftrightarrow x<4,$$

και

$$\ln(x-3)>0 \Leftrightarrow \ln(x-3)>\ln 1 \Leftrightarrow x-3>1 \Leftrightarrow x>4$$

Έτσι, ο τύπος της f γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(x)=\begin{cases}1-\ln(x-3), & 3<x<4\\ 1+\ln(x-3), & x\geq 4\end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(3,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(3,4)\cup(4,+\infty)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει μάλιστα

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-3}, & 3<x<4\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>4\end{cases}.$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $\kappa>1$, άρα

$$\kappa-1>0\Rightarrow e^{\kappa-1}>e^{0}\Rightarrow e^{\kappa-1}>1\Rightarrow e^{\kappa-1}+3>4\Leftrightarrow x_A>4.$$

Επομένως, βρίσκουμε την κλίση στο σημείο A μέσω του δεύτερου κλάδου της f':

$$f'(x_A)=f'\left(e^{\kappa-1}+3\right)=\frac{1}{e^{\kappa-1}+3-3}=\frac{1}{e^{\kappa-1}}.$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $x_B<4$, οπότε προσδιορίζουμε την κλίση στο B μέσω του πρώτου κλάδου της f':

$$f'(x_B)=f'\left(e^{1-\kappa}+3\right)=-\frac{1}{e^{1-\kappa}+3-3}=-\frac{1}{e^{1-\kappa}}.$$

Το γινόμενο των κλίσεων είναι ίσο με

$$f'(x_A)\cdot f'(x_B)=\frac{1}{e^{\kappa-1}}\cdot\left(-\frac{1}{e^{1-\kappa}}\right)=-\frac{1}{e^{\kappa-1+1-\kappa}}=-\frac{1}{e^{0}}=-1,$$

οπότε οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία A και B είναι κάθετες μεταξύ τους.

Γ2. Για τη μονοτονία της f αρκεί να μελετήσουμε το πρόσημο της f'. Υπενθυμίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-3}, & 3<x<4\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>4\end{cases}.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	3	4	$+\infty$
$x-3$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=4$ το $f(4)=1$. Πράγματι, αν $x\in(3,4]$, τότε $f(x)\geq f(4)$, καθώς f γνησίως φθίνουσα στο $(3,4]$, ενώ, αν $x\in[4,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(4)$, καθώς f γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>3$ έχουμε $f(x)\geq f(4)$.

Μελετάμε στη συνέχεια την f ως προς την κυρτότητα. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(3,4)\cup(4,+\infty)$, και εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-3)^2}, & 3<x<4\\ -\dfrac{1}{(x-3)^2}, & x>4\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x)>0$ για $x\in(3,4)$ και $f''(x)<0$ για $x\in(4,+\infty)$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	3	4	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	

Συγκεκριμένα, η f είναι κυρτή στο $(3,4]$ και κοίλη στο $[4,+\infty)$. Για να χαρακτηρίσουμε το $\Gamma(4,f(4))$ ως σημείο καμπής, θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο (δείτε τον ορισμό του σημείου καμπής στη σελ. 158 του σχολικού βιβλίου). Υπολογίζουμε λοιπόν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Ισχύει

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{1-\ln(x-3)-1}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{-\ln(x-3)}{x-4}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to4^-}\frac{-1/(x-3)}{1}=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\ln(x-3)}{x-4}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{x-3}=1.$$

Εφόσον τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=4$. Επομένως, δεν ορίζεται εφαπτόμενη της C_f σε αυτό το σημείο και επομένως δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως σημείο καμπής.

Γ3. Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε:

- Στα άκρα του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού που δεν είναι συνεχής.

Άρα θα εξετάσουμε αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στη θέση $x=3$. Υπολογίζουμε ένα από τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(1-\ln(x-3)\right)=+\infty.$$

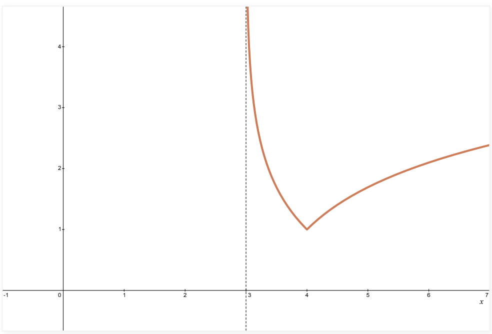
Άρα η ευθεία $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, αναζητούμε το όριο στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(1-\ln(x-3)\right)=+\infty,$$

επομένως δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για να προσδιορίσουμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες, υπολογίζουμε αρχικά το όριο $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$. Ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\ln(x-3)}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1/(x-3)}{1}=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Εφόσον το όριο είναι μηδενικό, η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. Με βάση τη μονοτονία, την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες που προσδιορίσαμε παραπάνω, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα.



Γ4. Όπως συμβαίνει με τα περισσότερα ολοκληρώματα λογαριθμικών συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με $E=\int_4^{2e}|f(x)|dx$. Για κάθε $x\in[4,2e]$ ισχύει $f(x)=1+\ln(x-3)>0$, άρα

$$E=\int_4^{2e}f(x)dx=\int_4^{2e}(1+\ln(x-3))dx=\int_4^{2e}1dx+\int_4^{2e}\ln(x-3)dx$$

$$=2e-4+\int_4^{2e}(x)'\ln(x-3)dx$$

$$=2e-4+\left[x\ln(x-3)\right]_4^{2e}-\int_4^{2e}\frac{x}{x-3}dx$$

$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-\int_4^{2e}\frac{x-3+3}{x-3}dx$$

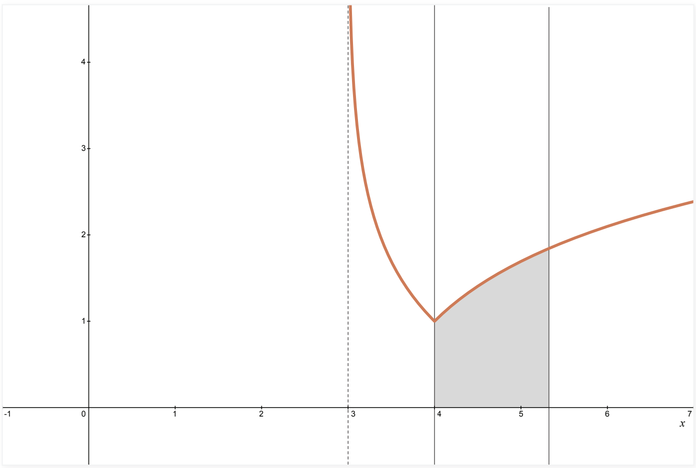
$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-\int_4^{2e}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)dx$$

$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-\left[x+3\ln(x-3)\right]_4^{2e}$$

$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-2e-3\ln(2e-3)+4$$

$$\boxed{=(2e-3)\ln(2e-3),\ \text{τετραγωνικές μονάδες}}$$

όπου η ολοκλήρωση κατά παράγοντες χρησιμοποιήθηκε στο τέταρτο βήμα. Παραθέτουμε παρακάτω ένα διάγραμμα που απεικονίζει το εν λόγω επίπεδο χωρίο.



ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Για κάθε $x\in[2,4]$ ισχύει

$$f(x)=\frac{6^{x-2}-6}{2^{x-2}}=\frac{6^{x-2}}{2^{x-2}}-\frac{6}{2^{x-2}}=3^{x-2}-6\cdot 2^{2-x}=\frac{3^x}{9}-24\cdot 2^{-x}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων και για κάθε $x\in[2,4]$ ισχύει

$$f'(x)=3^x\cdot\frac{\ln 3}{9}+24\ln 2\cdot 2^{-x}>0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\ln 2,\ln 3>0$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Δ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1», επομένως αντιστρέφεται. Ισχύει

$$f(4)=\frac{6^2-6}{2^2}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}.$$

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε $x\in A_f$ και $y\in A_{f^{-1}}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y).$$

Από αυτήν την ισοδυναμία και από τη σχέση $f(4)=\frac{15}{2}$ έπεται ότι $f^{-1}\left(\frac{15}{2}\right)=4$, όπως θέλαμε.

Δ3. Παρατηρούμε αρχικά ότι $f(3)=0$. Αυτή η παρατήρηση θα μας χρειαστεί αργότερα. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$2^{x-1}f^2(x)=15\cdot 6^{x-2}-90\Leftrightarrow 2\cdot 2^{x-2}f^2(x)=15\left(6^{x-2}-6\right)\Leftrightarrow 2f^2(x)=\frac{15\left(6^{x-2}-6\right)}{2^{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow 2f^2(x)=15f(x)\Leftrightarrow 2f^2(x)-15f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(2f(x)-15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0 \text{ ή } 2f(x)-15=0\Leftrightarrow f(x)=f(3) \text{ ή } f(x)=15/2$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(3) \text{ ή } f(x)=f(4)\ \boxed{\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=4}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι «1-1».

Δ4. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(2\int_3^4 f(t)dt-15\right)(x-3)^3-2x+8=0.$$

Ο «τρομακτικός» 1ος παράγοντας είναι απλώς ένας σταθερός αριθμός.

Θέτουμε

$$g(x)=\left(2\int_3^4 f(t)dt-15\right)(x-3)^3-2x+8 \text{ για } x\in[3,4].$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[3,4]$ ως πολυωνυμική.

- $g(3)=-6+8=2>0$.
- $g(4)=2\left(\int_3^4 f(t)dt-\dfrac{15}{2}\right)-8+8=2\left(\int_3^4 f(t)dt-\dfrac{15}{2}\right)$.

  Θα αποδείξουμε ότι $g(4)<0$. Καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, για $t\le 4$ ισχύει ότι $f(t)\le f(4)=15/2$. Μάλιστα, λόγω της μονοτονίας, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=4$. Για $t<4$ ισχύει η γνήσια ανισότητα $f(t)<15/2$. Επομένως, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει

$$\int_3^4 f(t)dt<\int_3^4\frac{15}{2}dt\Leftrightarrow\int_3^4 f(t)dt<\frac{15}{2}\Leftrightarrow\int_3^4 f(t)dt-\frac{15}{2}<0\Rightarrow g(4)<0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $g(3)g(4)<0$, άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Μένει να αποδείξουμε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της g. Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα. Ισχύει

$$g'(x)=3\left(2\int_3^4 f(t)dt-15\right)(x-3)^2-2.$$

Αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\int_3^4 f(t)dt-\frac{15}{2}<0$, οπότε προκύπτει άμεσα από την παραπάνω έκφραση ότι $g'(x)<0$ για κάθε $x\in[3,4]$. Επομένως, η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

Δ5. Ισχύει $(3^x)'=3^x\ln 3$, οπότε $3^x=\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}\right)'$. Ομοίως, $2^{-x}=\left(-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}\right)'$. Επομένως,

$$\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{3^x}{9}-24\cdot 2^{-x}\right)dx=\left[\frac{3^x}{9\ln 3}+\frac{24\cdot 2^{-x}}{\ln 2}\right]_3^4=\frac{3^4}{9\ln 3}+\frac{24\cdot 2^{-4}}{\ln 2}-\frac{3^3}{9\ln 3}-\frac{24\cdot 2^{-3}}{\ln 2}$$

$$=\frac{9}{\ln 3}+\frac{3}{2\ln 2}-\frac{3}{\ln 3}-\frac{6}{2\ln 2}=\frac{6}{\ln 3}-\frac{3}{2\ln 2}=\frac{6}{\ln 3}-\frac{3}{\ln 4}.$$

Στο Ερώτημα Δ4 αποδείξαμε όμως ότι $\int_3^4 f(x)dx < \frac{15}{2} < 10$, άρα από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$\boxed{\frac{6}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 4} < 10, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Δ6. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2f(\kappa) - 2f(\lambda) = 15 \Leftrightarrow f(\kappa) - f(\lambda) = \frac{15}{2}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[3,4]$, επομένως η τιμή $f(3) = 0 := f_{min}$ είναι το ολικό της ελάχιστο και η τιμή $f(4) = \frac{15}{2} = f_{max}$ είναι το ολικό της μέγιστο. Επομένως, η σχέση $f(\kappa) - f(\lambda) = \frac{15}{2} = f_{max} - f_{min}$ ισχύει μόνο αν $\kappa = 4$ και $\lambda = 3$.

$$+\left[\frac{8}{6} - \frac{1}{6}\right] - \int_1^2 x\ln x dx = \frac{2}{3} - \int_1^2 x\ln x dx$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που απομένει, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\int_1^2 x\ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Σε συνδυασμό με την παραπάνω ισότητα, προκύπτει ότι $\boxed{E = \frac{17}{12} - 2\ln 2.}$

Διαγώνισμα 4.17

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116.

A2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 140.

A3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

A4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Σχόλια για Σ/Λ:

i. Το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με $\int_{-2}^{2}\left|3x^3-2x\right|dx$. Για να ήταν ίσο με $\int_{-2}^{2}\left(3x^3-2x\right)dx$, όπως ισχυρίζεται η πρόταση, θα έπρεπε να ισχύει $3x^3-2x\geq 0$ για κάθε $x\in[-2,2]$, το οποίο δεν είναι αληθές. Για παράδειγμα, αυτή η παράσταση είναι αρνητική για $x=\frac{1}{2}$.

ii. Μπορεί το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ να μην υπάρχει. Δείτε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f(x)=|2x|/x$.

iii. Έπεται από την ιδιότητα 5 του θεωρήματος στη σελ. 48 του σχολικού βιβλίου.

iv. Δείτε το θεώρημα στη σελ. 156 του σχολικού βιβλίου.

v. Δείτε τις ιδιότητες στη σελ. 60 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>3$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{x-3}-1=\frac{1}{x-3}-\frac{x-3}{x-3}$$

$$=\frac{1-(x-3)}{x-3}=\frac{4-x}{x-3}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός διότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $(3,+\infty)$. Ο αριθμητής είναι θετικός όταν $4-x>0$, δηλαδή όταν $x\in(3,4)$. Αντίστοιχα, είναι αρνητικός όταν $x>4$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν $x \in (3,4]$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x \in [4,+\infty)$.

B2. Θεωρούμε τα υποσύνολα $A_1=(3,4]$ και $A_2=[4,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της f. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f \nearrow A_1$. Επίσης, είναι σαφές ότι η f είναι συνεχής. Άρα για την εικόνα αυτού του διαστήματος μέσω της f ισχύει

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 3^+} f(x), f(4)\right]=(-\infty,1],$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(4)=1$, καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(\ln(x-3)-x+5\right)=(-\infty)-3+5=-\infty.$$

Παρατηρούμε ότι $0\in f(A_1)$, επομένως υπάρχει $x_1\in(3,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το υποδιάστημα, το x_1 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα. Ισχύει μάλιστα $x_1\neq 4$, καθώς $f(4)=1\neq 0=f(x_1)$. Περνάμε τώρα στο διάστημα A_2. Σε αυτό, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε ισχύει

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(4)\right]=(-\infty,1], \quad (1)$$

όπου το όριο στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκε ως εξής: Αρχικά γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x-3)-x+5\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x-3)-\ln e^x+5\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x-3}{e^x}+5\right)=\ell. \quad (2)$$

Όλα εξαρτώνται λοιπόν από την ποσότητα $u=\dfrac{x-3}{e^x}>0$ με $x\geq 4$. Έτσι, υπολογίζουμε το όριο αυτής της ποσότητας. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\overset{1/+\infty}{=}0,$$

άρα το όριο στην ισότητα (2) ισούται με

$$\ell=\lim_{u\to 0}(\ln u+5)=(-\infty)+5=-\infty.$$

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται το τελευταίο βήμα της ισότητας (1). Παρατηρούμε τώρα ότι $0 \in f(A_2)$, επομένως υπάρχει $x_2 \in [4,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$. Καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2, αυτή η ρίζα είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

Αποδείξαμε λοιπόν μέχρι στιγμής ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 \in (3,4)$ και $x_2 \in [4,+\infty)$. Μένει να δείξουμε ότι $x_2 \in (5,7)$. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f. Παρατηρούμε ότι

$$f(7) = \ln(7-3) - 7 + 5 = \ln 4 - 2 = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\ln 2 < \ln e = 1$. Καθώς $f(x_2)=0$ και $f(7)<0$ και καθώς $7, x_2 \in A_2$, μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε

$$f(7) < f(x_2) \overset{f \searrow A_2}{\Rightarrow} 7 < x_2. \quad (3)$$

Δουλεύουμε στη συνέχεια με όμοιο τρόπο: Ισχύει

$$f(5) = \ln(5-3) - 5 + 5 = \ln 2 > 0,$$

και $5, x_2 \in A_2$, άρα

$$f(5) > f(x_2) \overset{f \searrow A_2}{\Rightarrow} 5 < x_2. \quad (4)$$

Από τις (3), (4) έπεται τώρα ότι $x_2 \in (5,7)$, όπως θέλαμε.

B3. Η $x=4$ είναι η μοναδική ρίζα της g και η g είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $[3,4)$ και $(4,+\infty)$. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $f(g(\kappa)) = f(g(\lambda)) = 0$. Είδαμε προηγουμένως ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 \in (3,4)$ και $x_2 \in (5,7)$, οπότε οι αριθμοί $g(\kappa)$ και $g(\lambda)$ είναι οι ίδιοι με τους x_1, x_2, ίσως με διαφορετική σειρά.

Ανεξάρτητα όμως από τη σειρά, οι x_1, x_2 είναι θετικοί, άρα και οι $g(\kappa), g(\lambda)$ θα είναι θετικοί. Δεδομένου ότι η g διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $[3,4)$ και $(4,+\infty)$ και δεδομένου ότι $\kappa \in (3,4)$ και $\lambda \in (4,+\infty)$, συμπεραίνουμε τελικά ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [3,4) \cup (4,+\infty)$.

Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [3,4) \cup (4,+\infty)$. Ισχύει επίσης από την υπόθεση ότι $g(4) = 0$. Με άλλα λόγια λοιπόν, ισχύει $g(x) \geq g(4)$ για κάθε $x \in [3,+\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=4$. Συνοψίζοντας, ισχύει ότι:

- Η g είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=4$ (από υπόθεση).
- Το $x=4$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού $A_g=[3,+\infty)$.
- Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=4$.

Άρα, από το θεώρημα του Fermat, συμπεραίνουμε ότι $g'(4)=0$. Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης της g στη θέση $x=4$ είναι μηδέν. Επομένως, αυτή η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Λύση

Γ1. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

$$\begin{aligned} xf'(x)-4x-2f'(x)+f(x)+6=0 &\Leftrightarrow (x-2)f'(x)+f(x)=4x-6 \\ &\Leftrightarrow (x-2)f'(x)+(x-2)'f(x)=4x-6 \\ &\Leftrightarrow [(x-2)f(x)]'=(2x^2-6x)'. \end{aligned}$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι:

- Υπάρχει σταθερά c_1 τέτοια, ώστε $(x-2)f(x)=2x^2-6x+c_1$ για κάθε $x<2$. Για $x=1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} (1-2)f(1)=2\cdot 1^2-6\cdot 1+c_1 &\Leftrightarrow -1=2-6+c_1 \\ &\Leftrightarrow c_1=3. \end{aligned}$$

Όπως έχουμε επισημάνει ξανά, διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, διότι οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. (σελ. 133 του σχολικού βιβλίου) ισχύουν μόνο για διαστήματα.

Επομένως, για $x<2$ ισχύει

$$(x-2)f(x)=2x^2-6x+3 \overset{x<2}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2}.$$

- Υπάρχει σταθερά c_2 τέτοια, ώστε $(x-2)f(x)=2x^2-6x+c_2$ για κάθε $x>2$. Για $x=3$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} (3-2)f(3)=2\cdot 3^2-6\cdot 3+c_2 &\Leftrightarrow 3=18-18+c_3 \\ &\Leftrightarrow c_3=3. \end{aligned}$$

Επομένως, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει

$$f(x)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2}.$$

Τελικά, λοιπόν, ισχύει $\boxed{f(x)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2} \text{ για κάθε } x\neq 2.}$

Γ2. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό μίας πλάγιας ασύμπτωτης, σύμφωνα με τον οποίο, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=0$$

και το ίδιο για το όριο στο $-\infty$. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

Ένα συχνό λάθος σε ερωτήσεις θεωρίας είναι να συγχέεται ο ορισμός με το θεώρημα στη σελ. 162 του σχολικού βιβλίου. Βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να τα διακρίνετε. Όταν μας δίνεται η ασύμπτωτη, όπως εδώ, βολεύει να χρησιμοποιούμε τον ορισμό.

$$f(x)-(2x-2)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2}-\frac{(2x-2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2-6x+3-(2x-2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2-6x+3-2x^2+4x+2x-4}{x-2}=-\frac{1}{x-2}.$$

Πολύ εύκολα λοιπόν μπορούμε από την παραπάνω ισότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=0,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{y=2x-2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2-6x+3\right)'(x-2)-\left(2x^2-6x+3\right)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(4x-6)(x-2)-\left(2x^2-6x+3\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-6x-8x+12-2x^2+6x-3}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}.$$

Έτσι, οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι οι ίδιες με τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2-8x+9=0$ στο σύνολο $\mathbb{R}-\{2\}$. Το τελευταίο τριώνυμο όμως έχει διακρίνουσα ίση με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=8^2-4\cdot 2\cdot 9=64-72=-8<0$, οπότε δεν έχει ρίζες. Έτσι, η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη. Μάλιστα, εφόσον έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή στο x^2, το παραπάνω τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η παράγωγος f' είναι επίσης θετική για κάθε $x\neq 2$.

Γ4. Θα κάνουμε αρχικά μια μικρή απλοποίηση στον τύπο της f' ώστε να συναντήσουμε πιο απλούς υπολογισμούς αργότερα. Η λύση μπορεί να γίνει και χωρίς αυτήν την απλοποίηση, απλώς θέλει μεγαλύτερη προσοχή στους υπολογισμούς. Ισχύει

$$f'(x)=\frac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}=\frac{(2x^2-8x+8)+1}{(x-2)^2}=\frac{2(x^2-4x+4)+1}{(x-2)^2}$$

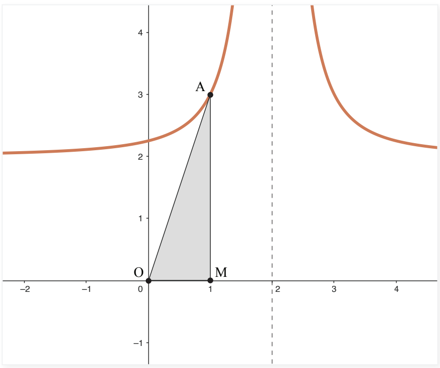
$$=\frac{2(x-2)^2+1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}+2. \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $x(t_0)=1$, $y(t_0)=3$ και $x'(t_0)=4$ μονάδες/sec. Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα, ισχύει

$$(\mathrm{MOK})=\frac{1}{2}(\mathrm{MA})\cdot(\mathrm{MO})=\frac{1}{2}\cdot|f'(x)|\cdot|x|$$

$$\overset{f'(x)>0}{=}\frac{1}{2}|x|\cdot f'(x)\overset{x>0}{=}\frac{1}{2}\cdot x\cdot f'(x)$$

$$=\frac{x}{2(x-2)^2}+x,$$



όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε μέσω της σχέσης (1). Συναρτήσει του t, το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να εκφραστεί ως

$$E(t)=\frac{x(t)}{2(x(t)-2)^2}+x(t).$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει

$$E'(t)=\frac{2x'(t)(x(t)-2)^2-2x(t)\left[(x(t)-2)^2\right]'}{4(x(t)-2)^4}+x'(t)$$

$$=\frac{2x'(t)(x(t)-2)^2-4x(t)(x(t)-2)x'(t)}{4(x(t)-2)^4}+x'(t)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$E'(t_0)=\frac{2x'(t_0)(x(t_0)-2)^2-4x(t_0)(x(t_0)-2)x'(t_0)}{4(x(t_0)-2)^4}+x'(t_0)$$

$$=\frac{2\cdot4\cdot(1-2)^2-4\cdot1\cdot(1-2)\cdot4}{4(1-2)^4}+4$$

$$\boxed{=\frac{8+16}{4}+4=10 \text{ τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.}}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[-4,\pi]$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-4,0)$ και στο $(0,\pi]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι είναι και συνεχής στο $x=0$. Για να το κάνουμε αυτό, θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Ισχύει $f(0)=2$,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\sqrt{x+4}=\sqrt{4}=2$$

και

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}2e^x\sigma\upsilon\nu x=2.$$

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι το $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=2$, άρα η f είναι συνεχής και στη θέση $x=0$, οπότε είναι συνεχής σε ολόκληρο το διάστημα $\left[-4,\frac{\pi}{2}\right]$.

Κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $\left[-4,\frac{\pi}{2}\right]$ στα οποία η f' μηδενίζεται, καθώς και τα εσωτερικά σημεία αυτού του διαστήματος στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. Υπολογίζουμε την f' ξεχωριστά για καθέναν από τους δύο κλάδους της f.

- Για $-4 \le x < 0$ ισχύει $f(x) = \sqrt{x+4}$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-4,0)$, με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} > 0$. Επομένως, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα $(-4,0)$.

- Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $f(x) = 2e^x \sigma\upsilon\nu x$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, με
$$f'(x) = \left(2e^x \sigma\upsilon\nu x\right)' = 2e^x \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \eta\mu x = 2e^x\left(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right).$$

  Για να βρούμε τα σημεία μηδενισμού της f', αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0$ στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ δεν μηδενίζεται σε αυτό το διάστημα, οπότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως εξής:
$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1,$$
  η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς της μορφής $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, για $\kappa \in \mathbb{Z}$. Η μόνη όμως από αυτές τις λύσεις που ανήκει στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι η $x = \frac{\pi}{4}$. Επομένως, αυτό είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f σε αυτό το διάστημα.

Μένει να ελέγξουμε αν το $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f. Θα ελέγξουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Υπολογίζουμε τα δύο αντίστοιχα πλευρικά όρια. Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+4}^{\,2}-2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2e^x\sigma\upsilon\nu x-2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^x\sigma\upsilon\nu x-1)}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2e^x\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)}{1} = 2,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$ (και παραλείψαμε κάποιους υπολογισμούς χάριν συντομίας). Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$. Άρα το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f. Συνοψίζοντας, τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $x=0$ και το $x=\pi/4$.

Δ2. Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της f μέσω του προσήμου της f'.

- Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι για $x\in(4,0)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}>0.$ Επίσης, η f είναι συνεχής στα σημεία $x=0$ και $x=-4$, καθώς στο Ερώτημα Δ1 αποδείξαμε ότι είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-4,0]$.

- Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είδαμε ότι $f'(x)=2e^x(\text{συν}x-\text{ημ}x)$, οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του παράγοντα $\text{συν}x-\text{ημ}x$. Θέτουμε λοιπόν $h(x)=\text{συν}x-\text{ημ}x$ για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $h'(x)=-\text{ημ}x-\text{συν}x$. Γνωρίζουμε ότι οι $\text{συν}x$ και $\text{ημ}x$ είναι θετικοί στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως, ισχύει $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Λόγω συνέχειας, η h είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Καθώς

$$h(\pi/4)=\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,$$

προκύπτει ότι:

  - για $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x>\frac{\pi}{4}\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)<h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
  - για $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ισχύει $x<\frac{\pi}{4}\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)>h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την f στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$h(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Εάν θέλουμε να συμπεριλάβουμε και το διάστημα $[-4,0)$, τότε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ λόγω του Ερωτήματος Δ1. Καθώς είναι γνησίως αύξουσα στα υποδιαστήματα $[-4,0)$ και $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $\left[-4,\frac{\pi}{4}\right]$. Προκύπτει έτσι ο παρακάτω εκτεταμένος πίνακας μονοτονίας:

x	-4	$\pi/4$	$\pi/2$
$h(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Συνεπώς, για το σύνολο τιμών μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1=\left[-4,\dfrac{\pi}{4}\right]$, άρα

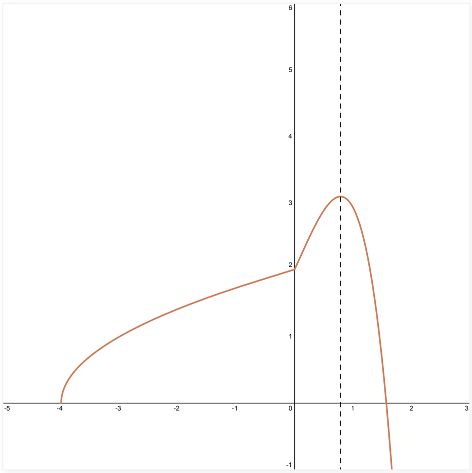
$$f(A_1)=\left[f(-4),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\sqrt{2}e^{\pi/4}\right].$$

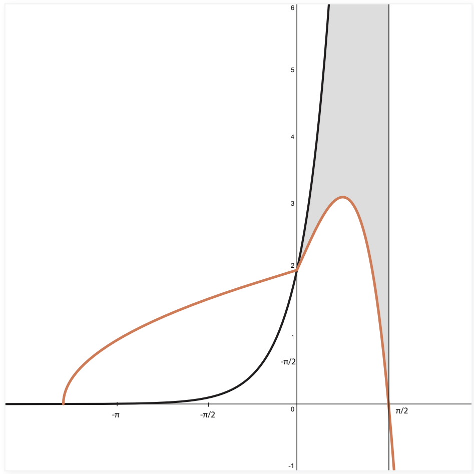
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$, άρα

$$f(A_2)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\sqrt{2}e^{\pi/4}\right].$$

Για τους ενδιαφερόμενους, παραθέτουμε και τη γραφική παράσταση της f:

Εκτός από τη γραφική παράσταση, έχουμε σχεδιάσει και την ευθεία $x=\frac{\pi}{4}$, για να τονίσουμε τη θέση στην οποία η f παρουσιάζει μέγιστο. Τέλος, από το σχήμα επιβεβαιώνεται το συμπέρασμά μας ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, καθώς η καμπύλη της γραφικής παράστασης παρουσιάζει «γωνία» σε αυτήν τη θέση.





Δ3. Το εν λόγω χωρίο απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, όπου με πορτοκαλί χρώμα έχουμε χρωματίσει τη γραφική παράσταση της g.
Μάλιστα, το χωρίο δεν φαίνεται στο σχήμα εξ ολοκλήρου, καθώς το σημείο τομής της C_g με την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ έχει τεταγμένη ίση με $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\pi}\approx 46{,}28$.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^{\pi/2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\pi/2}2e^x\left|\sigma\upsilon\nu x-e^x\right|dx. \quad (1)$$

Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει

$$\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x\le 1\\ e^x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x\le 1\\ -e^x\le -1\end{cases}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x-e^x\le 0.$$

Άρα από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$E=\int_0^{\pi/2}2e^x\left(e^x-\sigma\upsilon\nu x\right)dx=2\int_0^{\pi/2}e^{2x}dx-2\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x dx. \quad (2)$$

Ο πρώτος όρος είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$2\int_0^{\pi/2}e^{2x}dx=2\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\pi/2}=2\cdot\frac{e^{\pi}-1}{2}=e^{\pi}-1. \quad (3)$$

Για τον δεύτερο όρο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Συμβολίζουμε αυτόν τον όρο με I. Ισχύει

$$\mathrm{I}=2\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=2\int_0^{\pi/2}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=2\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^x\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'dx$$

$$=-2+2\int_0^{\pi/2}e^x\eta\mu x dx=-2+2\int_0^{\pi/2}\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=-2+2\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^x\left(\eta\mu x\right)'dx$$

$$=-2+2e^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=-2+2e^{\pi/2}-\mathrm{I}.$$

Συνδυάζοντας το πρώτο με το τελευταίο μέλος της παραπάνω ισότητας, παίρνουμε

$$=-2+2e^{\pi/2}-\mathrm{I}\Leftrightarrow 2\mathrm{I}=-2+2e^{\pi/2}\Leftrightarrow \mathrm{I}=e^{\pi/2}-1.$$

Έπεται λοιπόν από τις σχέσεις (2), (3) ότι

$$\boxed{\mathrm{E}=\left(e^{\pi}-1\right)-\left(e^{\pi/2}-1\right)=\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right).}$$

Δ4. Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$16e^{-\pi/4}f(x)-e^{-\pi/4}\left(4x-\pi\right)^2=16\sqrt{2}\Leftrightarrow 16f(x)-\left(4x-\pi\right)^2=16\sqrt{2}e^{\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{\left(4x-\pi\right)^2}{16}=\sqrt{2}\cdot e^{\pi/4}\Leftrightarrow f(x)-f(\pi/4)=\left(\frac{4x-\pi}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(\pi/4)=\left(x-\pi/4\right)^2.$$

Σύμφωνα με τον πίνακα μονοτονίας της f, το αριστερό μέλος είναι αρνητικό για κάθε $x\in \mathrm{A}_f-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, διότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$ και αυτή είναι η μοναδική θέση ολικού μεγίστου. Από την άλλη, το δεξιό μέλος είναι θετικό για κάθε $x\neq\frac{\pi}{4}$. Επομένως, αφού το ένα μέλος είναι θετικό και το άλλο αρνητικό, κανένας αριθμός διαφορετικός του $\frac{\pi}{4}$ δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης.

Από την άλλη, για $x=\frac{\pi}{4}$, και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι ίσα με μηδέν.

$$\boxed{\text{Επομένως, το } x=\tfrac{\pi}{4} \text{ είναι η μοναδική λύση.}}$$

Διαγώνισμα 4.18

ΘΕΜΑ Α

Λύση

A1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

A2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 157-158 (συζήτηση μετά από το θεώρημα).

A3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 31 (υποσημείωση στο τέλος της σελίδας).

A4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Θεωρούμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

Η f είναι «1-1» διότι καμία οριζόντια ευθεία δεν τέμνει τη γραφική της παράσταση πάνω από μία φορά. Δείτε την αντίστοιχη συζήτηση στις σελ. 34-35 του σχολικού βιβλίου.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=-e^x$ είναι η αντίστροφη της $g(x)=-\ln x$ και επομένως γι' αυτόν το λόγο οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

iii. Η συνάρτηση $f(x)=|x|-1$ είναι συνεχής στο $[-3,3]$ με $f(1)=f(-1)=0$. Όμως $f(-3)=f(3)=2>0$, άρα $f(-3)f(3)>0$.

iv. Οι $f(x_0)$ και $g(x_0)$ είναι σταθεροί αριθμοί, δηλαδή η παράγωγός τους θα είναι πάντα μηδέν. Για παράδειγμα, αν $f(x)=5x$ και $g(x)=x^2$, τότε

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=5+2=7,$$

αλλά $\big(f(1)+g(1)\big)'=(5+1)'=0$.

v. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $+\infty$, κάτι που μπορούμε να αποδείξουμε με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής (δείτε τη λύση του Ερωτήματος Β1 παρακάτω). Παρ' όλα αυτά, την τέμνει σε όλα τα σημεία με τετμημένη της μορφής $x=\kappa\pi$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων, και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x+4x-2\pi$. Η f' είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων, με παράγωγο $f''(x)=-\sigma\upsilon\nu x+4>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Για να αποδείξουμε ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, θα δείξουμε αρχικά ότι η f' έχει ακριβώς ένα σημείο μηδενισμού. Εφόσον $f''(x)>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εφόσον είναι και συνεχής, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της από τον τύπο

$$f'(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right). \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε τα δύο όρια, θα δείξουμε πρώτα ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0.$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής: Ισχύει

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}.$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{|x|}=0,$$

το ζητούμενο έπεται. Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to-\infty}(\eta\mu x/x)=0.$ Για τα όρια της f' λοιπόν μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f'(x)&=\lim_{x\to-\infty}(-\eta\mu x+4x-2\pi)\\&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+4-\frac{2\pi}{x}\right)=-\infty,\end{aligned}$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω. Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty.$ Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Εφόσον $0\in\mathbb{R}=f'(\mathbb{R})$, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Μάλιστα, αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Επιπλέον, ισχύουν οι συνεπαγωγές:

- $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$.
- $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Σχηματίζουμε λοιπόν για την f τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Από αυτόν τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, το οποίο είναι ολικό ελάχιστο, και παρουσιάζεται στη θέση $x = x_0$.

  Πράγματι, αν $x \in (-\infty, x_0]$, τότε $f(x) \geq f(x_0)$, καθώς f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$, ενώ, αν $x \in [x_0, +\infty)$, τότε $f(x) \geq f(x_0)$, καθώς f γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) \geq f(x_0)$.

B2. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η παράγωγος $f'(x) = -\eta\mu x + 4x - 2\pi$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f'(x_0) = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$f'(0) = -\eta\mu 0 + 4 \cdot 0 - 2\pi = -2\pi < 0$$

και

$$f'(\pi) = -\eta\mu\pi + 4\pi - 2\pi = 2\pi > 0,$$

άρα

$$f'(0) < 0 = f'(x_0) < f'(\pi).$$

Από τη μονοτονία της f' και από την τελευταία ανισότητα, έπεται ότι $0 < x_0 < \pi$, όπως θέλαμε. Για να αποδείξουμε ότι το ελάχιστο της f, δηλαδή η τιμή $f(x_0)$, είναι αρνητικός αριθμός, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi + 2\pi^2 - 2\pi^2 + 1 = 0$. Εφόσον $x_0 < \pi$, έπεται από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι $f(x_0) < f(\pi) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

Β3. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,\ x_0]$ και $[x_0, 2\pi]$ και ισχύουν τα εξής:

- $f(0)=2>0$,
- $f(x_0)<0$,
- $f(2\pi)=8\pi^2-4\pi^2+1=4\pi^2+1>0$.

Εφόσον $f(0)f(x_0)<0$ και $f(x_0)f(2\pi)<0$, έπεται από το Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,x_0)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x_0,2\pi)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_0,+\infty)$, επομένως είναι αδύνατο να έχει άλλες ρίζες πέραν των ξ_1,ξ_2.

Β4. Η εφαπτόμενη ευθεία σε ένα σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)\cdot x+f(\alpha)-\alpha f'(\alpha).$$

Για να διέρχεται αυτή η ευθεία από το σημείο $M(0,-1)$, θα πρέπει να ισχύει

$$-1=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)\Leftrightarrow -1=\left(\sigma\upsilon\nu\alpha+2\alpha^2-2\pi\alpha+1\right)-\alpha(-\eta\mu\alpha+4\alpha-2\pi)$$

$$\Leftrightarrow 0=\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha\cdot\eta\mu\alpha-2\alpha^2+2.$$

Θέτουμε λοιπόν $g(x)=\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x-2x^2+2$ για $x\in\mathbb{R}$. Σύμφωνα με την εκφώνηση και βάσει της παραπάνω ισοδυναμίας, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων, και ισχύει

$$g'(x)=-\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x-4x\ =x\sigma\upsilon\nu x-4x\ =x(\sigma\upsilon\nu x-4).$$

Ο δεύτερος παράγοντας είναι ξεκάθαρα αρνητικός, καθώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$. Επομένως, το πρόσημο της g' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του παράγοντα x. Προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=[0,+\infty)$. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από αυτά τα δύο διαστήματα.

- Η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_1, οπότε για την εικόνα του A_1 ισχύει ότι $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right)$.

$$g(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right). \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε το όριο στο $-\infty$, θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$.Αυτό αποδεικνύεται μέσω του κριτηρίου παρεμβολής. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Rightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}.$$

Καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x^2}=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, όπως αποδείξαμε στο Ερώτημα Β1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\frac{\eta\mu x}{x}-2-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty.$$

Ισχύει επίσης $g(0)=3$, άρα από τη σχέση (2) παίρνουμε ότι $g(A_1)=(-\infty,3)$. Ισχύει λοιπόν $0\in g(A_1)$, άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$. Το x_1 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα στο διάστημα A_1, καθώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1.

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=[0,+\infty)$, οπότε

$$g(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right].$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά το όριο στο $+\infty$. Αρχικά, ομοίως με πριν, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Επίσης, έχουμε ήδη αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\frac{\eta\mu x}{x^2}-2-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty.$$

Ισχύει επίσης $g(0)=3$. Άρα $g(A_2)=(-\infty,3]$. Ισχύει λοιπόν $0\in g(A_2)$, άρα υπάρχει $x_2\in A_2$ τέτοιο, ώστε $g(x_2)=0$. Το x_2 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα στο διάστημα A_2, καθώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και, κατ' επέκταση, η C_f έχει ακριβώς δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $M(0,1)$.

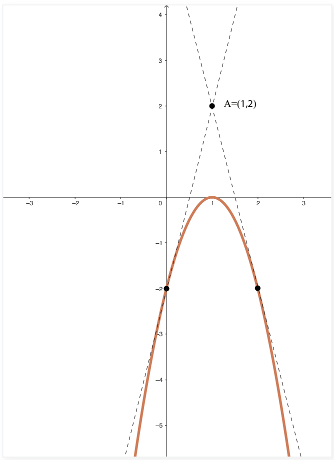
ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Αναζητούμε τις εφαπτόμενες της C_f που περνούν από το σημείο $A(1,2)$ (αυτή είναι η σημασία του ρήματος «άγονται»). Έστω $B(x_0,f(x_0))$, ένα σημείο της C_f. Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) στο σημείο έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y+2(x_0-1)^2=-4(x_0-1)(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow y=-4(x_0-1)x+4x_0^2-4x_0-2(x_0-1)^2.$$

Η (ε) διέρχεται από το A αν και μόνο αν οι συντεταγμένες $x=1$ και $y=2$ επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή αν

$$2=-4x_0+4+4x_0^2-4x_0-2(x_0-1)^2\Leftrightarrow 2=4x_0^2-8x_0+4-2(x_0-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0=0\Leftrightarrow 2x_0(x_0-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x_0=0 \;\; ή \;\; x_0=2$$



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το σημείο $A(1,2)$. Οι εξισώσεις τους προκύπτουν αντικαθιστώντας $x_0=0$ και $x_0=2$ στην αρχική εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_0,f(x_0))$ που γράψαμε παραπάνω. Οι εξισώσεις είναι οι εξής:

- Για $x_0=0$ έχουμε την εξίσωση $y=4x-2$.
- Για $x_0=2$ έχουμε την εξίσωση $y=-4x+6$.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται αυτές οι δύο εφαπτόμενες.

Γ2. Έστω $\Lambda(x_\Lambda(t), y_\Lambda(t))$ το ζητούμενο σημείο, όπου ισχύει $x'_\Lambda(t)=y'_\Lambda(t)$. Εφόσον το $K(x(t),y(t))$ κινείται επί της C_f, θα ισχύει $y(t)=-2(x(t)-1)^2$. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας παίρνουμε ότι

$$y'(t)=-4(x(t)-1)\cdot x'(t)=-4x(t)x'(t)+4x'(t).$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Λ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x'_\Lambda(t)=y'_\Lambda(t)$, η παραπάνω ισότητα γράφεται ως

$$x'_\Lambda(t)=-4\cdot x_\Lambda(t)\cdot x'_\Lambda(t)+4x'_\Lambda(t)\overset{x'\neq 0}{\Leftrightarrow}1=-4\cdot x_\Lambda(t)+4$$

$$\Leftrightarrow -3=-4\cdot x_\Lambda(t) \quad \boxed{\Leftrightarrow x(t)=\frac{3}{4},}$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $x'(t)\neq 0$ για κάθε $t\geq 0$ (το οποίο δίνεται εμμέσως στην εκφώνηση) για να διαιρέσουμε όλους τους όρους με $x'_\Lambda(t)$ και να απλοποιήσουμε έτσι την εξίσωση. Τέλος, ισχύει

$$y_\Lambda(t)=-2\left(\frac{3}{4}-1\right)^2=-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2=-2\cdot\frac{1}{16}=-\frac{1}{8},$$

άρα $\Lambda\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)$.

Γ3. Ισχύει $f(x)=-2(x-1)^2$, άρα

$$\frac{1}{f(x)+8}=\frac{1}{-2(x-1)^2+8}=\frac{1}{-2\left[(x-1)^2-4\right]}$$

$$=\frac{1}{-2(x-3)(x+1)}=\frac{A}{-2(x-3)}+\frac{B}{x+1}, \quad (1)$$

Ο σκοπός της ανάλυσης σε απλά κλάσματα είναι να καταλήξουμε σε ποσότητες των οποίων το ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε.

όπου οι A, B είναι πραγματικοί αριθμοί τους οποίους θέλουμε να προσδιορίσουμε. Θεωρούμε τώρα τα δύο τελευταία βήματα στην παραπάνω ισότητα, δηλαδή τη σχέση

$$\frac{1}{-2(x-3)(x+1)}=\frac{A}{-2(x-3)}+\frac{B}{x+1}.$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, παίρνουμε ότι

$$1 = A(x+1) - 2B(x-3)$$

για κάθε $x \neq 3$ και $x \neq -1$. Αρκεί τώρα να αντικαταστήσουμε δύο τυχαίες τιμές του x και να λύσουμε το αντίστοιχο σύστημα ως προς A, B.

- Για $x = 0$ παίρνουμε $1 = A + 6B$.
- Για $x = -2$ παίρνουμε $1 = -A + 10B$.

Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε $16B = 2$, δηλαδή $B = 1/8$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη (ή στη δεύτερη) εξίσωση, παίρνουμε $A = 1/4$. Επομένως, προκύπτει από τη σχέση (1) ότι

$$\frac{1}{f(x)+8} = \frac{1/4}{-2(x-3)} + \frac{1/8}{x+1} = -\frac{1}{8(x-3)} + \frac{1}{8(x+1)},$$

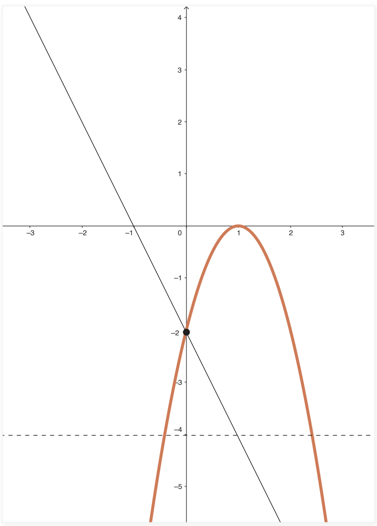
οπότε

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{f(x)+8}dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{8}\cdot \ln|x-3| + \frac{1}{8}\cdot \ln|x+1|\right]_{-2}^{2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{8}\ln 5 = \frac{1}{8}\ln 15.}$$

Γ4. Στις περιπτώσεις που το ζητούμενο αφορά εμβαδά, είναι πάντοτε καλό να σχεδιάζουμε ένα πρόχειρο σχήμα για βοήθεια. Ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που το ζητούμενο είναι πιο περίπλοκο, όπως εδώ. Παραθέτουμε λοιπόν ένα σχήμα στο οποίο έχουμε επιλέξει μια τυχαία τιμή του α, πιο συγκεκριμένα $\alpha = \sqrt{2}$. Στο σχήμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι η οριζόντια ευθεία χωρίζει το χωρίο μεταξύ της C_f και της ευθείας $y = -2x - 2$ (κόκκινη ευθεία) σε τρία μέρη. Θα βρούμε αρχικά τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 2x - 2$. Λύνουμε λοιπόν την εξίσωση $f(x) = -2x - 2$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή



$$f(x)=-2x-2 \Leftrightarrow -2(x-1)^2=-2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3.$$

Το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=-2x-2$ είναι ίσο με

$$E=\int_0^3\left|-2(x-1)^2+2x+2\right|dx=\int_0^3\left|-2x^2+4x-2+2x+2\right|dx=\int_0^3\left|-2x^2+6x\right|dx$$
$$=\int_0^3\left|2x(3-x)\right|dx=\int_0^3 2x(3-x)dx=\int_0^3\left(-2x^2+6x\right)dx.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι x∈[0,3], οπότε x>0 και 3-x>0.

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_0^3=\frac{-2\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3^2=-18+27=9.$$

Τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-2\alpha^2$ και της C_f δίνονται από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-2\alpha^2$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-2(x-1)^2=-2\alpha^2 \Leftrightarrow x-1=\alpha \text{ ή } x-1=-\alpha$$
$$\Leftrightarrow x=\alpha+1 \text{ ή } x=1-\alpha.$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, για x μεταξύ των $1-\alpha$ και $1+\alpha$, ισχύει $f(x)>-2\alpha^2$, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=-2\alpha^2$. Αυτό μπορούμε να το δούμε γραφικά στο παραπάνω σχήμα, αλλά μπορούμε να το δούμε και από την παρακάτω ισοδυναμία:

$$f(x)>-2\alpha^2 \Leftrightarrow -2(x-1)^2>-2\alpha^2 \Leftrightarrow (x-1)^2<\alpha^2$$
$$\Leftrightarrow |x-1|<|\alpha| \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} |x-1|<\alpha$$
$$\Leftrightarrow -\alpha<x-1<\alpha \Leftrightarrow 1-\alpha<x<1+\alpha.$$

Δηλαδή το x είναι μεταξύ των τιμών που αναφέραμε παραπάνω.

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y=-2\alpha^2$ και τη C_f είναι ίσο με

$$E_1=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left|f(x)-\left(-2\alpha^2\right)\right|dx=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left(f(x)+2\alpha^2\right)dx=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left(-2(x-1)^2+2\alpha^2\right)dx$$
$$=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left(-2x^2+4x-2+2\alpha^2\right)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+\left(2\alpha^2-2\right)x\right]_{1-\alpha}^{\alpha+1}$$

$$=-\frac{2}{3}\left[(\alpha+1)^3-(1-\alpha)^3\right]+2\left[(\alpha+1)^2-2(1-\alpha)^2\right]+\left(2\alpha^2-2\right)2\alpha$$

$$=-\frac{4\alpha^3}{3}+4\alpha^3-2=\frac{8\alpha^3}{3}-2,$$

όπου απλώς παραλείψαμε κάποιους υπολογισμούς χάριν συντομίας. Σύμφωνα με την υπόθεση, θα πρέπει αυτό το εμβαδόν να είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του συνολικού εμβαδού που υπολογίσαμε παραπάνω, το οποίο ήταν ίσο με 9. Θα πρέπει λοιπόν

$$\boxed{\frac{8\alpha^3}{3}-2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 8\alpha^3=\frac{13}{2}\Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{\frac{13}{16}}.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Λύση

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αναζητούμε τώρα πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+4x}{x\left(x^2+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2x^2+4\right)}{x\left(x^2+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2,$$

και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^3+4x}{x^2+2}+\frac{2x\left(x^2+2\right)}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+4x+2x^3+4x}{x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2}=0,$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=-2x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Με εντελώς όμοιο τρόπο, βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$. Εφόσον η C_f έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Δ2. Ισχύει

$$E(\alpha)=\int_{-\alpha}^{-3\alpha}\left|f(x)+2x\right|dx=\int_{-\alpha}^{-3\alpha}\left|\frac{8x}{x^2+2}\right|dx\overset{-\alpha>0}{=}\int_{-\alpha}^{-3\alpha}\frac{8x}{x^2+2}dx$$

$$=\left[4\ln\left(x^2+2\right)\right]_{-\alpha}^{-3\alpha}=4\ln\left(9\alpha^2+2\right)-4\ln\left(\alpha^2+2\right)=4\ln\frac{9\alpha^2+2}{\alpha^2+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty}\left(4\ln\frac{9\alpha^2+2}{\alpha^2+2}\right)\quad(1)$$

Ισχύει

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{9\alpha^2+2}{\alpha^2+2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{9\alpha^2}{\alpha^2}=9,$$

οπότε, θέτοντας $u=\left(9\alpha^2+2\right)/\left(\alpha^2+2\right)$, παίρνουμε από την (1) ότι

$$\boxed{\lim_{\alpha\to-\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\lim_{u\to9}4\ln u=4\ln9.}$$

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)=\frac{-2x^3+4x}{x^2+2}-\frac{4x}{x^2+2}=\frac{-2x^3}{x^2+2},$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως ρητή. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=\frac{-6x^2\left(x^2+2\right)+2x^3(2x)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-6x^4-12x^2+4x^4}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{-2x^4-12x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-2x^2\left(x^2+6\right)}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $g'(x)<0$ για κάθε $x\neq0$, και $g'(0)=0$. Εφόσον η g είναι συνεχής στη θέση $x=0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι και αντιστρέψιμη. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και 1–1, άρα αντιστρέψιμη.

Προκύπτει από το θεώρημα 3(iii) στη σελ. 144 του σχολικού βιβλίου, το οποίο μας βγάζει από τη δύσκολη θέση όταν η παράγωγος δεν είναι θετική παντού αλλά μηδενίζεται σε κάποιο/α μεμονωμένο/α σημείο/α.

Δ4. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι

$$g(x)=-\frac{2x^3}{x^2+2}\text{ για κάθε }x\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε $u=g^{-1}(x)$. Ισχύει τότε $x=g(u)$, οπότε $dx=g'(u)du$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$ ισχύει $g(u)=0 \Leftrightarrow g(u)=g(0) \Leftrightarrow u=0$.
- Για $x=-\frac{2}{3}$ ισχύει $g(u)=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow g(u)=g(1) \Leftrightarrow u=1$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα παραπάνω, καθώς και ολοκλήρωση κατά παράγοντες, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-2/3}^{0} g^{-1}(x)dx = \int_{1}^{0} ug'(u)du = \left[ug(u)\right]_1^0 - \int_1^0 (u)' g(u)du$$

$$= -g(1) - \int_1^0 g(u)du = -g(1) - \int_0^1 \frac{2u^3}{u^2+2}du = \frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{2u\cdot u^2}{u^2+2}du$$

$$= \frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{2u\left(u^2+2-2\right)}{u^2+2}du = \frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{2u\left(u^2+2\right)-4u}{u^2+2}du$$

$$= \frac{2}{3} - \int_0^1 \left(2u - \frac{4u}{u^2+2}\right)du = \frac{2}{3} - \left[u^2 - 2\ln\left(u^2+2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - (1-2\ln 3) + (0-2\ln 2) \boxed{= -\frac{1}{3} + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Δ5. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-2x^3 + (1-\kappa)x^2 - 2\kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow -2x^3 = (\kappa-1)x^2 + 2(\kappa-1)$$

$$\Leftrightarrow -2x^3 = (\kappa-1)\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow \frac{-2x^3}{x^2+2} = \kappa - 1$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \kappa - 1.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για το σύνολο τιμών της ισχύει ότι

$$g(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-\infty} g(x)\right). \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε αυτά τα δύο όρια ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (2) ότι $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε τιμή του $(\kappa-1)\in\mathbb{R}$, άρα και του $\kappa\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x)=\kappa-1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Αυτή η ρίζα είναι μοναδική, αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Διαγώνισμα 4.19

ΘΕΜΑ Α

Λύση

A1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

A2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 212 (σχήμα 11 και σχετική συζήτηση).

A3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 96 (σχόλιο στο τέλος της σελίδας).

A4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Αντιθέτως, ισχύει $f(x)=f(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε όλα τα ζεύγη αντιθέτων αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή μέσω της f. Για παράδειγμα, $f(1)=f(-1)$, παρότι $1\neq-1$.

ii. Δείτε την παρατήρηση α) στη σελ. 17 του σχολικού βιβλίου.

iii. Δείτε το θεώρημα στη σελ. 156 του σχολικού βιβλίου.

iv. Η παγίδα κρύβεται στο γεγονός ότι το α μπορεί να είναι ίσο ή ακόμη και μικρότερο του β. Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2+3$ και $\alpha=\beta$, τότε, ενώ $f(x)>0$, ισχύει $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$. Αν δινόταν ότι $\alpha<\beta$, τότε το συμπέρασμα θα ήταν αληθές.

v. Το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.

ΘΕΜΑ Β

Λύση

B1. Για $x\in(-1,0)$ και για $x>3$ ισχύει $f'(x)>0$. Εφόσον η f είναι και συνεχής, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[3,+\infty)$. Για $x\in(-\infty,-1)$ και για $x\in(0,3)$ ισχύει $f'(x)<0$. Εφόσον η f είναι και συνεχής, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[0,3]$. Συνοψίζοντας, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τον πίνακα προκύπτει επίσης ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις $x=-1$ και $x=3$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x=0$.

Β2. Όσον αφορά την κυρτότητα, πρέπει να κοιτάξουμε τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου που δίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,\gamma]$ και $[\delta,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή σε αυτά τα διαστήματα. Αντιστοίχως, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\gamma,\delta]$, οπότε η f είναι κοίλη σε αυτό το διάστημα. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	γ	δ	$+\infty$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$	

Η C_f παρουσιάζει σημεία καμπής στις θέσεις όπου η f αλλάζει κυρτότητα, δηλαδή στις θέσεις $x=\gamma$ και $x=\delta$.

Β3. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι $f'(1)=-4$. Αυτή θα είναι η κλίση της εφαπτόμενης της C_f στο Ζ. Από την εκφώνηση δίνεται επίσης ότι $f(1)=-\dfrac{23}{12}$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+\frac{23}{12}=-4(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y=-4x+4-\frac{23}{12} \boxed{\Leftrightarrow y=-4x+\frac{25}{12}.}$$

Β4. Το εμβαδόν του εν λόγω χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$\int_{-2}^{0}|f'(x)|dx=\int_{-2}^{-1}f'(x)dx+\int_{-1}^{0}f'(x)dx=[-f(x)]_{-2}^{-1}+[f(x)]_{-1}^{0}$$

$$= -f(-1) + f(-2) + f(0) - f(-1) = -2f(-1) + f(-2) + f(0)$$

$$= -2f(-1) + \frac{13}{6},$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση $f(-2)+f(0)=\frac{13}{6}$. Μας έχει δοθεί όμως ότι το εμβαδόν αυτού του χωρίου είναι ίσο με $\frac{10}{3}$, οπότε από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$-2f(-1)+f(-2)+f(0)=\frac{10}{3} \Leftrightarrow -2f(-1)+\frac{13}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow -2f(-1)=\frac{20}{6}-\frac{13}{6} \Leftrightarrow -2f(-1)=\frac{7}{6}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow f(-1)=-\frac{7}{12}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Λύση

Γ1. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{-\left(x^2+4x+t\right)'}{\left(x^2+4x+t\right)^2} = \frac{-(2x+4)}{\left(x^2+4x+t\right)^2}$$

$$= -2(x+2)\left(\frac{1}{x^2+4x+t}\right)^2 \boxed{= -2(x+2)f^2(x), \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Γ2. Από το Γ1 γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f'(x)=-2(x+2)f^2(x)$. Από τον τύπο της f είναι προφανές ότι η f δεν μηδενίζεται, οπότε στην παραπάνω ισότητα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $f(x)$ και να καταλήξουμε έτσι στη σχέση

$$(x+2)f(x) = -\frac{f'(x)}{2f(x)}.$$

Το δοσμένο ολοκλήρωμα γράφεται τότε στη μορφή

$$\int_0^1 (x+2)f(x)dx = \int_0^1 -\frac{f'(x)}{2f(x)}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\Big[\ln|f(x)|\Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln|f(1)| - \ln|f(0)|\Big] = -\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{|5+t|} - \ln\frac{1}{|t|}\right] = -\frac{1}{2}\ln\frac{|t|}{|5+t|} \overset{t>0}{=} -\frac{1}{2}\ln\frac{t}{5+t}.$$

Έχει δοθεί όμως στην εκφώνηση ότι αυτό το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\ln 5-\ln 3$, οπότε καταλήγουμε στην ισότητα

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{t}{5+t}=\ln 3-\ln 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\frac{t}{5+t}=\ln\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{t}{5+t}=-2\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{t}{5+t}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \ln\frac{t}{5+t}=\ln\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{5+t}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow 9t=20+4t \Leftrightarrow 5t=20 \boxed{\Leftrightarrow t=4}$$

Τελικά λοιπόν, ισχύει

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x+2)^2},$$

οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\boxed{A=\mathbb{R}-\{-2\}}$.

Γ3. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ1, ισχύει

$$f'(x)=\frac{-2(x+2)}{(x^2+4x+4)^2}=\frac{-2}{(x+2)^3}$$

για κάθε $x\neq -2$. Η πρώτη παράγωγος είναι παραγωγίσιμη, ως ρητή, και η παράγωγός της ισούται με

$$f''(x)=-\frac{-2\cdot\left[(x+2)^3\right]'}{(x+2)^6}=\frac{2\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}=\frac{6}{(x+2)^4}>0.$$

Επομένως, η f' είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(-2,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f'(x)+x$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Φυσικά η g είναι και παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Μάλιστα, για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι $g'(x)=f''(x)+1>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Επίσης, ισχύει ότι:

- $g(0)=f'(0)=-\frac{2}{(0+2)^3}=-\frac{1}{4}<0$.
- $g(1)=f'(1)+1=-\frac{2}{(1+2)^3}+1=-\frac{2}{27}+\frac{27}{27}=\frac{25}{27}>0$.

Εφόσον $g(0)g(1)<0$, έπεται από το Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=-x_0.$$

Εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα.

Γ4. Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\frac{10x_0+x}{5}f^2\left(\frac{x}{5x_0}\right)=\frac{x_0^2}{2} \Leftrightarrow \frac{10x_0+x}{5x_0}f^2\left(\frac{x}{5x_0}\right)=\frac{x_0}{2} \Leftrightarrow -2\left(\frac{x}{5x_0}+2\right)f^2\left(\frac{x}{5x_0}\right)=-x_0.$$

Θέτοντας $y=\frac{x}{5x_0}$, η εξίσωση γράφεται στη μορφή $-2(y+2)f^2(y)=-x_0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ1, αλλά και την ισότητα $f'(x_0)=-x_0$ του Ερωτήματος Γ3, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή

$$f'(y)=f'(x_0) \Leftrightarrow -\frac{2}{(y+2)^3}=-\frac{2}{(x_0+2)^3}$$

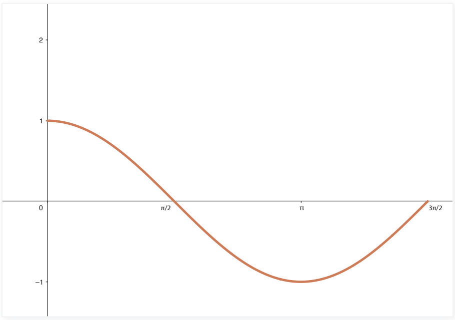
$$\Leftrightarrow (y+2)^3=(x_0+2)^3 \Leftrightarrow y+2=x_0+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{5x_0}=x_0 \;\boxed{\Leftrightarrow x=5x_0^2.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ ένα σημείο της C_f. Η εφαπτόμενη της C_f στο A έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha).$$



Σημειώνουμε ότι $f'(x)=ημx$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$. Η παραπάνω εφαπτόμενη διέρχεται από το $M\left(\pi,\frac{\pi}{2}+1\right)$ αν και μόνο αν οι $x=\pi$ και $y=\frac{\pi}{2}+1$ ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\frac{\pi}{2}+1-f(\alpha)=f'(\alpha)(-\alpha) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+1+συνα-1=(\pi-\alpha)\cdot ημα$$

$$\Leftrightarrow (\pi-\alpha)\cdot ημα-\frac{\pi}{2}-συνα=0.$$

Θέτουμε $h(x)=(\pi-x)\cdot \eta\mu x-\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu x$ για $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$. Ισχύουν τα εξής:

- $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.
- $h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\pi+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, με

$$h'(x)=(\pi-x)\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\eta\mu x=(\pi-x)\sigma\upsilon\nu x.$$

Με βάση τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$, της οποίας τη γραφική παράσταση έχουμε παραθέσει παραπάνω, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$
$\pi-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sigma\upsilon\nu x$		$+$	0	$-$		$-$	0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Στον πίνακα έχουμε επίσης σημειώσει τις ρίζες $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{2}$ της συνάρτησης h, τις οποίες είχαμε εντοπίσει παραπάνω. Από τη μονοτονία της h προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $h(x)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
- Για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ισχύει $h(x)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
- Για $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει $h(x)<h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

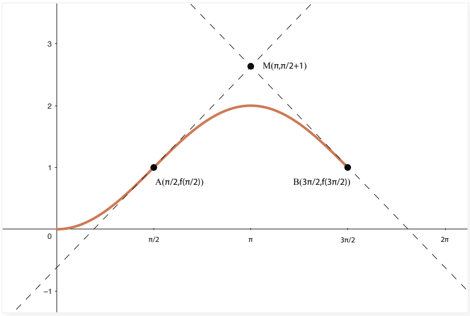
Με άλλα λόγια, οι μοναδικές ρίζες της h είναι οι $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{2}$. Από τον ορισμό της h προκύπτει ότι πράγματι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $M\left(\pi, \frac{\pi}{2}+1\right)$, αυτές στις θέσεις $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{2}$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε την εφαπτόμενη

$$(\varepsilon_1): y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y-1=x-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y=x+1-\frac{\pi}{2},$$

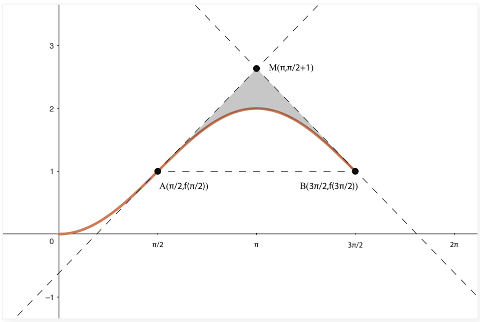
ενώ για $x=\frac{3\pi}{2}$ έχουμε την εφαπτόμενη

$$(\varepsilon_2): y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y-1=-1\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=-x+1+\frac{3\pi}{2}.$$

Δ2. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-\sigma\upsilon\nu x$, μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Με τη σειρά της, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-\sigma\upsilon\nu x$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$, με ανάκλαση στον άξονα $x'x$. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, σχεδιάζουμε τη C_f και τις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ3. Ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου MAB και του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την οριζόντια ευθεία $y=1$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sigma\upsilon\nu x \le 0$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, υπολογίζουμε αυτό το εμβαδόν ως εξής:



$$E=(MAB)-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left|1-f(x)\right|dx=\frac{\pi\cdot\frac{\pi}{2}}{2}-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left|\sigma\upsilon\nu x\right|dx=\frac{\pi^2}{4}-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$$\boxed{=\frac{\pi^2}{4}-\left[\eta\mu x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-2,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Δ4. Σημειώνουμε αρχικά ότι η $f'(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα και στο υποδιάστημα $[\alpha,\beta]$. Αφού $\alpha<\beta$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), έπεται από το Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{-\sigma\upsilon\nu\beta+1+\sigma\upsilon\nu\alpha-1}{\beta-\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha}.$$

Ισχύει όμως $\alpha<\xi<\beta$, άρα, από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, έπεται ότι

$$f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow \eta\mu\alpha<\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha}<\eta\mu\beta$$

$$\boxed{\overset{\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow}(\beta-\alpha)\eta\mu\alpha<\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta<(\beta-\alpha)\eta\mu\beta,}$$

που είναι το ζητούμενο.

Δ5. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι $\left(\sqrt{e},e\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

- $e<3<\pi<\frac{3\pi}{2}$ και $e>2>\frac{\pi}{2}$, οπότε $e\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.
- $\sqrt{e}<e<\frac{3\pi}{2}$ και $\sqrt{e}>\sqrt{2,56}=1,6>\frac{\pi}{2}$, οπότε $\sqrt{e}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

  Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $e\approx 2,71>2,56$, καθώς και το γεγονός ότι $\pi<3,2$, οπότε $\pi/2<3,2/2=1,6$.

Συμπεραίνουμε ότι $\left(\sqrt{e},e\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, όπως θέλαμε. Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x<0$ (δείτε το πρόσημο της συνάρτησης συνημίτονο στο γράφημα της προηγούμενης σελίδας). Έπεται από αυτό ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Είδαμε στο Δ1 ότι η ευθεία $y=x+1-\frac{\pi}{2}$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Άρα για κάθε $x\in\left(\sqrt{e},e\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f(x)<x+1-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}<1+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2x}.$$

Η ισότητα θα ίσχυε μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή μόνο για $x=\frac{\pi}{2}$. Όμως, καθώς $\frac{\pi}{2}<\sqrt{e}<e$, η ανισότητα είναι γνήσια για $x\in\left(\sqrt{e},e\right)$. Για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, προκύπτει η ανισότητα

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{f(x)}{x}dx<\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(1+\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2x}\right)dx=\left[x+\ln x-\frac{\pi}{2}\ln x\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$$=e+1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{e}-\ln\sqrt{e}+\frac{\pi}{2}\ln\sqrt{e}=e+1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{e}-\frac{1}{2}\ln e+\frac{\pi}{4}\ln e$$

$$=e+1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{e}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{=e-\sqrt{e}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4},\ \text{που είναι το ζητούμενο.}}$$

Διαγώνισμα 4.20

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

Α2. **i.** Στο διάστημα $[0,\alpha]$ η f είναι αρνητική ή μηδέν, άρα $|f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$. Το εμβαδόν του Ω_1 δίνεται από τη σχέση $\int_0^\alpha |f(x)|dx$. Άρα $\int_0^\alpha |f(x)|dx=2$. Είναι όμως $|f(x)|=-f(x)$, άρα προκύπτει ότι $\int_0^\alpha f(x)dx=-2$.

ii. Αυτό το ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδόν μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x=\alpha$ και $x=\gamma$. Με άλλα λόγια,

$$\int_\alpha^\gamma |f(x)|dx=E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Α3. **i.** Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (Λ).

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης το σημείο $x_0=0$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, καθώς $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}|x|=|0|=0=f(0)$. Παρ' όλα αυτά, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο, καθώς το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει. Αυτό μπορούμε να το δούμε συγκρίνοντας τα δύο πλευρικά όρια:

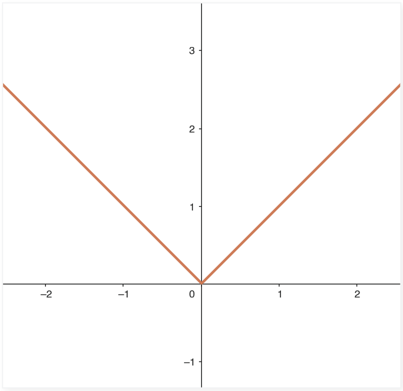
- Για $x>0$ είναι $|x|=x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

- Για $x<0$ είναι $|x|=-x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1.$$

Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους, το όριο δεν υπάρχει. Έτσι, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, η οποία επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα: Η f είναι συνεχής στο 0 αφού η γραφική παράσταση είναι μια συνεχόμενη γραμμή, καθώς περνάει από το $(0,f(0))$. Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο, καθώς η γραφική παράσταση σχηματίζει γωνία.



Προσπαθήστε να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ αποτελεί επίσης αντιπαράδειγμα: Είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά όχι παραγωγίσιμη.

A4. i) Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, πρέπει επιπλέον να ισχύει $f(0)=f(1)$.

ii. Εφόσον το γινόμενο των τεσσάρων αριθμών είναι αρνητικό, πρέπει τουλάχιστον ένας από αυτούς να είναι αρνητικός. Δεν μπορεί όμως να είναι όλοι αρνητικοί, αφού τότε το γινόμενο θα ήταν θετικός. Υπάρχει λοιπόν και ένας θετικός μεταξύ αυτών των αριθμών. Έστω ότι ο αρνητικός είναι ο $f(\alpha)$ και ο θετικός ο $f(\beta)$, όπου

$\alpha,\beta\in\{0,1,2,3\}$ και $\alpha\neq\beta$. Τότε ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Εφόσον η f είναι συνεχής, έπεται από το Θεώρημα Bolzano ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα μεταξύ των α,β.

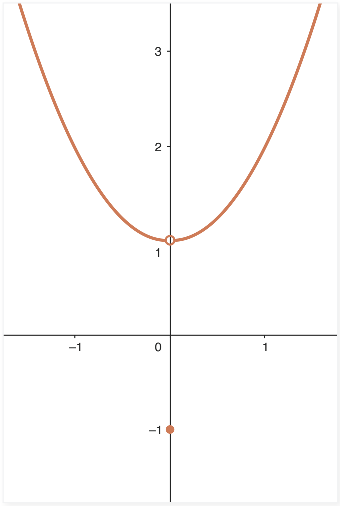
iii. Το σωστό θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$, όπου F είναι μία παράγουσα της f, δηλαδή μία συνάρτηση τέτοια, ώστε $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

iv. Το πεδίο ορισμού είναι το $\{x\in A_g : g(x)\in A_f\}$. Σκεφτείτε ότι ο τύπος της $f\circ g$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ Το x βρίσκεται λοιπόν μέσα στην g, άρα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

v. Το συμπέρασμα θα ήταν σωστό αν υπήρχε η επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι συνεχής. Παρ' όλα αυτά, χωρίς αυτήν την υπόθεση, το συμπέρασμα δεν ισχύει απαραίτητα. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Γι' αυτήν τη συνάρτηση ισχύει

$$\lim_{x\to 0}(x^2+1)=0^2+1=1>0,$$

όμως, παρ' όλα αυτά, $f(0)=-1<0$. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και, γι' αυτό, το συμπέρασμα δεν είναι αληθές. Επαναλαμβάνουμε όμως ότι, αν η f ήταν συνεχής, τότε η πρόταση θα ήταν σωστή.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Ο μόνος περιορισμός είναι να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή να ισχύει $x+1\neq 0$, ή ισοδύναμα $x\neq -1$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το

$$\boxed{A_f=\mathbb{R}-\{-1\}.}$$

Στο πεδίο ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x+1)^2-(x-1)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)^2-(x-1)\cdot 2(x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^4}=$$

Σε αυτό το βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας, και συγκεκριμένα τη σχέση $(f^2(x))'=2f(x)f'(x)$, όπου $f(x)=x+1$.

$$=\frac{(x+1)^2-2(x-1)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(x+1)-2(x-1)\right]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1-2x+2)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(3-x)}{(x+1)^4}=\frac{3-x}{(x+1)^4}.$$

Συνεπώς, το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από τα πρόσημα των παραγόντων $3-x$ και $(x+1)^3$. Αναλύουμε τα πρόσημα αυτών των παραγόντων, επομένως και το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(x+1)^3$	$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,3]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$.

Σημείωση:

Στον υπολογισμό της παραγώγου, εάν δεν παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και, αντίθετα, εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε θα καταλήξουμε στην έκφραση

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{(x+1)^4}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f', πρέπει να προσδιορίσουμε το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+2x+3$. Ο ευκολότερος τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι με τη χρήση της θεωρίας για το πρόσημο τριωνύμου από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. Θα ήταν καλό να γίνει μια υπενθύμιση αυτής της θεωρίας σε περίπτωση που δεν τη θυμόμαστε.

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\neq -1$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{3-x}{(x+1)^3}\right)'=\frac{(3-x)'(x+1)^3-(3-x)\left((x+1)^3\right)'}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)^3-3(3-x)(x+1)^2(x+1)'}{(x+1)^6}=\frac{-(x+1)^3-3(3-x)(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)^2\left[(x+1)+3(3-x)\right]}{(x+1)^6}=-\frac{x+1+3(3-x)}{(x+1)^4}=-\frac{10-2x}{(x+1)^4}=\frac{2(x-5)}{(x+1)^4}.$$

Το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα $x-5$, καθώς ο παρονομαστής $(x+1)^4$ είναι θετικός για κάθε $x\neq 1$. Σχηματίζουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα κυρτότητας:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\frown$		$\smile$

- Η γραφική παράσταση C_f έχει ένα μοναδικό σημείο καμπής, το σημείο

$$\boxed{K(5,f(5))\equiv\left(5,\frac{1}{9}\right)}$$

B3. Αναζητούμε αρχικά κατακόρυφες ασύμπτωτες. Το μοναδικό σημείο στο οποίο έχει νόημα να το κάνουμε αυτό είναι το $x_1=1$, καθώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = +\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο παρονομαστής $(x+1)^2$ είναι θετικός για κάθε $x \neq 1$. Έπεται ότι η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, και μάλιστα η μοναδική.

Σημείωση:

Υπολογίσαμε μόνο το όριο από τα δεξιά, διότι ο ορισμός της κατακόρυφης ασύμπτωτης απαιτεί τουλάχιστον ένα πλευρικό όριο να είναι ίσο με $\pm\infty$, όχι απαραίτητα και τα δύο (σελ. 161 του σχολικού βιβλίου). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το αριστερό πλευρικό όριο ισούται με $-\infty$, οπότε θα μπορούσαμε να είχαμε συμπεράνει το ζητούμενο υπολογίζοντας εκείνο. Δεν χρειάζεται όμως να υπολογίσουμε και τα δύο.

Αναζητούμε τώρα οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και το $-\infty$.

- Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα μεγιστοβάθμιων όρων για το όριο πηλίκου πολυώνυμων στο $\pm\infty$ (σελ. 67 του σχολικού βιβλίου). Έπεται έτσι ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Για το $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

εντελώς όμοια με πριν. Επομένως, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

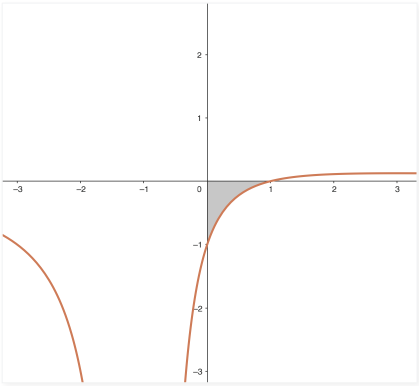
Εφόσον η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και το $-\infty$, αποκλείεται να έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Β4. Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\frac{x-1}{(x+1)^2}\right| dx.$$

Για $x \in [0,1]$, η f είναι αρνητική ή μηδέν (μηδενίζεται στο $x_1 = 1$), οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται χωρίς απόλυτες τιμές ως

$$\int_0^1 \frac{1-x}{(x+1)^2}dx.$$



Αυτό το ολοκλήρωμα δεν είναι ιδιαίτερα περίπλοκο, αλλά κάποιος μπορεί να δυσκολευτεί λόγω των υπολογισμών. Μια κίνηση που απλοποιεί πολύ τα πράγματα είναι να θέσουμε $y = x+1$, καθώς αυτό φέρνει τον παρονομαστή σε απλούστερη μορφή. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x = 0$ είναι $y = 0+1 = 1$
- Για $x = 1$ είναι $y = 1+1 = 2$.

Ισχύει επίσης $dy = (x+1)' dx = dx$. Επίσης, το x γράφεται συναρτήσει του y ως $x = y-1$. Το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται λοιπόν στη μορφή

$$\int_1^2 \frac{1-(y-1)}{y^2}dy = \int_1^2 \frac{2-y}{y^2}dy = \int_1^2 \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = \left[-\frac{2}{y} - \ln y\right]_1^2$$

$$= (-1-\ln 2) - (-2-\ln 1) \; \boxed{= 1-\ln 2.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' - (\ln x)' - (3)' = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x},$$

οπότε η παράγωγος είναι θετική όταν $\sqrt{x} - 1 > 0$, δηλαδή όταν $x > 1$ (ο παρονομαστής είναι θετικός, αφού το x παίρνει μόνο θετικές τιμές). Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f έχει ακριβώς μία θέση ολικού ακροτάτου, και συγκεκριμένα τη $x=1$. Σε αυτήν τη θέση η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=-1$. Πράγματι, αν $x\in(0,1]$, τότε $f(x)\geq f(1)$, καθώς f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ, αν $x\in[1,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(1)$, καθώς f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ έχουμε $f(x)\geq f(1)$.

Γ2. Λόγω της συνέχειας της f και του πίνακα μονοτονίας που έχουμε από το προηγούμενο ερώτημα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εικόνες των διαστημάτων $(0,1]$ και $[1,+\infty)$ μέσω της f.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$, οπότε ισχύει

$$f\left((0,1]\right)=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right).$$

Έχουμε $f(1)=-1$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}-\ln x-3\right)=2\cdot 0-(-\infty)-3=+\infty.$$

Επομένως, $f\left((0,1]\right)=[-1,+\infty)$.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, οπότε ισχύει

$$f\left([1,+\infty)\right)=\left[f(1),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right). \qquad (1)$$

Έχουμε $f(1)=-1$ και

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(2\sqrt{x}-\ln x-3\right)$$

Εμφανίζεται λοιπόν εδώ η απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\infty$. Ένας κλασικός τρόπος να προσδιορίζουμε τέτοια όρια είναι να μετατρέπουμε τη διαφορά σε πηλίκο, καθώς στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Πιο συγκεκριμένα, αγνοώντας προσωρινά τη σταθερά -3, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(2-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right).$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τώρα το όριο του πηλίκου. Αυτό έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$, οπότε, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Άρα το αρχικό όριο ισούται με

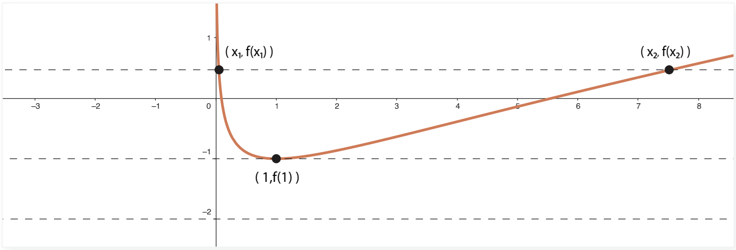
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\left(2-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)-3\right]=(+\infty)\cdot(2-0)-3=+\infty.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (1) ότι $f\left([1,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$.

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ είναι το πλήθος των σημείων τομής της C_f με την οριζόντια ευθεία $y=\alpha$.

Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, είναι χρήσιμο να σχεδιάζουμε μια πολύ πρόχειρη γραφική παράσταση της C_f, με βάση το σύνολο τιμών που έχουμε βρει, ώστε να διαπιστώσουμε έτσι το πλήθος αυτών των σημείων τομής. Εδώ θα παραθέσουμε τη λεπτομερή γραφική παράσταση, αλλά στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται ιδιαίτερη λεπτομέρεια: Αρκεί να απεικονίζονται οι πληροφορίες του συνόλου τιμών.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Επιπλέον, έχουμε σχεδιάσει την οριζόντια ευθεία $y=\alpha$ για τρεις διαφορετικές τιμές του α.



Παρατηρούμε ότι για $\alpha > -1$ υπάρχουν δύο σημεία τομής (μπλέ ευθεία). Για $\alpha = -1$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο τομής (πορτοκαλί ευθεία), ενώ για $\alpha < -1$ δεν υπάρχει κανένα σημείο τομής. Αντίστοιχα μπορούμε να περιγράψουμε και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$. Πιο αναλυτικά:

- Για $\alpha > -1$ έχουμε ότι $\alpha \in f((0,1])$ και $\alpha \in f([1,+\infty))$, επομένως υπάρχουν $x_1 \in (0,1]$ και $x_2 \in [1,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$. Αυτά τα σημεία είναι μοναδικά διότι η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα υποδιαστήματα $(0,1]$ και φυσικά αποκλείεται να είναι κάποιο από τα x_1, x_2 ίσο με 1, διότι τότε θα ίσχυε

$$\alpha = f(x_1) = f(1) = -1 < \alpha,$$

  το οποίο είναι προφανώς άτοπο (και αντίστοιχα για το x_2). Υπάρχουν λοιπόν δύο ακριβώς λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ σε αυτήν την περίπτωση.

- Για $\alpha = -1$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$. Πράγματι, είδαμε προηγουμένως ότι η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο το $f(1) = -1$, το οποίο είναι μάλιστα και ολικό ελάχιστο. Λόγω της γνήσιας μονοτονίας της σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1]$ και $[1,+\infty)$, η f αποκλείεται να λαμβάνει την τιμή -1 σε κάποιο άλλο σημείο.

- Για $\alpha < -1$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση. Πράγματι, είδαμε ότι $f((0,1]) = [-1,+\infty)$ και $f([1,+\infty)) = [-1,+\infty)$, οπότε η f λαμβάνει αποκλειστικά τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του -1. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, δεν μπορεί να πάρει την τιμή α.

Γ3. Ισχύει

$$g'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \ln x - 3}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να κάνουμε αντιπαραγώγιση, γράφοντας το δεξιό μέλος στη μορφή της παραγώγου κάποιας συνάρτησης. Αυτό όμως χρειάζεται φαντασία, αφού δεν είναι τελείως ξεκάθαρο πώς μπορούμε να γράψουμε την ποσότητα

$$1 - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

σαν παράγωγο κάποιας συνάρτησης.

Ένας πιο εύκολος τρόπος να αποδείξουμε το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε αρχικά ότι η παράγωγος της συνάρτησης

$$h(x) = g(x) - \left[x - \sqrt{x}(\ln x + 1)\right] = g(x) - x + \sqrt{x}(\ln x + 1)$$

είναι ίση με μηδέν για κάθε $x>0$. Αυτό θα μας έδινε ότι η h είναι σταθερή. Γνωρίζουμε ότι $g(1)=0$, άρα μπορούμε να δείξουμε ότι $h(1)=0$. Έτσι, εφόσον η h είναι σταθερή, προκύπτει ότι $h(x)=0$ για κάθε $x>0$. Άρα θα πάρουμε ότι $g(x)=x-\sqrt{x}(\ln x+1)$ για κάθε $x>0$, που είναι το ζητούμενο.

Αυτή η στρατηγική είναι χρήσιμη από τη στιγμή που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ο τύπος στον οποίο πρέπει να καταλήξουμε. Το μόνο που μας μένει λοιπόν είναι να αποδείξουμε το αρχικό βήμα που περιγράψαμε, δηλαδή ότι για κάθε $x>0$. Από τον τύπο που μας έχει δοθεί για την παράγωγο $g'(x)$ έχουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
h'(x)=g'(x)-(x)'+\left[\sqrt{x}(\ln x+1)\right]' &= g'(x)-(x)'+\left(\sqrt{x}\right)'(\ln x+1)+\sqrt{x}(\ln x+1)' \\
&= \left(1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+1)+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} \\
&= 1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}-1+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

Εδώ παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι διαγράφονται μεταξύ τους, οπότε έχουμε πράγματι ότι $h'(x)=0$ για κάθε $x>0$, άρα η h είναι σταθερή. Είναι

$$h(1)=g(1)-1+\sqrt{1}(\ln 1+1)=0,$$

άρα, όπως περιγράψαμε και παραπάνω, $h(x)=0$ για κάθε $x>0$. Γράφοντας τον ορισμό της h, παίρνουμε τον ζητούμενο τύπο για τη g.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $g(x)>0$ ή ισοδύναμα ότι

$$x>\sqrt{x}(\ln x+1)\Leftrightarrow\sqrt{x}>\ln x+1,$$

όπου η ισοδυναμία προκύπτει διαιρώντας με τη θετική ποσότητα $\sqrt{x}$. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $\phi(x)=\sqrt{x}-\ln x-1$ για $x\in(0,1]$. Η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων, με

$$\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}.$$

Καθώς έχουμε θεωρήσει ότι $x\in(0,1]$, θα είναι $\sqrt{x}-2<0$, άρα $\phi'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Επομένως, η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Παρατηρούμε ότι $\phi(1)=\sqrt{1}-\ln 1-1=0$, άρα για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\phi(x)>\phi(1)=0$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θα παρατηρήσατε ότι, παρότι μας ζητείται να αποδείξουμε μία σχέση για $x \in (0,1)$, εμείς ορίσαμε τη συνάρτηση στο $(0,1]$, δηλαδή και στο σημείο $x_1 = 1$. Αυτό το κάναμε για να μπορέσουμε στο τέλος να συγκρίνουμε τις τιμές της ϕ με το $\phi(1)$ και να ολοκληρώσουμε εύκολα την απόδειξη. Διαφορετικά, δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε $\phi(1)$ και η απόδειξη θα γινόταν πιο περίπλοκη.

Αυτό φυσικά είναι κάτι που μπορεί να διαπιστώσουμε καθώς λύνουμε την άσκηση: Μπορεί δηλαδή αρχικά να έχουμε ορίσει τη συνάρτηση στο $(0,1)$, αλλά στη συνέχεια να διαπιστώσουμε ότι θα ήταν πολύ βολικό αν αυτή οριζόταν και στο $x_1 = 1$. Δεν διστάζουμε φυσικά σε μια τέτοια περίπτωση να πάρουμε την πρωτοβουλία να αλλάξουμε ελαφρώς τον ορισμό και να συνεχίσουμε τη λύση κανονικά χωρίς να αλλάξουμε τίποτε άλλο.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $e^{2x} > 1$, οπότε

$$f'(x) + \eta\mu(f(x)) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > 1 - \eta\mu(f(x)).$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ημίτονο παίρνει τιμές μικρότερες του 1, άρα θα είναι $1 - \eta\mu(f(x)) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ – στην πραγματικότητα αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως σε αυτό το ερώτημα θέλουμε να αποδείξουμε το ζητούμενο μόνο για $x \geq 0$, οπότε επικεντρωνόμαστε σε αυτές τις τιμές του x.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $x > 0$ είναι $f'(x) > 1 - \eta\mu(f(x)) \geq 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Στο $x_0 = 0$ η f είναι συνεχής (εξ υποθέσεως είναι παραγωγίσιμη), άρα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $[0,+\infty)$, όπως θέλαμε.

Δ2. Στη σχέση $f'(x) + \eta\mu(f(x)) = e^{2x}$, όλες οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (η f έχει υποτεθεί δύο φορές παραγωγίσιμη). Μπορούμε λοιπόν να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης, οπότε θα προκύψει

$$f''(x) + \left(\eta\mu(f(x))\right)' = \left(e^{2x}\right)'.$$

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, αυτή η σχέση γράφεται

$$f''(x) + f'(x)\sigma\upsilon\nu(f(x)) = 2e^{2x}.$$

Ισοδύναμα,

$$f''(x)=2e^{2x}-f'(x)\sigma\upsilon\nu(f(x))=2e^{2x}-\left(e^{2x}-\eta\mu(f(x))\right)\sigma\upsilon\nu(f(x))$$
$$=e^{2x}\left(2-\eta\mu(f(x))\right)+\eta\mu(f(x))\sigma\upsilon\nu(f(x)).$$

Ισχύει $2-\eta\mu(f(x))\geq 1$ και $\eta\mu(f(x))\sigma\upsilon\nu(f(x))\geq -1$, καθώς και οι δύο παράγοντες παίρνουν τιμές στο $[-1,1]$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι

$$f''(x)\geq e^{2x}\cdot 1-1=e^{2x}-1.$$

Για $x>0$ είναι $e^{2x}>1$, οπότε $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Στο παραπάνω επιχείρημα, η f'' είναι θετική στο ανοιχτό διάστημα $(0,+\infty)$, όμως ισχυριστήκαμε ότι η f είναι κυρτή σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος της σελ. 156 του σχολικού βιβλίου, σύμφωνα με το οποίο αρκεί να είναι η f'' θετική μόνο στο εσωτερικό του διαστήματος για να αποδειχτεί η κυρτότητα.

Δ3. Αρχικά, είναι εύκολο να δούμε ότι για $x=0$ η διπλή ανισότητα ισχύει, καθώς $f(0)=0$. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, θα ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Έχουμε εξηγήσει και σε άλλα θέματα πιο πάνω ότι για κάθε $y>0$ ισχύει $\eta\mu y<y$. Θα εξηγήσουμε για άλλη μία φορά γιατί ισχύει αυτό. Θυμόμαστε αρχικά ότι:

- Για κάθε $y\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu y|\leq|y|$. Αυτή η ανισότητα είναι γνωστή από τη θεωρία (σελ. 52 του σχολικού βιβλίου). Η ισότητα ισχύει μόνο για $y=0$, οπότε για $y\neq 0$ ισχύει $|\eta\mu y|<|y|$.
- Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι $\alpha\leq|\alpha|$. Αυτή η ανισότητα είναι γνωστή από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου.

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα (το δεύτερο για $\alpha=\eta\mu y$) και λαμβάνοντας υπόψη ότι για $y>0$ ισχύει $|y|=y$, παίρνουμε ότι για $y>0$ είναι

$$\eta\mu y\leq|\eta\mu y|<|y|=y,$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Αφού για $x>0$ ισχύει $f(x)>0$, έπεται από το παραπάνω αποτέλεσμα (για $y=f(x)>0$) ότι $\eta\mu(f(x))<f(x)$ για κάθε $x>0$. Θα είναι λοιπόν

$$e^{2x} = f'(x) + \eta\mu(f(x)) < f'(x) + f(x)$$

για κάθε $x>0$. Θα προσπαθήσουμε τώρα να σχηματίσουμε μια παράγωγο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης. Μια γνωστή στρατηγική για να το κάνουμε αυτό είναι ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών με e^x. Θα προκύψει έτσι

$$e^{3x} < e^x f'(x) + e^x f(x).$$

Πλέον, το δεύτερο μέλος είναι η παράγωγος της συνάρτησης $e^x f(x)$ λόγω του κανόνα του γινομένου. Το αριστερό μέλος είναι ίσο με την παράγωγο της συνάρτησης $e^{3x}/3$ λόγω του κανόνα της αλυσίδας. Η σχέση λοιπόν γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' < \left(e^x f(x)\right)' \Leftrightarrow \left(e^x f(x) - \frac{1}{3}e^{3x}\right)' > 0$$

για κάθε $x>0$. Λόγω συνέχειας, έπεται ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^x f(x) - \frac{1}{3}e^{3x}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = -\frac{1}{3}$, άρα, λόγω μονοτονίας, θα ισχύει $g(x) > -\frac{1}{3}$ για κάθε $x>0$. Ισοδύναμα,

$$\boxed{f(x) > \frac{1}{3}\left(e^{2x} - e^{-x}\right) \text{ για κάθε } x>0 \text{, όπως θέλαμε.}}$$

Δ4. Ας υποθέσουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει και είναι ίσο με έναν πραγματικό αριθμό ρ. Ισχύει $f'(x) = e^{2x} - \eta\mu(f(x))$, οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - \eta\mu(f(x))\right) = \ = 0 - \eta\mu(\rho) \ = -\eta\mu(\rho). \qquad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι $\eta\mu(\rho) \neq 0$. Υπάρχουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

- $\eta\mu(\rho) > 0$:

  Σε αυτήν την περίπτωση, θα ισχύει για x κοντά στο $-\infty$ ότι $f'(x) < -\frac{\eta\mu\rho}{2}$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

  Από την (1) προκύπτει ότι

Αυτό προκύπτει από το θεώρημα 1 στη σελ. 47 του σχολικού βιβλίου, καθώς και από την παρατήρηση στην αρχή της σελ. 66, η οποία εξασφαλίζει ότι οι ιδιότητες των ορίων εξακολουθούν να ισχύουν και για όρια στα $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f'(x) + \frac{\eta\mu(\rho)}{2}\right) = -\eta\mu(\rho) + \frac{\eta\mu(\rho)}{2} \ = -\frac{\eta\mu(\rho)}{2} < 0,$$

άρα για x κοντά στο $-\infty$ είναι $f'(x)+\eta\mu(\rho)/2<0$, η ισοδύναμα

$$f'(x)<-\frac{\eta\mu(\rho)}{2},$$

όπως ακριβώς ισχυριστήκαμε. Η φράση «κοντά στο $-\infty$» δηλώνει ότι η ιδιότητα $f'(x)<-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}$ ισχύει σε κάποιο διάστημα της μορφής $(-\infty,-M]$, όπου M ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Συμπεραίνουμε ότι, στο διάστημα $(-\infty,-M]$, η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+\frac{\eta\mu(\rho)}{2}x$$

είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η παράγωγός της είναι η

$$g'(x)=f'(x)+\frac{\eta\mu(\rho)}{2}<0.$$

Άρα για $x<-M$ ισχύει

$$g(x)>g(-M)=f(-M)-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}M$$

ή ισοδύναμα

$$f(x)>\left(f(-M)-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}M\right)-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}x$$

Ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι σταθερός και ο τελευταίος όρος έχει όριο

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}x\right)=-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}(-\infty)=+\infty,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση $\eta\mu(\rho)>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, στην πιο πάνω ανισότητα, το δεξιό μέλος τείνει στο $+\infty$, καθώς $x\to-\infty$. Εφόσον η $f(x)$ στο αριστερό μέλος είναι ακόμη μεγαλύτερη από το δεξιό μέλος, θα ισχύει αναγκαστικά $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς έχουμε υποθέσει ότι το $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\rho\in\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν μπορεί να ισχύει $\eta\mu(\rho)>0$.

- $\eta\mu(\rho)<0$:

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο εντελώς όμοια με την πρώτη περίπτωση. Παραλείπουμε το επιχείρημα, καθώς είναι πανομοιότυπο με αυτό που αναλύσαμε πιο πάνω.

Από τα παραπάνω έπεται ότι αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $\eta\mu(\rho)=0$. Οι λύσεις αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{\kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z}\}$. Άρα το όριο ρ θα πρέπει να είναι ένα στοιχείο αυτού του συνόλου.

Διαγώνισμα 4.21

ΘΕΜΑ Α

Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 34.

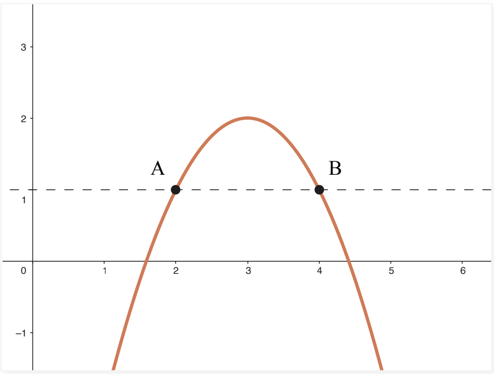
A4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Εκτός από την ύπαρξη του ορίου, πρέπει επιπλέον αυτό το όριο να είναι ίσο με $f(x_0)$. Δείτε τον ορισμό της συνέχειας στη σελ. 70 του σχολικού βιβλίου.

ii. Η ευθεία $y = x$ έχει κλίση 1. Η παράγωγος σε ένα σημείο αναπαριστά την κλίση της εφαπτομένης ευθείας, οπότε, για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην $y = x$, θα πρέπει να ισχύει $f'(x_0) = 1$.

iii. Δύο διαφορετικά σημεία με την ίδια τετμημένη δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση **καμίας** συνάρτησης. Αυτό έπεται άμεσα από τον ορισμό της συνάρτησης. Αν υπήρχαν δύο τέτοια σημεία, έστω (x_0, α) και $(x_0,)$, τότε θα ίσχυε $f(x_0) = \alpha$ και $f(x_0) = \beta$, οπότε τελικά θα ίσχυε $\alpha = \beta$ και επομένως θα επρόκειτο για το ίδιο σημείο και όχι για δύο διαφορετικά. Μια συνάρτηση είναι «1-1» αν επιπλέον δεν υπάρχουν στη γραφική της παράσταση δύο σημεία με την ίδια **τεταγμένη.** Για παράδειγμα, η συνάρτηση του διπλανού σχήματος δεν είναι «1-1», καθώς τα διαφορετικά σημεία A, B έχουν την ίδια τεταγμένη.



iv. Η σωστή έκφραση του εμβαδού είναι $\int_0^1 |f(x)|dx$, καθώς το εμβαδόν είναι πάντοτε θετικός αριθμός, ακόμη και αν η f παίρνει αρνητικές τιμές.

v. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} ημx$ δεν υπάρχει, καθώς το $ημx$ είναι περιοδική συνάρτηση και δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό (ούτε φυσικά στο $+\infty$ ή το $-\infty$, καθώς το ημίτονο παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1).

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Μπορούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο με δύο τρόπους: Ο απλούστερος είναι να υπολογίσουμε την παράγωγο της g. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει $g'(x)=e^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα λοιπόν βλέπουμε ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να θεωρήσουμε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και να αποδείξουμε ότι $g(x_1)<g(x_2)$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{x_1}<e^{x_2}$. Ο δεύτερος τρόπος εδώ ίσως είναι λίγο πιο χρονοβόρος, αλλά είναι πιο γενικός, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για συναρτήσεις που ίσως να μην είναι παραγωγίσιμες.

Β2. Μια συνήθης στρατηγική θα ήταν να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης που μας έχει δοθεί, αλλά δυστυχώς αυτό δε θα ήταν σωστό, διότι δεν γνωρίζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη. Θεωρούμε λοιπόν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.

Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $f(x_1)\ge f(x_2)$. Σε αυτή την περίπτωση θα ίσχυε επίσης ότι

$$f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$$

Οι περιττές δυνάμεις (3,5,..) διατηρούν τη διάταξη. Οι άρτιες το κάνουν μόνο για θετικούς αριθμούς.

οπότε με πρόσθεση των δύο ανισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι $f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2)$. Η αρχική σχέση όμως τώρα δίνει $e^{x_1}+x_1-1\ge e^{x_2}+x_2-1$, δηλαδή, σύμφωνα με τον συμβολισμό του Ερωτήματος Β1, $g(x_1)\ge g(x_2)$. Η g όμως είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $x_1\ge x_2$, το οποίο είναι άτοπο διότι έχουμε υποθέσει πως $x_1<x_2$. Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $f(x_1)\ge f(x_2)$, άρα συμπεραίνουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β3. Για τη συνάρτηση g του Ερωτήματος Β1 παρατηρούμε ότι $g(0)=0$. Καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμου για την g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Η δοσμένη σχέση γράφεται $f^3(x)+f(x)=g(x)$. Παραγοντοποιώντας το πρώτο μέλος, προκύπτει ότι $f(x)\left(f^2(x)+1\right)=g(x)$. Καθώς ο δεύτερος παράγοντας του πρώτου μέλους είναι θετικός για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι το πρόσημο του πρώτου παράγοντα, δηλαδή της f, είναι ίδιο με το πρόσημο της g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

B4. Είδαμε παραπάνω ότι $f(0)=1$. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μια εκτίμηση για το $f(1)$.

Ας σκεφτούμε όμως πρώτα τι θέλουμε να αποδείξουμε για το $f(1)$. Το ζητούμενο της άσκησης μας παραπέμπει στο θεώρημα Bolzano ή το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.). Για να χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο, θα έπρεπε ιδανικά να αποδείξουμε ότι $f(1)>1$. Αυτό ακριβώς θα προσπαθήσουμε να κάνουμε.

Πολλές φορές βοηθάει να προσπαθούμε να σκεφτούμε *πίσω από την άσκηση*. Να απλοποιούμε δηλαδή το ζητούμενο, όπως, π.χ., εδώ το μετατρέψαμε στη συνθήκη $f(1)>1$.

Για $x=1$ στην αρχική σχέση, προκύπτει ότι $f^3(1)+f(1)=e$. Θυμηθείτε ότι θέλουμε να δείξουμε πως $f(1)>1$. Ας προσπαθήσουμε με απαγωγή σε άτοπο. Αν ήταν $f(1)\leq 1$, τότε θα ίσχυε επίσης $f^3(1)\leq 1$. Άρα, αθροίζοντας αυτά τα δύο, προκύπτει ότι

$$f^3(1)+f(1)\leq 2<e$$

το οποίο είναι άτοπο, καθώς είδαμε πριν ότι $f^3(1)+f(1)=e$. Έπεται λοιπόν έτσι ότι $f(1)>1$. Το Θ.Ε.Τ. εφαρμόζεται:

- Η f είναι συνεχής.
- $f(0)\neq f(1)$, καθώς $f(0)=0$ και $f(1)>1$.
- $f(0)<1<f(1)$.

Προκύπτει λοιπόν ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$. Από τη μονοτονία της f έπεται ότι αυτό το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$f'(x)\left(f'(x)+2\right)=2x^2+3x+\frac{9}{8}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το τριώνυμο του δεύτερου μέλους είναι μη αρνητικό για κάθε τιμή του x, διότι η διακρίνουσά του είναι ίση με

$$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot\frac{9}{8}=0$$

και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ίσος με $2>0$. Αυτό το τριώνυμο έχει μοναδική ρίζα το $x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{3}{4}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι και το αριστερό μέλος, δηλαδή η παράσταση $f'(x)\left(f'(x)+2\right)$, είναι μη αρνητική για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η $f'(x)$ δεν μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $(-2,0)$ διότι τότε ο πρώτος παράγοντας $f(x)$ θα ηταν αρνητικός, ενώ ο δεύτερος, $f(x)+2$, θα ήταν θετικός, με αποτέλεσμα το γινόμενο να είναι αρνητικό.

Άρα η f' παίρνει τιμές στο σύνολο $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. Αναγκαστικά όμως πρέπει να παίρνει τιμές μόνο στο ένα από αυτά τα δύο υποδιαστήματα, καθώς σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή έπαιρνε τιμές και στα δύο, θα έπρεπε να παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Αυτό έπεται από το Θ.Ε.Τ., καθώς γνωρίζουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη). Είναι αδύνατον όμως η f' να παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές, δεν μπορεί, για παράδειγμα, να πάρει την τιμή -1. Άρα είτε θα ισχύει $f'(x)\le -2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είτε $f'(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όμως μας έχει δοθεί ότι $f'\left(-\frac{3}{4}\right)=0$, άρα θα ισχύει $f'(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, μας έχει δοθεί ότι $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\ne -\frac{3}{4}$, άρα, εφόσον έχουμε δείξει ότι η f' παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\ne-\frac{3}{4}$. Καθώς η f είναι συνεχής στο $x_0=-\frac{3}{4}$, έπεται τώρα από τη θεωρία ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Θεώρημα στη σελ. 144. Πολύ χρήσιμο όταν η παράγωγος δεν είναι παντού θετική.

Γ2. Αν $x \geq 2$, τότε $2x^2 + 3x + \frac{9}{8} \geq 8 + 6 + \frac{9}{8} > 15.$

Αυτό συνεπάγεται λοιπόν ότι $(f'(x))^2 + 2f'(x) > 15$ για $x \geq 2$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα για ακόμη μία φορά απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει, ότι δηλαδή $f'(x) \leq 3$. Τότε, καθώς $f'(x) \geq 0$, προκύπτει ότι $(f'(x))^2 \leq 9$ (εδώ μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, διότι έχουμε μόνο θετικούς όρους –διαφορετικά, μόνο οι περιττές δυνάμεις διατηρούν τη διάταξη). Επιπλέον, $2f'(x) \leq 2 \cdot 3 = 6$. Με πρόσθεση κατά μέλη έπεται ότι $(f'(x))^2 + 2f'(x) \leq 9 + 6 = 15$ το οποίο είναι άτοπο, καθώς παραπάνω είδαμε ότι το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο του 15. Έπεται λοιπόν έτσι ότι $f'(x) > 3$ για $x \geq 2$.

Γ3. Θεωρούμε τυχόν $x > 2$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (2, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

Από το Ερώτημα Γ2 έπεται ότι $f'(\xi) > 3$, οπότε $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > 3$. Κάνοντας τους υπολογισμούς, παίρνουμε ότι $f(x) > 3x - 6 + f(2)$. Είδαμε πρωτύτερα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f(2) > f(0) = 1$. Άρα

$$f(x) > 3x - 6 + f(2) > 3x - 6 + 1 \boxed{= 3x - 5.}$$

Γ4. Καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, μπορούμε να παραγωγίσουμε την αρχική σχέση. Παίρνουμε $2f'(x)f''(x) + 2f''(x) = 4x + 3$, η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$2f''(x)(f'(x) + 2) = 4x + 3.$$

Σύμφωνα με το Γ1, η παρένθεση είναι θετικός αριθμός, άρα το πρόσημο της $f''(x)$ είναι ίδιο με το πρόσημο του $4x + 3$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$		$-3/4$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

ΘΕΜΑ Δ

Λύση

Δ1. Από τον ορισμό της f προκύπτει ότι $f(0)=0$, επομένως θέλουμε αρχικά να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Θα εξετάσουμε τα δύο πλευρικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-e^{-x}\right)=1-e^{-0}=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Αυτό έχει την απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$. Μια τυπική τεχνική για τον υπολογισμό τέτοιων ορίων (απροσδιόριστη μορφή με τη μορφή γινομένου) είναι να τα μετατρέπουμε σε πηλίκο και να χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital. Γράφουμε λοιπόν

> Αντί για $\frac{\ln x}{1/x}$, θα μπορούσε κανείς να μετατρέψει το γινόμενο και σε . Σε αυτές τις περιπτώσεις, σκεπτόμενοι ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital, επιλέγουμε τη μορφή που οδηγεί στις πιο εύκολες παραγωγίσεις. Εδώ αυτή είναι προφανώς η πρώτη $\frac{x}{1/\ln x}$, καθώς ο όρος $1/\ln x$ που περιέχεται στη δεύτερη δεν έχει και την πιο απλή παράγωγο και επιπλέον δημιουργεί και πιο δύσκολο όριο! Φυσικά, αν κάποια φορά διαπιστώσουμε ότι η μορφή που έχουμε επιλέξει δεν λειτουργεί, μπορούμε πάντοτε να δοκιμάσουμε και την άλλη.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0,$$

οπότε και το δεξί όριο είναι ίσο με μηδέν.

Αφού και τα δύο όρια είναι ίσα με $0=f(0)$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Για να αποδείξουμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη, κοιτάζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Κι εδώ θα κοιτάξουμε τα πλευρικά όρια: Το δεξί όριο γράφεται στη μορφή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

που δεν είναι πραγματικός αριθμός. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, χωρίς καν να χρειαστεί να υπολογίσουμε το αριστερό πλευρικό όριο.

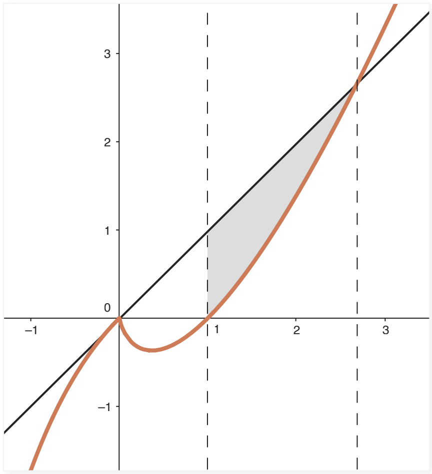
Δ2. Ένα σημείο τομής είναι ξεκάθαρα το $O(0,0)$. Για $x>0$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x\ln x=x$, η οποία γράφεται $\ln x=1$ και έχει μοναδική λύση την $x=e$ με σημείο τομής το $A(e,e)$.

Για $x<0$ θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία τομής, δηλαδή ότι η εξίσωση

$$1-e^{-x}=x \quad (1)$$

δεν έχει λύσεις στο $(-\infty,0)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $e^{x}\geq x+1$, η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στην οποία η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Αντικαθιστώντας $-x$ στη θέση του x, αυτή η ανισότητα γίνεται $e^{-x}\geq -x+1$ ή ισοδύναμα $1-e^{-x}\geq x$. Η ισότητα όμως εδώ ισχύει μόνο για $-x=0$, δηλαδή για $x=0$. Για $x<0$ ισχύει επομένως η γνήσια ανισότητα $1-e^{-x}>x$, άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)$.

Δ3. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που μας ζητείται, θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος. Σε ερωτήματα εύρεσης εμβαδού, καλό είναι να σχεδιάζουμε ένα πρόχειρο σχήμα για να έχουμε μια άποψη του χωρίου που θέλουμε να μετρήσουμε. Παραθέτουμε εδώ ένα πιο ακριβές σχήμα, αν και η λεπτομέρεια συνήθως δεν είναι ζωτικής σημασίας σε τέτοια ερωτήματα.



Σύμφωνα με το Ερώτημα Γ2 και το παραπάνω σχήμα, το εμβαδόν που πρέπει να υπολογίσουμε είναι ίσο με

$$E=\int_1^e |f(x)-x|dx=\int_1^e |x\ln x-x|dx.$$

Για $x\in(1,e)$ ισχύει $\ln x<1$ άρα $x\cdot\ln x<x$. Επομένως, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$E=\int_1^e (x-x\ln x)dx=\int_1^e x dx-\int_1^e x\ln x dx. \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε τώρα το κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά:

- $\displaystyle\int_1^e x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}.$
- Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e \frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς, έπεται από τη σχέση (1) ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$\boxed{\frac{e^2-1}{2}-\frac{e^2+1}{4}=\frac{e^2-3}{4}.}$$

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_\alpha): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Για $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1,$$

οπότε, αφού $\alpha>0$, η εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται

$$y-\alpha\ln\alpha=(\ln\alpha+1)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=(\ln\alpha+1)x-\alpha.$$

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=(\ln\alpha+1)x-\alpha$ έχει ακριβώς μία ακόμα λύση εκτός της προφανούς $x=\alpha$.

- Για $x>0$ η εξίσωση αυτή δεν έχει λύσεις. Ένας τρόπος να το δούμε αυτό είναι να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Πράγματι,

$$f''(x)=(f'(x))'=(1+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$$

  αριθμός ο οποίος είναι θετικός για $x>0$. Εφόσον λοιπόν η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα δεν υπάρχουν άλλα κοινά σημεία της C_f με την ε_α για $x>0$.

- Πρέπει επομένως να δείξουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση για $x<0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση γράφεται

$$1-e^{-x}=(\ln\alpha+1)x-\alpha$$

  Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$g(x)=1-e^{-x}-(\ln\alpha+1)x+\alpha$$

για $x \le 0$. Αυτή είναι προφανώς παραγωγίσιμη και για κάθε $x \le 0$ ισχύει

$$g'(x) = e^{-x} - \ln\alpha - 1. \quad (3)$$

Καθώς $\alpha < 1/e$, θα ισχύει ότι

$$\ln\alpha < -1 \Rightarrow -\ln\alpha - 1 < 0 \quad (4)$$

Εφόσον $e^{-x} > 0$, έπεται από τις (3), (4) ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \le 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Όντας συνεχής, έχει σύνολο τιμών το

$$g((-\infty,0]) = \left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right]. \quad (5)$$

Ισχύει $g(0) = \alpha$, οπότε μένει να υπολογίσουμε το όριο της g στο $-\infty$. Είναι

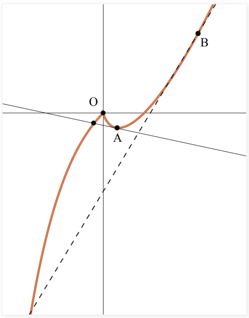
$$\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right) \overset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(-e^{y}\right) = -\infty \quad (6)$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}(\ln\alpha+1)x = (\ln\alpha+1)(-\infty) = +\infty, \quad (7)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο $\ln\alpha+1$ είναι αρνητικός [όπως εξηγήσαμε και λίγο παραπάνω, στη σχέση (4)]. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6) και (7), παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - e^{-x} - (\ln\alpha+1)x + \alpha\right) = (-\infty) - (+\infty) + \alpha = -\infty$$



Έπεται τώρα από τη σχέση (5) ότι $g((-\infty,0]) = (-\infty,\alpha]$. Καθώς $\alpha > 0$, το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της g, άρα η g έχει ρίζα στο $(-\infty,0]$. Αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της g. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φαινόμενο που αποδείξαμε παραπάνω, δηλαδή ότι η εφαπτόμενη στο A τέμνει ξανά τη C_f σε μοναδικό σημείο.

Σημείωση:

Ο περιορισμός $\alpha \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$ δεν ήταν απόλυτα αναγκαίος. Στην πραγματικότητα, το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\alpha > 0$. Αυτό φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, όταν μετακινούμε το σημείο A στη θέση B. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη, αν και όχι δύσκολη, είναι αρκετά πιο χρονοβόρα διότι οι ιδιότητες μονοτονίας και ο υπολογισμός των ορίων είναι λιγότερο.

Διαγώνισμα 4.22

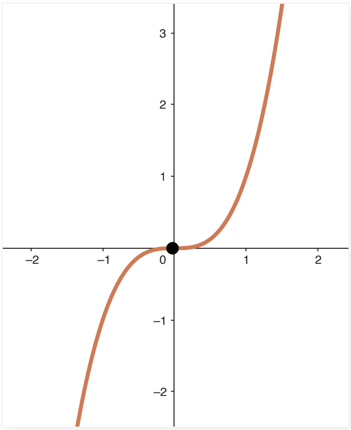
ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 162 (δεύτερος ορισμός).

Α3. i. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (Λ).

ii. Θα παραβάλουμε το εξής αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το σημείο $x_0=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(0)=3\cdot 0^2=0$. Σύμφωνα λοιπόν με τον ισχυρισμό, θα έπρεπε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο σημείο $x_0=0$. Όμως αυτό δεν ισχύει. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, στο $x_0=0$ η f δεν παρουσιάζει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο, καθώς για $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)$ (άρα το $f(0)$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο) και για $x<0$ ισχύει $f(x)<f(0)$ (άρα το $f(0)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστο). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.



Προσοχή!

Ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι σωστός, αρκεί το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο σε κάποιο διάστημα στο οποίο ορίζεται η f και η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

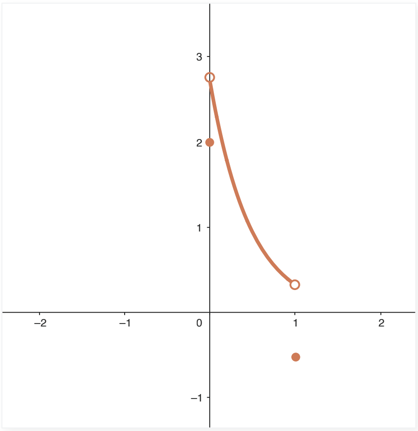
Αν ισχύουν δηλαδή αυτές οι προϋποθέσεις και η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. Αυτό είναι το θεώρημα του Fermat (δείτε το θεώρημα στη σελ. 142 του σχολικού βιβλίου).

Πρέπει λοιπόν να είμαστε προσεκτικοί σε ερωτήσεις Σ-Λ όσον αφορά το ποια από τις δύο κατευθύνσεις της συνεπαγωγής μάς δίνεται. Όπως είδαμε, η μία είναι σωστή (κάτω από τις υποθέσεις που αναφέραμε), αλλά η άλλη (που μας δόθηκε στο παραπάνω ερώτημα) είναι λάθος.

Α3. i) Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Η διατύπωση μοιάζει με το θεώρημα Bolzano, αλλά στο θεώρημα Bolzano υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε ολόκληρο το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν υποθέσουμε, όπως εδώ, ότι η συνάρτηση είναι απλώς συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α,β), τότε ενδεχομένως το συμπέρασμα να μην ισχύει, δηλαδή η f να μην έχει καμία ρίζα. Πράγματι, αν υποθέσουμε μόνο τη συνέχεια στο (α,β), τότε μπορεί η f να έχει ασυνέχειες στα άκρα α,β (σε τουλάχιστον ένα από αυτά). Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση του διπλανού σχήματος: Παρότι $f(0)f(1)<0$, η συνάρτηση πράγματι δεν έχει καμία ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$, αφού, όπως παρατηρούμε, είναι παντού θετική σε αυτό (αρνητική είναι μόνο στο άκρο $x_1=1$, όμως και πάλι ρίζες δεν έχει).



ii. Αυτή η πρόταση είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Rolle. Πράγματι:

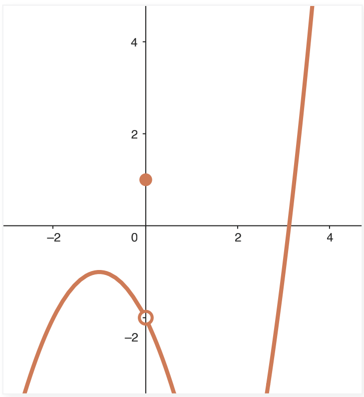
α. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ διότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ (άρα και συνεχής σε αυτό).

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, καθώς είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

γ. $f(0)=f(1)$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη. Άρα η πρόταση είναι αληθής.

iii. Το συμπέρασμα θα ήταν σωστό αν η f ήταν συνεχής, όμως η συνέχεια δεν περιέχεται στις υποθέσεις. Για παράδειγμα, η συνάρτηση μπορεί να είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα: Στην προκειμένη περίπτωση, είναι πράγματι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2<0$, όμως, αντίθετα, $f(0)=1>0$.



ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Θα αποδείξουμε μόνο την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0=1$. Ως γνωστόν, η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια της f, άρα έτσι θα έχουμε αποδείξει και τις δύο ιδιότητες. Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Για $x\neq 1$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}, \qquad (1)$$

όπου στο δεύτερο βήμα πολλαπλασιάσαμε αριθμητή και παρονομαστή με το $x-1$, ώστε να διώξουμε το κλάσμα από τον αριθμητή. Ενδιαφερόμαστε λοιπόν για το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}.$$

Όπως παρατηρούμε εύκολα, αυτό το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Είναι λοιπόν

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x-x+1)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{2(x-1)\cdot(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)}{2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(-\frac{x-1}{x}\right)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x-1}{2x(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Από τον τελευταίο υπολογισμό και από τη σχέση (1), έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1/2$. Όπως εξηγήσαμε και στην αρχή, η συνέχεια της f προκύπτει ως συνέπεια της παραγωγισιμότητάς της.

B2. Για $x\neq 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγός της είναι

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{(\ln x)'(x-1)-\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}==\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}. \qquad (2)$$

Ο παρονομαστής αυτού του κλάσματος είναι πάντοτε θετικός για $x \neq 1$, οπότε το πρόσημο εξαρτάται εξ ολοκλήρου από τον αριθμητή $\frac{1}{x}(x-1)-\ln x$. Θέτουμε λοιπόν

$$g(x)=\frac{x-1}{x}-\ln x$$

για $x>0$. Η g μπορεί απλούστερα να γραφτεί στη μορφή

$$g(x)=\frac{x}{x}-\frac{1}{x}-\ln x=1-\frac{1}{x}-\ln x.$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x}-\ln x\right)'=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}.$$

για κάθε $x>0$. Παίρνουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η g έχει μοναδική θέση ολικού μεγίστου την $x_0=1$, στην οποία παίρνει την τιμή $g(1)=0$. Πράγματι, αν $x\in(0,1]$, τότε $g(x)\le g(1)$, καθώς g γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ ενώ, αν $x\in[1,+\infty)$, τότε $g(x)\ge g(1)$, καθώς g γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ έχουμε $g(x)\le g(1)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Ισχύει επομένως $g(x)<g(1)=0$ για κάθε $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Από τη σχέση (2) έπεται ότι $f'(x)=g(x)/(x-1)^2$, οπότε η ίδια ιδιότητα μεταφέρεται και στην f': Με άλλα λόγια, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ (αποδείχτηκε στο Β1), προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το $(0,+\infty)$, όπως θέλαμε.

Άλλη μια εφαρμογή του θεωρήματος της σελ. 144 του σχολικού βιβλίου (μέρος iii του θεωρήματος).

Β3. Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα, όπως και πολλά παρόμοια ερωτήματα, θα προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της f. Η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το $(0,+\infty)$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και λόγω του αποτελέσματος του ερωτήματος Β1. Εφόσον είναι και γνησίως φθίνουσα, έπεται από το αποτέλεσμα της σελ. 78 του σχολικού βιβλίου ότι το σύνολο τιμών της είναι το

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) \quad (3)$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε αυτά τα δύο όρια:

- Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln x/(x-1)$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Ισχύει λοιπόν

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

- Το δεύτερο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-1}=+\infty.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (3) ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty))=(0,+\infty)$. Εφόσον το 2024 ανήκει σε αυτό, υπάρχει $x_1\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2024$. Το x_1 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, διότι, όπως αποδείξαμε στο Ερώτημα Β2, η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και «1-1»).

Β4. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $x_2\in(0,+\infty)$ στο οποίο η C_f να έχει οριζόντια εφαπτομένη. Θα ισχύει τότε $f'(x_2)=0$. Όπως είδαμε στο Ερώτημα Β2, η f' είναι αρνητική για κάθε $x\neq 1$, οπότε θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $x_2=1$. Από την άλλη όμως, είδαμε στο ερώτημα Β1 ότι $f'(1)=-\frac{1}{2}$, η f' δεν μηδενίζεται ούτε στη θέση $x=1$. Συνεπώς, η f' δεν έχει ρίζες, άρα είναι αδύνατον η C_f να έχει οριζόντιες εφαπτόμενες.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x)=\frac{2(e^x-1)'(e^x+1)-2(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x(e^x+1)-2(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό δεν είναι το ζητούμενο σε αυτό το ερώτημα, αλλά το κρατάμε σαν πληροφορία γιατί μπορεί να είναι χρήσιμο αργότερα. Για την κυρτότητα πρέπει να κοιτάξουμε τη δεύτερη παράγωγο. Σαφώς η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x)=\frac{4\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right)^2-4e^x\left(\left(e^x+1\right)^2\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^x\left(e^{2x}+2e^x+1\right)-4e^x\cdot 2\left(e^x+1\right)\cdot\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}+4e^x-8e^x\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}+4e^x-8e^{3x}-8e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$=\frac{4e^x-4e^{3x}}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^x+1\right)^4}.$$

Όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ εκτός του $1-e^{2x}$. Λύνοντας την ανίσωση $1-e^{2x}>0$, παίρνουμε την ισοδυναμία

$$1>e^{2x}\Leftrightarrow e^0>e^{2x}\Leftrightarrow 0>2x$$
$$\Leftrightarrow x<0,$$

οπότε αυτός ο παράγοντας είναι θετικός για $x<0$. Λύνοντας την ανίσωση με την αντίστροφη φορά, παίρνουμε ότι είναι αρνητικός για $x>0$. Για $x=0$ είναι ίσος με μηδέν. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^{2x}$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$.

Γ2. • Αντικαθιστώντας $x=0$ στους τύπους των δύο συναρτήσεων, παίρνουμε $f(0)=g(0)=0$, οπότε σίγουρα το $O(0,0)$ είναι κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

• Ισχύει επίσης $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $g'(0)=1$. Στο Γ1 υπολογίσαμε

$$f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{οπότε} \quad f'(0)=\frac{4}{(1+1)^2}=1.$$

Η εφαπτομένη της C_f λοιπόν στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_f): y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

η οποία γράφεται μετά από τις απλοποιήσεις ως $(\varepsilon_f): y=x$. Η εφαπτομένη της C_g στο ίδιο σημείο είναι η

$$(\varepsilon_g): y-g(0)=g'(0)(x-0)$$

Μετά από τις απλοποιήσεις, μπορούμε να δούμε ότι και αυτή είναι η $(\varepsilon_g): y=x$. Άρα οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο O.

Γ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$. Επιπλέον, για κάθε πραγματικό αριθμό α γνωρίζουμε ότι $\alpha\le|\alpha|$ και $\alpha\ge-|\alpha|$. Αυτές οι ανισότητες είναι γνωστές από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου και αποδεικνύονται εύκολα με τη χρήση του ορισμού της απόλυτης τιμής. Άρα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

> Αυτή η ανισότητα βρίσκεται στη σελ. 52 του σχολικού βιβλίου.

• Για $x>0$ είναι $g(x)=\eta\mu x\le|\eta\mu x|<|x|=x$, όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την πρώτη από τις θεμελιώδεις ανισότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, στο τρίτο την ανισότητα $|\eta\mu x|<|x|$ (θυμηθείτε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε εδώ έχουμε γνήσια ανισότητα) και στο τέταρτο βήμα τη σχέση $|x|=x$, που ισχύει διότι είμαστε στην περίπτωση $x>0$.

• Ομοίως, για $x<0$ είναι $g(x)=\eta\mu x\ge-|\eta\mu x|>-|x|=x$, όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη από τις θεμελιώδεις ανισότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, στο τρίτο την ανισότητα $|\eta\mu x|<|x|$, πολλαπλασιασμένη με το -1 και από τις δύο πλευρές (γι' αυτό και είναι αντεστραμμένη η φορά της –διότι πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με αρνητικό αριθμό) και στο τέταρτο βήμα την ισότητα $-|x|=x$, που ισχύει διότι είμαστε στην περίπτωση $x<0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι για $x>0$ ισχύει $g(x)<x$ και για $x<0$ ισχύει $g(x)>x$.

Γ4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική λύση $x=0$. Όπως είδαμε στο Ερώτημα Γ2, η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ είναι η $\varepsilon_f: y=x$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα διαστήματα κυρτότητας της f, τα οποία προσδιορίσαμε στο Ερώτημα Γ1.

- Στο διάστημα $[0,+\infty)$ είδαμε ότι η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Συνεπώς, αφού η εφαπτομένη στο $(0,f(0))$ είναι η $y=x$, θα ισχύει $f(x)>x$ για κάθε $x>0$. Ταυτόχρονα, είδαμε στο Γ3 ότι $g(x)<x$ για κάθε $x>0$. Επομένως, για $x>0$ ισχύει $f(x)>x>g(x)$ και επομένως αποκλείεται να ισχύει $f(x)=g(x)$ για κανένα τέτοιο x.

- Στο διάστημα $(-\infty,0]$ είδαμε ότι η f είναι κοίλη, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από τις εφαπτομένες της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Συνεπώς, αφού η εφαπτομένη στο $(0,f(0))$ είναι η $y=x$, ισχύει $f(x)<x$ για κάθε $x<0$. Ταυτόχρονα, είδαμε ότι $g(x)>x$ για κάθε $x<0$. Επομένως, για $x<0$ ισχύει $f(x)<x<g(x)$ και επομένως αποκλείεται να ισχύει $f(x)=g(x)$ για κανένα τέτοιο x.

Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $f(x)\neq g(x)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η πρώτη υπόθεση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)\geq x-\ln x-1 \quad (1)$$

για κάθε $x>0$. Το όριο του δεύτερου μέλους για $x\to 0^+$ είναι

$$\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x-1)=0-(-\infty)-1=+\infty.$$

Από τη σχέση (1) έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, αφού η f είναι μεγαλύτερη από μια συνάρτηση που τείνει στο $+\infty$.

Το τελευταίο επιχείρημα δεν είναι πλήρως δικαιολογημένο, υπό την έννοια ότι δεν γνωρίζουμε αν το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχει, οπότε θεωρητικά δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε την ανισότητα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq +\infty.$$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε μια πλήρη δικαιολόγηση ως εξής: Αρχικά ισχύει $\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x-1)=+\infty$, οπότε η συνάρτηση $x-\ln x-1$ είναι θετική κοντά στο 0. Εφόσον για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq x-\ln x-1$, έπεται και ότι η f είναι θετική κοντά στο 0. Μπορούμε λοιπόν για x κοντά στο 0 να αντιστρέψουμε την ανισότητα $f(x)\geq x-\ln x-1$ (αφού και τα δύο μέλη είναι θετικά κοντά στο μηδέν) και να γράψουμε

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{x-\ln x-1}.$$

Εφόσον η f είναι θετική κοντά στο 0, μπορούμε να επεκτείνουμε αυτήν την ανισότητα γράφοντας

$$0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{x-\ln x-1}.$$

Το όριο του δεξιού μέλους είναι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-\ln x-1} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

όπως και αυτό του αριστερού μέλους. Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$. Αφού η f είναι θετική κοντά στο μηδέν και αφού $f(x)=\frac{1}{1/f(x)}$, προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1/f(x)} = +\infty,$$

που είναι το ζητούμενο. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη που δώσαμε στο κύριο μέρος της λύσης είναι γενικά αποδεκτή στις εξετάσεις.

Δ2. Έστω ότι η f έχει ρίζα $x_0 \neq 1$. Τότε από την πρώτη υπόθεση προκύπτει ότι

$$0 = f(x_0) \geq x_0 - \ln x_0 - 1.$$

Όμως για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$, με ισότητα μόνο για $x = 1$. Άρα για το $x_0 \neq 1$ ισχύει

Αυτή η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη, καθώς εμφανίζεται ως εφαρμογή στη σελ. 148 του σχολικού βιβλίου.

$$\ln x_0 < x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 - \ln x_0 - 1 < 0.$$

Συνδυάζοντας αυτήν τη σχέση με την παραπάνω, προκύπτει ότι

$$0 = f(x_0) \geq x_0 - \ln x_0 - 1 > 0,$$

δηλαδή $0 > 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f δεν γίνεται να έχει ρίζες διαφορετικές του 1.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, οπότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1,e]$. Πράγματι:

- Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$, καθώς είναι παραγωγίσιμη σε αυτό (διότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$).
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,e)$, καθώς είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (1,e)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e-1} = \frac{e - 2 - f(1)}{e-1}.$$

Από την αρχική υπόθεση προκύπτει όμως ότι

$$f(1) + 1 \geq 1 - \ln 1 \Rightarrow f(1) \geq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το -1 και γράφοντας την τελευταία ανισότητα ως $-f(1) \leq 0$, προκύπτει ότι

$$f'(\xi) = \frac{e-2-f(1)}{e-1} \leq \frac{e-2-0}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}. \qquad (2)$$

Για να αποδείξουμε ότι το τελευταίο κλάσμα είναι μικρότερο από $\frac{1}{2}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{e-2}{e-1} = \frac{e-1-1}{e-1} = 1 - \frac{1}{e-1} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

όπου η ανισότητα στο τρίτο βήμα προκύπτει από το γεγονός ότι

$$e<3 \Rightarrow e-1<2 \Rightarrow \frac{1}{e-1}>\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{e-1}<-\frac{1}{2}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τις σχέσεις (2), (3) ότι $f'(\xi)<\frac{1}{2}$, όπως θέλαμε.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=f(x)+1-x+\ln x$$

για κάθε $x>0$. Από την πρώτη υπόθεση στην εκφώνηση, προκύπτει ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$. Αντικαθιστώντας όμως $x=e$, παίρνουμε

$$g(e)=e-2+1-e-\ln e=0.$$

Επομένως, η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $g(e)=0$ στη θέση $x=e$. Αυτό το σημείο είναι προφανώς εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g, η οποία είναι και παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έτσι, από το θεώρημα του Fermat, προκύπτει ότι $g'(e)=0$. Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g'(x)=f'(x)-1-\frac{1}{x},$$

άρα $g'(e)=f'(e)-1-\frac{1}{e}$. Από τη σχέση $g'(e)=0$ έπεται λοιπόν τώρα άμεσα ότι

$$f'(e)=1+\frac{1}{e}.$$

Διαγώνισμα 4.23

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74 (θεώρημα και συζήτηση πριν από αυτό).

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

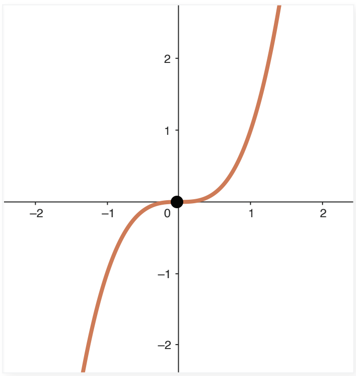
Α4. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Δείτε το θεώρημα 2 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου. Εδώ έχουμε μια γενίκευση αυτού του θεωρήματος για τέσσερα αντί για τρία σημεία, αλλά το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

ii. Δείτε το σχόλιο μετά από το θεώρημα Bolzano στη σελ. 74 του σχολικού βιβλίου. **Προσοχή:** Η πρόταση ισχύει μόνο για διαστήματα (και για το $\mathbb{R}$, το οποίο μπορούμε ουσιαστικά να το θεωρήσουμε σαν διάστημα). Εάν, για παράδειγμα, η συνάρτηση ήταν ορισμένη στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, τότε το ζητούμενο δεν θα ίσχυε απαραίτητα και η πρόταση θα ήταν λάθος (π.χ., μπορεί η συνάρτηση να ήταν θετική στο ένα και αρνητική στο άλλο διάστημα, οπότε ναι μεν δεν θα μηδενιζόταν, αλλά δεν θα διατηρούσε πρόσημο).

iii. Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x/x)=1$. Φυσικά, αφού υπάρχει το όριο, τα πλευρικά όρια επίσης υπάρχουν και είναι ίσα με αυτό, οπότε θα ισχύει αναγκαστικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.



iv. Η φράση «αν και μόνο αν» σημαίνει ισοδυναμία των συνθηκών «η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0» και «$f'(x_0)=0$». Η πρώτη συνθήκη πράγματι συνεπάγεται τη δεύτερη, άλλωστε αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος του Fermat. Αντίθετα, όμως, η δεύτερη συνθήκη δεν συνεπάγεται την πρώτη. Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^3$, τότε ισχύει μεν ότι $f'(0)=3\cdot 0^2=0$, όμως η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

v. Γενικότερα, από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ για κάθε $x\in A_f$ και $y\in A_{f^{-1}}$ (σελ. 36 του σχολικού βιβλίου). Εδώ εμφανίζονται τα δύο μέλη αυτής της ισοδυναμίας, όπου απλώς έχουμε επιλέξει ακριβώς την ίδια τιμή για το x και το y. Φυσικά, αυτό είναι επιτρεπτό, αφού, όπως γράψαμε παραπάνω, η ισοδυναμία είναι αληθής για όλα τα x, y (οπότε μπορούμε να τους δώσουμε όποιες τιμές θέλουμε και η ισοδυναμία θα ισχύει).

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Για την f, ο μόνος περιορισμός που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε θα είχε να κάνει με τον μηδενισμό του παρονομαστή. Όμως, καθώς $e^x > 0$, είναι σαφές ότι η παρονομαστής είναι θετικός για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R}$.
Για την g ο περιορισμός είναι σαφώς $x > 0$, οπότε $A_g = (0, +\infty)$.

Β2. Σκεφτόμαστε ότι $\varphi(x) = g(f(x))$, οπότε για το πεδίο ορισμού της φ θέλουμε να ισχύει:

- $x \in A_f$ (καθώς το x στην παραπάνω έκφραση βρίσκεται «εντός» της f).
- $f(x) \in A_g$ (καθώς η $f(x)$ με τη σειρά της βρίσκεται «εντός» της g).

Οι δύο παραπάνω σχέσεις υπάρχουν και στη σελ. 25 του σχολικού βιβλίου, κάτω από τον ορισμό και το σχήμα, με μόνη διαφορά τον συμβολισμό –χρησιμοποιούνται τα σύμβολα A, B στη θέση των A_f, A_g που χρησιμοποιούμε τώρα.

- Από τη σχέση $x \in A_f$ δεν προκύπτει κάποιος περιορισμός, αφού $A_f = \mathbb{R}$.
- Αφού $A_g = (0, +\infty)$, η σχέση $f(x) \in A_g$ είναι ισοδύναμη με $f(x) > 0$, δηλαδή $(e^x - 1)/(e^x + 1) > 0$. Καθώς ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

η οποία έχει λύσεις $x > 0$.

Συνδυάζοντας τους δύο παραπάνω περιορισμούς (στην ουσία μόνο ο δεύτερος είναι περιοριστικός), προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A_\varphi = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\boxed{\varphi(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}.}$$

B3. Στο πεδίο ορισμού της, η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη (σύνθεση, πηλίκο) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει λοιπόν

$$\varphi'(x)=\left(\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{1}{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\cdot\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x+1}{e^x-1}\cdot\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x+1}{e^x-1}\cdot\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1}{e^x-1}\cdot\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}.$$

Ο παράγοντας e^x-1 είναι θετικός, διότι έχουμε υποθέσει ότι $x>0$. Οι παράγοντες $2e^x,(e^x+1)$ είναι θετικοί ούτως ή άλλως (ασχέτως του προσήμου του x). Συμπεραίνουμε έτσι ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\varphi'(x)>0$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

B4. Γνωρίζουμε από τις ιδιότητες των λογάριθμων ότι $-\ln 2=\ln(1/2)$, οπότε η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}<\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{e^x+1}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2(e^x-1)<(e^x+1)$$

$$\Leftrightarrow e^x<3\ \boxed{\Leftrightarrow x<\ln 3.}$$

Προσοχή:

Από τη μορφή της αρχικής ανίσωσης, είναι ξεκάθαρο ότι το x πρέπει επιπλέον να ανήκει και στο πεδίο ορισμού της φ, δηλαδή πρέπει να ισχύει $x>0$.

Επομένως, λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x\in(0,\ln 3)$.

B5. (Bonus) Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^1|f(x)|dx$. Όπως δείξαμε στο Ερώτημα B2, η f είναι θετική για $x>0$, οπότε μπορούμε να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή. Θέλουμε επομένως να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$$

Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση, θέτοντας $y = e^x$. Αυτή είναι μια λογική στρατηγική διότι βλέπουμε ότι το x εμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα μόνο μέσω του e^x. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $dy = e^x dx$, οπότε $dx = \left(1/e^x\right)dy = \left(1/y\right)dy$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης:

- Για $x = 0$ ισχύει $y = e^0 = 1$.
- Για $x = 1$ ισχύει $y = e^1 = e$.

Επομένως, το ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$\int_1^e \left(\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{1}{y}\right)dy$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{y+1-2}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

άρα

$$\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{1}{y} = \left(1-\frac{2}{y+1}\right)\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{y\left(y+1\right)}.$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου, καθώς είναι ίσος με την παράγωγο του $\ln y$. Ο δεύτερος όρος μάς δυσκολεύει λόγω του γινομένου στον παρονομαστή. Αν δεν υπήρχε το γινόμενο και είχαμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά, τότε θα μπορούσαμε να εκφράσουμε το κλάσμα με τη βοήθεια των παραγώγων κάποιων λογαριθμικών συναρτήσεων. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να «σπάσουμε» το κλάσμα σε απλούστερα κλάσματα που περιέχουν στους παρονομαστές τους τον κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Εδώ αυτή η διάσπαση είναι η

$$\frac{1}{y\left(y+1\right)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}.$$

Αυτή η διάσπαση μπορεί αρχικά να φαίνεται ουρανοκατέβατη, όμως θα μπορούσαμε να την εξαγάγουμε πιο μεθοδικά, γράφοντας

$$\frac{1}{y\left(y+1\right)} = \frac{A}{y} - \frac{B}{y+1}$$

και υπολογίζοντας τα A, B με απαλοιφή παρονομαστών και απλοποιήσεις.

Μετά από την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε πλέον να γράψουμε το ολοκλήρωμα στη σχέση (1) ως

$$\int_1^e \left(\frac{1}{y}-\frac{2}{y}+\frac{2}{y+1}\right)dy = \int_1^e \left(\frac{2}{y+1}-\frac{1}{y}\right)dy = \left[2\ln(y+1)-\ln y\right]_1^e$$

$$= 2\ln(e+1)-2\ln 2-\ln e+\ln 1=$$

$$\boxed{= 2\ln(e+1)-2\ln 2-1.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι επίσης ορισμένη σε ένα διάστημα, το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Επομένως, για να δείξουμε ότι είναι σταθερή, αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δείτε το θεώρημα στη σελ. 133 του σχολικού βιβλίου.

Προσοχή: Αυτό το θεώρημα απαιτεί η συνάρτηση να είναι ορισμένη σε διάστημα, γι' αυτό και αναφέρουμε τον όρο «διάστημα» πιο πάνω.

Υπολογίζουμε λοιπόν την παράγωγό της.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=\left(f^2(x)\right)'-2f'(x)-\left(4x^2\right)'$$

$$=2f(x)f'(x)-2f'(x)-8x$$

$$=2\left(f(x)f'(x)-f'(x)-4x\right)=0,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση. Προκύπτει έτσι από την παραπάνω ισότητα ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι σταθερή.

Γ2. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η g είναι σταθερή. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$g(0)=f^2(0)-2f(0)-4\cdot 0^2=2^2-2\cdot 2=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $f(0)=2$ που μας δόθηκε στην εκφώνηση. Καθώς η g είναι σταθερή, έπεται ότι $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ο όρος $f^2(x)-2f(x)$ που εμφανίζεται στην g μάς θυμίζει το ανάπτυγμα του $(\alpha-1)^2$, οπότε προσθέτουμε και αφαιρούμε το 1 για να σχηματίσουμε αυτήν την ταυτότητα. Έτσι λοιπόν, η ισότητα $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή

$$f^2(x)-2f(x)-4x^2=0 \Leftrightarrow \left(f^2(x)-2f(x)+1\right)-1-4x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-1\right)^2=4x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)-1\right|=\sqrt{4x^2+1}. \qquad (1)$$

Μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ότι $f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $f(x)-1$ δεν μηδενίζεται. Εφόσον είναι συνεχής, έπεται ότι διατηρεί πρόσημο. Για $x=0$, αυτή η συνάρτηση παίρνει την τιμή $f(0)-1=2-1=1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έπεται λοιπόν από τη σχέση (1), με απαλοιφή της απόλυτης τιμής, ότι

$$\boxed{f(x)-1=\sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4x^2+1}+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπως θέλαμε.

Γ3. Για να κάνουμε υπολογισμούς με την εφαπτομένη της C_f, θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την παράγωγο της f. Από τον κανόνα της αλυσίδας είναι

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot\left(4x^2+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot 8x=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η $(\varepsilon_\alpha): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$, η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\varepsilon_\alpha: y=\frac{4\alpha x}{\sqrt{4\alpha^2+1}}+\left(1+\sqrt{4\alpha^2+1}-\frac{4\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2+1}}\right).$$

Για να βρούμε το σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y=0$. Προκύπτει τότε ότι

$$\frac{4\alpha x}{\sqrt{4\alpha^2+1}}+1+\sqrt{4\alpha^2+1}-\frac{4\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2+1}}=0 \Leftrightarrow 4\alpha x+\sqrt{4\alpha^2+1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha x=-\left(1+\sqrt{4\alpha^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2+1}}{4\alpha},$$

όπου στο πρώτο βήμα κάναμε απαλοιφή παρονομαστών και απλοποιήσαμε τους όρους $+4\alpha^2$ και $-4\alpha^2$ που εμφανίζονταν.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι το ζητούμενο σημείο τομής είναι το

$$\boxed{\mathrm{B}\left(-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2+1}}{4\alpha},0\right).}$$

Γ4. Γνωρίζουμε ότι $\alpha'(t)=4$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με t_0 τη χρονική στιγμή κατά την οποία το A βρίσκεται στη θέση $(1,f(1))$. Ισχύει λοιπόν $\alpha(t_0)=1$. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο ερώτημα, το σημείο B είναι το

$$\mathrm{B}\left(-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}{4\alpha(t)},0\right),$$

οπότε η τετμημένη του είναι η

$$\beta(t)=-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}{4\alpha(t)}.$$

Για να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της τη χρονική στιγμή $t=t_0$, δηλαδή το $\beta'(t_0)$, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την παράγωγο $\beta'(t)$. Είναι

$$\beta'(t)=-\frac{\left(1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}\right)'4\alpha(t)-\left(1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}\right)4\alpha'(t)}{16\alpha^2(t)} \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο $\left(1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}\right)'$ που είναι και ο πιο πολύπλοκος. Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι αυτή η παράγωγος ισούται με

$$\frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}\cdot\left(4\alpha^2(t)+1\right)'=\frac{8\alpha^2(t)\alpha'(t)}{2\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}=\frac{4\alpha^2(t)\alpha'(t)}{\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}.$$

Για $t=t_0$, αυτή ισούται με

$$\frac{4\cdot1\cdot4}{\sqrt{4\cdot1+1}}=\frac{16}{\sqrt5},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\alpha(t_0)=1$ και $\alpha'(t_0)=4$.

Αντικαθιστώντας τώρα $t=t_0$ στη (2), έπεται ότι

$$\beta'(t_0)=\frac{\frac{16}{\sqrt{5}}\cdot 4-\left(1+\sqrt{4+1}\right)\cdot 4\cdot 4}{16\cdot 1^2}=\frac{\frac{64}{\sqrt{5}}-16\left(1+\sqrt{5}\right)}{16}$$

$$=\frac{16-\left(5+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}}\boxed{=\frac{11-\sqrt{5}}{\sqrt{5}},\ \text{m/sec}}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

Γ5. (Bonus) Στο $+\infty$ μπορούμε να αναζητήσουμε οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες. Ισχύει ξεκάθαρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+1\right)=+\infty$, οπότε δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες. Αναζητούμε λοιπόν στο εξής πλάγιες ασύμπτωτες.

- Για x «κοντά» στο $+\infty$, ισχύει $x>0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $x=\sqrt{x^2}$ όταν παίρνουμε όρια $x\to+\infty$. Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{4}=2.$$

- Μένει τώρα να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$$

Αγνοούμε προς το παρόν το 1 στην αρχή και επικεντρωνόμαστε στους δύο άλλους όρους. Το όριο είναι της μορφής $+\infty-\infty$, η οποία είναι απροσδιόριστη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, δηλαδή όταν έχουμε αυτήν την απροσδιόριστη μορφή και ιδιαίτερα όταν ο ένας όρος περιέχει ρίζα, είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ένα χρήσιμο κόλπο το οποίο προκύπτει από την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$. Με μία αναδιάταξη, αυτή η ταυτότητα γράφεται

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}.$$

Θέτοντας $\alpha=\sqrt{4x^2+1}$ και $\beta=2x$, παίρνουμε

$$\sqrt{4x^2+1}-2x=\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}^{\,2}-(2x)^2\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{\left(4x^2+1-4x^2\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}.$$

Πλέον λοιπόν είναι ξεκάθαρο (μια και ο παρονομαστής τείνει στο $+\infty$, καθώς $x\to+\infty$) ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=1+0=1.$$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$, έπεται ότι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon):y=2x-1}$$

Σημείωση:

Αυτό το ερώτημα είναι ιδιαίτερα χρονοβόρο και ενδεχομένως αυτό να το κάνει λιγότερο πιθανό να τεθεί ως Θέμα Γ3 σε ένα πραγματικό διαγώνισμα εξετάσεων. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει αντίστοιχη άσκηση στο σχολικό βιβλίο (σελ. 69, άσκηση 3, Ερωτήματα ii και iv), οπότε ίσως να ήταν καλό να ρίξουμε μια ματιά στη λύση.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Αυτό το ερώτημα δεν είναι δύσκολο, αλλά έχει μια μικρή ιδιαιτερότητα, καθώς για τη λύση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $f'(0)\neq 1$. Ισοδύναμα, $f'(0)-1\neq 0$. Καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η παράγωγος f' είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής). Προκύπτει λοιπόν από την υπόθεση και από τη συνέχεια της παραγώγου ότι

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f'(x)-1\right)}{f'(x)-1}=\frac{\eta\mu\left(f'(0)-1\right)}{f'(0)-1},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{\eta\mu\left(f'(0)-1\right)}{f'(0)-1}=1\Rightarrow \eta\mu\left(f'(0)-1\right)=f'(0)-1. \qquad (1)$$

Γνωρίζουμε όμως από τη θεωρία ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$. Στη σχέση (1) ισχύει η ισότητα για $x=f'(0)-1$. Φυσικά, η ισότητα $\eta\mu\left(f'(0)-1\right)=f'(0)-1$ της σχέσης (1) δεν έχει απόλυτες τιμές, αλλά προφανώς ισχύει και με απόλυτες τιμές –εξάλλου, αν δύο αριθμοί είναι ίσοι, τότε είναι ίσες και οι απόλυτες τιμές τους. Αυτό συνεπάγεται ότι $f'(0)-1=0$, δηλαδή $f'(0)=1$, το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $f'(0)\neq 1$.

Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $f'(0)\neq 1$, επομένως πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $f'(0)=1$. Από τη συνέχεια της παραγώγου έπεται τώρα ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(f'(x)-1\right)=f'(0)-1=0,$$

οπότε, θέτοντας $u=f'(x)-1$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f'(x)-1\right)}{f'(x)-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}$$

το οποίο ισούται πράγματι με 1. Άρα η υπόθεση που δίνεται στην εκφώνηση πράγματι ικανοποιείται στην περίπτωση που $f'(0)=1$.

Δ2. Από τις σχέσεις $f(0)=-1$ και $f'(0)=1$ προκύπτει ότι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)$ η οποία μετά από τις απλοποιήσεις γράφεται στη μορφή $\varepsilon: y=x-1$. Μας έχει δοθεί ότι η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Επομένως, ισχύει $f(x)\ge x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με ισότητα μόνο για $x=0$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ και το $f(x)$ είναι μεγαλύτερο από το $x-1$, θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Δ3. Η f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Εφόσον $f'(0)=1$, θα ισχύει $f'(x)\ge 1>0$ για κάθε $x\ge 0$. Συνεπώς, η f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Αφού είναι και συνεχής, η εικόνα του διαστήματος $[0,+\infty)$ μέσω της f είναι το σύνολο

$$f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty).$$

Εφόσον $0 \in f([0,+\infty))$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in [0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Αποδεικνύεται έτσι η ύπαρξη της ρίζας. Η μοναδικότητα της ρίζας έπεται από τη μονοτονία της f.

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_{x_0}): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Το x_0 είναι ρίζα της f, οπότε αυτή η εξίσωση γράφεται

$$(\varepsilon_{x_0}): y = f'(x_0)(x - x_0).$$

Όπως είπαμε και στο Ερώτημα Δ3, η C_f βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες της με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Ισχύει λοιπόν $f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και ειδικότερα για κάθε $x \in [0,x_0]$. Εφόσον λοιπόν αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = x_0$ και όχι σε ολόκληρο το $[0,x_0]$, η ανισότητα των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων θα είναι γνήσια (χωρίς ισότητα):

Δείτε το θεώρημα 3 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου.

$$\int_0^{x_0} f(x)dx > \int_0^{x_0} f'(x_0)(x-x_0)dx = f'(x_0)\int_0^{x_0}(x-x_0)dx$$

$$= f'(x_0)\left[\frac{x^2}{2} - x \cdot x_0\right]_0^{x_0} = -\frac{x_0^2 f'(x_0)}{2}. \quad (2)$$

Καθώς όμως $x_0 > 0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα (από την κυρτότητα της f), προκύπτει ότι $f'(x_0) > f'(0) = 1$. Έπεται λοιπόν από τη (2) ότι

$$\boxed{\int_0^{x_0} f(x)dx > -\frac{x_0^2}{2}, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Διαγώνισμα 4.24

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 51.

Α3. **i.** Ο ισχυρισμός είναι σωστός.

ii. Έστω τυχόν σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού της f (δηλαδή $x_0 \neq 0$). Ισχύει τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο x_0. Το x_0 ήταν τυχόν σημείο, άρα η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

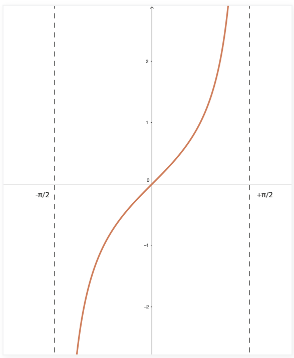
> Αυτό το ερώτημα μας διδάσκει ότι, για να είναι μια συνάρτηση συνεχής, δεν χρειάζεται απαραίτητα η γραφική της παράσταση να είναι μια «συνεχόμενη γραμμή». Εδώ η γραφική παράσταση «διακόπτεται» στο $x=0$, αλλά αυτό δεν έχει σημασία, καθώς το $x=0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Α4. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 164.

Α5. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Ε.Τ., πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Αν, όπως εδώ, είναι ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα, δεν παίρνει υποχρεωτικά μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Θεωρούμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f(x) = εφx$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αυτή είναι συνεχής, ως βασική τριγωνομετρική συνάρτηση, όμως δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, καθώς



$$\lim_{x\to -\pi/2} εφx = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to \pi/2} εφx = +\infty.$$

ii. Για να είναι σωστός ο ισχυρισμός, θα έπρεπε να προσθέσουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Χωρίς αυτήν την υπόθεση, το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν είναι απαραίτητα θετικό (πάρτε, για παράδειγμα, τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=-1$).

iii. Η αντίστροφη συνεπαγωγή θα ήταν σωστή. Αν δηλαδή η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο στο $\xi\in(\alpha,\beta)$, τότε ισχύει υποχρεωτικά ότι $f'(\xi)=0$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος του Fermat. Η δοσμένη κατεύθυνση της συνεπαγωγής όμως δεν ισχύει. Αυτό το έχουμε εξηγήσει και σε προηγούμενα διαγωνίσματα (π.χ. στο 4.23), όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ και το σημείο $\xi=0$ σαν αντιπαράδειγμα.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f ορίζεται αν και μόνο αν $\dfrac{x^2}{x+1}>0$. Το πρόσημο αυτού του πηλίκου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$1-e^{2x}$	$+$		$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$+$	0	$+$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το πηλίκο $\dfrac{x^2}{x+1}$ είναι θετικό για $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Στο πεδίο ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για να υπολογίσουμε ευκολότερα την παράγωγό της, μπορούμε να γράψουμε την f στη μορφή

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=\ln(x^2)-\ln(x+1)=2\ln|x|-\ln(x+1).$$

Αυτό δεν παραβιάζει κάποιον περιορισμό, αφού οι ποσότητες $|x|$ και $x+1$ είναι από κοινού θετικές στο σύνολο $A_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Η παράγωγος της f είναι ίση με

$$f'(x)=\left(2\ln|x|-\ln(x+1)\right)'=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}=\frac{x+2}{x(x+1)},$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$. Από τους παράγοντες που εμφανίζονται στην f', οι $x+1$ και $x+2$ είναι θετικοί για κάθε $x \in A_f = (-1,0) \cup (0,+\infty)$. Επομένως, το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα x. Προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	-1	0	$+\infty$
$1-e^{2x}$	$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Β2. Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τις εικόνες $f((-1,0))$ και $f((0,+\infty))$ με βάση τη μονοτονία της f. Εφόσον $f \searrow (-1,0)$ και εφόσον η f είναι συνεχής σε αυτό το διάστημα, έπεται ότι

$$f((-1,0)) = \left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -1^+} f(x)\right). \quad (1)$$

Είδαμε παραπάνω ότι $f(x) = 2\ln|x| - \ln(x+1)$ για κάθε $x \in A_f$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2\ln|x| - \ln(x+1)\right) = 2\cdot(-\infty) - \ln 1 = -\infty, \quad (2)$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 0^-} 2\ln|x| \overset{u=|x|}{=} \lim_{u\to 0^+} 2\ln u = -\infty.$$

Υπολογίζουμε τώρα το άλλο όριο που εμφανίζεται στη σχέση (1). Ισχύει

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2\ln|x| - \ln(x+1)\right) = 2\ln|-1| - (-\infty) = +\infty, \quad (3)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty.$$

Συμπεραίνουμε από τις σχέσεις (1), (2), (3), ότι $f((-1,0)) = \mathbb{R}$. Ήδη από αυτήν την ισότητα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$\mathbb{R}$, ακόμη και χωρίς να βρούμε το $f((0,+\infty))$. Ο λόγος είναι ότι, όποιο και να είναι το $f((0,+\infty))$, η ένωσή του με το $f((-1,0))=\mathbb{R}$ αποκλείεται να μας δώσει κάτι διαφορετικό από το ίδιο το $\mathbb{R}$. Παρ' όλα αυτά όμως, θα προσδιορίσουμε το $f((0,+\infty))$, καθώς είναι χρήσιμο για το επόμενο ερώτημα. Καθώς $f\nearrow(0,+\infty)$, έπεται ότι

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right). \quad (4)$$

Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\ln|x|-\ln(x+1)\right)\overset{x>0}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(2\ln x-\ln(x+1)\right)$$

$$=2\cdot(-\infty)-\ln 1=-\infty. \quad (5)$$

Για να υπολογίσουμε το όριο στο $+\infty$, βολεύει καλύτερα να γράψουμε την f στην αρχική της μορφή. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,$$

οπότε, θέτοντας $u=x^2/(x+1)$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty. \quad (1)$$

Πλέον, έπεται από τις σχέσεις (4), (5), (6) ότι $\boxed{f((0,+\infty))=\mathbb{R}}$.

Β3. Θεωρούμε τυχόντα πραγματικό αριθμό α. Εφόσον $\alpha\in\mathbb{R}=f((-1,0))$, υπάρχει $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha$. Μάλιστα, το x_1 είναι το μοναδικό σημείο στο $(-1,0)$ με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$.
Ομοίως, ισχύει $\alpha\in\mathbb{R}=f((0,+\infty))$, άρα υπάρχει $x_2\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=\alpha$. Το x_2 είναι επίσης το μοναδικό σημείο στο $(0,+\infty)$ με αυτήν την ιδιότητα, καθώς $f\nearrow(0,+\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(x_1)=f(x_2)$ και, εφόσον $x_1<0<x_2$, το ζητούμενο έχει αποδειχτεί.

Μάλιστα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει απλώς ένα, αλλά άπειρα ζεύγη (x_1,x_2), ένα για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Β4. Στο Ερώτημα Β1 και ειδικότερα στον πίνακα μονοτονίας που σχεδιάσαμε, είδαμε ότι η f' δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $A_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Επομένως, αποκλείεται να υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.
Ο λόγος που, παρότι $f(x_1)=f(x_2)$, δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος

Rolle (δηλαδή δεν μηδενίζεται η παράγωγος μεταξύ των x_1, x_2) είναι ότι δεν ικανοποιούνται οι άλλες δύο υποθέσεις του θεωρήματος. Συγκεκριμένα, είδαμε στο Β3 ότι $x_1 < 0 < x_2$. Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα έπρεπε η f να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2), άρα και στο σημείο $x_0 = 0$. Κάτι τέτοιο όμως δεν αληθεύει, αφού η f δεν ορίζεται καν σε αυτό το σημείο.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, απ' όπου θα προκύψει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τα δύο μέλη της δοσμένης ισότητας είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις (εφόσον η f έχει υποτεθεί παραγωγίσιμη). Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε παραγώγους και στα δύο μέλη, απ' όπου θα προκύψει ότι

$$\left(f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x)\right)' = \left(e^x - 5\right)' \Rightarrow f'(x)\left(3f^2(x) - 4f(x) + 2\right) = e^x.$$

Στην παραπάνω ισότητα παραλείψαμε ένα βήμα και βγάλαμε κατευθείαν κοινό παράγοντα το $f'(x)$. Το δεύτερο μέλος της ισότητας είναι θετικός αριθμός. Επίσης, θυμηθείτε ότι θέλουμε να αποδείξουμε πως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$3f^2(x) - 4f(x) + 2 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το τριώνυμο $3y^2 - 4y + 2$. Η διακρίνουσά του είναι ίση με

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι ίσος με $3 > 0$. Από τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου (Άλγεβρα Α΄ Λυκείου), έπεται ότι $3y^2 - 4y + 2 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας $y = f(x)$, προκύπτει ακριβώς αυτό που θέλουμε, δηλαδή ότι $3f^2(x) - 4f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτήν την παρατήρηση και από την ισότητα

$$f'(x)\left(3f^2(x) - 4f(x) + 2\right) = e^x, \qquad (1)$$

έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Για $x = \ln 5$, η αρχική ισότητα γίνεται

$$f^3(\ln 5) - 2f^2(\ln 5) + 2f(\ln 5) = 0 \Leftrightarrow f(\ln 5)\left(f^2(\ln 5) - 2f(\ln 5) + 2\right) = 0.$$

Ο δεύτερος παράγοντας όμως (η παρένθεση) γράφεται στη μορφή

$$f^2(\ln 5)-2f(\ln 5)+1+1=\left(f(\ln 5)-1\right)^2+1>0,$$

άρα έπεται από την παραπάνω ισότητα ότι ισχύει αναγκαστικά $f(\ln 5)=0$. Αντικαθιστώντας $x=\ln 5$ στη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$f'(\ln 5)\left(3f^2(\ln 5)-4f(\ln 5)+2\right)=5 \overset{f(\ln 5)=0}{\Leftrightarrow} f'(\ln 5)\cdot 2=5 \Leftrightarrow f'(\ln 5)=5/2.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\ln 5, f(\ln 5))$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(\ln 5)=f'(\ln 5)(x-\ln 5) \Leftrightarrow y=\frac{5x}{2}-\frac{5\ln 5}{2}.}$$

Γ3. Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $f(x)$, η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)\left(f^2(x)-2f(x)+2\right)=e^x-5$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όπως παρατηρήσαμε και παραπάνω, ο παράγοντας μέσα στην παρένθεση γράφεται στη μορφή

$$\left(f^2(x)-2f(x)+1\right)+1=\left(f(x)-1\right)^2+1>0,$$

άρα προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι το πρόσημο του $f(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του όρου e^x-5. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>5 \Leftrightarrow x>\ln 5.$
- $e^x-5<0 \Leftrightarrow e^x<5 \Leftrightarrow x<\ln 5.$
- $e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5.$

Επομένως, το πρόσημο του $f(x)$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Γ4. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$f^3(x)-2f^2(x)+2f(x)<\left(f(x)+1\right)^3. \qquad (2)$$

Πράγματι, αναπτύσσοντας τον κύβο στο δεύτερο μέλος, η ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$f^3(x)-2f^2(x)+2f(x)<f^3(x)+3f^2(x)+3f(x)+1$$

και κάνοντας τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στην ανισότητα

$$5f^2(x)+f(x)+1>0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι το τριώνυμο $5y^2+y+1$ έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη (2) και από τη σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(f(x)+1\right)^3>e^x-5.$$

Για $x>\ln 5$ ισχύει $f(x)>0$ (Γ3) και $e^x-5>0$, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε κυβικές ρίζες. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$f(x)+1>\sqrt[3]{e^x-5}\Rightarrow\frac{f(x)}{x}>\frac{\sqrt[3]{e^x-5}}{x}-\frac{1}{x}\qquad(3)$$

για κάθε $x>\ln 5$. Καθώς $x>\ln 5>0$, παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sqrt[3]{e^x-5}}{x}=\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{x^3}}.$$

Το όριο της υπόρριζης ποσότητας, καθώς $x\to+\infty$, μπορούμε να το υπολογίσουμε με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-5}{x^3}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty.$$

Θέτοντας λοιπόν $u=\frac{e^x-5}{x^3}$, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{x^3}}=\lim_{u\to+\infty}\sqrt[3]{u}=+\infty,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{x^3}}-\frac{1}{x}\right)=(+\infty)-0=+\infty.$$

Έπεται άμεσα πλέον από τη σχέση (3) ότι $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty,\text{ όπως θέλαμε.}}$

Γ5. (Bonus) Θα θέλαμε να παραγωγίσουμε τη σχέση που μας έχει δοθεί, ώστε να πάρουμε περισσότερες πληροφορίες για το πρόσημο της f'. Αυτό όμως είναι κάτι που δεν μπορούμε να κάνουμε, καθώς δεν μας έχει δοθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
Θα δουλέψουμε λοιπόν με την κλασική μέθοδο των x_1, x_2. Πριν το κάνουμε αυτό όμως, πρέπει να κάνουμε μια παρατήρηση που είναι απαραίτητη για τη συνέχεια. Μπορούμε, για την ακρίβεια, να δείξουμε ότι η f είναι «1-1». Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Ισχύουν τότε τα εξής:

- $f^3(x_1) = f^3(x_2)$.
- $-2f^2(x_1) = -2f^2(x_2)$.
- $2f(x_1) = 2f(x_2)$.

Προσθέτοντας αυτές τις τρεις σχέσεις κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τη σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση, παίρνουμε

$$f^3(x_1) - 2f^2(x_1) + 2f(x_2) = f^3(x_2) - 2f^2(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} - 5 = e^{x_2} - 5$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Έπεται λοιπόν ότι η f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$. Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφή της, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x. Για να το κάνουμε αυτό, αντικαθιστούμε το $f(x)$ με y στην ισότητα που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση. Παίρνουμε τότε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $y > -1$

$$y^3 - 2y^2 + 2y = e^x - 5 \Leftrightarrow e^x = y^3 - 2y^2 + 2y + 5$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y^3 - 2y^2 + 2y + 5\right),$$

οπότε $f^{-1}(x) = \ln\left(x^3 - 2x^2 + 2x + 5\right)$ για $x > -1$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5} \cdot \left(x^3 - 2x^2 + 2x + 5\right)' = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in A_{f^{-1}}$, καθώς αυτό είναι απαραίτητο για να ορίζεται η f^{-1} (κοιτάξτε, π.χ., τον τύπο της). Ο αριθμητής είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0,$$

και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 3. Επομένως, ο αριθμητής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x \in A_{f^{-1}}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\left(f^{-1}\right)'(x) > 0$ για κάθε $x \in A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$, οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Δεδομένου ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A_f = \mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση $x_1 < x_2$ ισοδύναμα ως

$$f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)).$$

Εφόσον η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $f(x_1) < f(x_2)$, απ' όπου έπεται τελικά ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{e^{f(x)} - e^{-x}}{e^{f(x)}} - 1 &\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)} - e^{-x} - e^{f(x)} \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = \left(e^{-x}\right)' \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} = e^{-x} + c, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. (ο c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός). Για $x = 0$ προκύπτει ότι

$$e^{f(0)} = e^{-0} + c \Leftrightarrow e^{\ln 2} = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1,$$

άρα

$$e^{f(x)} = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(e^{-x} + 1\right).$$

Μένουν μόνο μερικές απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right) &= \ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x \\ &\boxed{= \ln\left(e^x + 1\right) - x, \text{ όπως θέλαμε.}} \end{aligned}$$

Δ2. Γι' αυτό το ερώτημα υπάρχουν διάφοροι τρόποι λύσης, ένας από τους οποίους προκύπτει μέσω της γνωστής ανισότητας $\ln x \le x - 1$. Παρ' όλα αυτά, καθώς έχουμε χρησιμοποιήσει αυτήν την ανισότητα αρκετές φορές σε προηγούμενα θέματα, θα δείξουμε εδώ έναν άλλον τρόπο επίλυσης, με τη χρήση του Θ.Μ.Τ.

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η f έχει τη μορφή

$$\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x\right),$$

που μας θυμίζει τη διαφορά $f(\beta)-f(\alpha)$, η οποία εμφανίζεται στο συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν $x>0$, το οποίο θα θεωρήσουμε στο εξής ως σταθερό, τη συνάρτηση $h(t)=\ln t$ (για $t>0$) και το διάστημα $\Delta_x=\left[e^x,e^x+1\right]\subseteq(0,+\infty)$. Η h είναι η λογαριθμική συνάρτηση, οπότε είναι προφανώς συνεχής στο Δ_x και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Επομένως, προκύπτει από το Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχει $\xi_x\in\left(e^x,e^x+1\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi_x)=\frac{h\left(e^x+1\right)-h\left(e^x\right)}{\left(e^x+1\right)-e^x}=\frac{\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x}{1}=f(x). \quad (1)$$

Ισχύει όμως $h'(t)=\frac{1}{t}$, άρα $h'(\xi_x)=\frac{1}{\xi_x}$. Εφόσον $0<e^x<\xi_x<e^x+1$, προκύπτει (με αντιστροφή της τελευταίας ανισότητας) ότι

$$\frac{1}{e^x}>\frac{1}{\xi_x}>\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow\frac{1}{e^x}>h'(\xi_x)>\frac{1}{e^x+1}\ \boxed{\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{1}{e^x}>f(x)>\frac{1}{e^x+1},}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Δ3. Σύμφωνα με το Ερώτημα Δ2, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι

$$\frac{1}{e^x}>f(x)>\frac{1}{e^x+1}. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας $\ln x$ στη θέση του x, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{e^{\ln x}}>f(\ln x)>\frac{1}{e^{\ln x}+1}\Rightarrow\frac{1}{x}>f(\ln x)>\frac{1}{x+1},$$

για κάθε $x>0$. Μπορούμε να αντιστρέψουμε αυτήν την ανισότητα, καθώς όλοι οι όροι της είναι θετικοί. Παίρνουμε τότε

$$x<\frac{1}{f(\ln x)}<x+1\Leftrightarrow x+1<\frac{1}{f(\ln x)}<x \quad (3)$$

για κάθε $x>0$. Όλοι οι όροι στις εξισώσεις (2) και (3) είναι θετικοί, οπότε μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη. Προκύπτει τότε η σχέση

$$\frac{x+1}{e^x} > \frac{f(x)}{f(\ln x)} > \frac{x}{e^x+1}, \qquad (4)$$

η οποία μας παραπέμπει στο κριτήριο παρεμβολής. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,$$

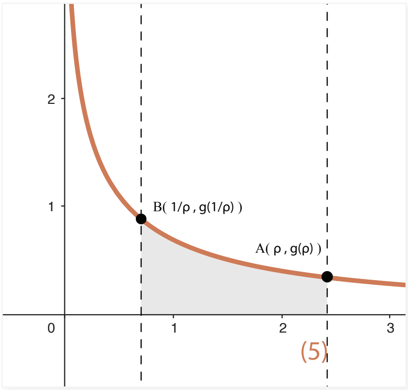
όπου χρησιμοποιήσαμε και στις δύο περιπτώσεις τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Έπεται λοιπόν από τη σχέση (4) και από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(\ln x)}=0.}$$

Σημείωση:

Θα μπορούσαμε να είχαμε γλιτώσει λίγο κόπο, αν παρατηρούσαμε ότι $\frac{x}{e^x+1}>0$ και χρησιμοποιούσαμε το 0 στο δεξί μέλος της σχέσης (4). Έτσι, δεν θα χρειαζόταν να υπολογίσουμε δύο όρια, αλλά μόνο το πρώτο, καθώς το δεξιό μέλος θα ήταν ταυτοτικά ίσο με μηδέν.

Δ4. Όπως είδαμε στο Δ1, ισχύει $g(x)=\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Εφόσον η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι $g(x)>0$ για κάθε $x>0$. Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου Ω_ρ, το οποίο φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, είναι ίσο με



(5)

$$E(\rho)=\int_{1/\rho}^{\rho} g(x)dx=\int_{1/\rho}^{\rho}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)dx$$

$$=\int_{1/\rho}^{\rho}\ln(x+1)dx-\int_{1/\rho}^{\rho}\ln x dx.$$

Υπολογίζουμε αυτούς τους δύο όρους με παραγοντική ολοκλήρωση. Ισχύει

$$\int_{1/\rho}^{\rho} \ln(x+1)dx = \int_{1/\rho}^{\rho} (x+1)' \ln(x+1)dx$$

$$= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{1/\rho}^{\rho} - \int_{1/\rho}^{\rho} (x+1)\left(\ln(x+1)\right)' dx$$

$$= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{1/\rho}^{\rho} - \int_{1/\rho}^{\rho} 1dx$$

$$= (\rho+1)\ln(\rho+1) - \left(\frac{1}{\rho}+1\right)\ln\left(\frac{1}{\rho}+1\right) - \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$$

και

$$\int_{1/\rho}^{\rho} \ln x dx = \int_{1/\rho}^{\rho} (x)' \ln x dx = [x\ln x]_{1/\rho}^{\rho} - \int_{1/\rho}^{\rho} x(\ln x)' dx$$

$$= \rho\ln\rho - \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) - \int_{1/\rho}^{\rho} 1dx$$

$$= \rho\ln\rho - \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right).$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (5) ότι

$$E(\rho) = (\rho+1)\ln(\rho+1) - \left(\frac{1}{\rho}+1\right)\ln\left(\frac{1}{\rho}+1\right) - \rho\ln\rho + \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$= (\rho+1)\ln(\rho+1) - \frac{\rho+1}{\rho}\left(\ln(\rho+1) - \ln\rho\right) - \rho\ln\rho - \frac{1}{\rho}\ln\rho$$

$$= \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\ln(\rho+1) - (\rho-1)\ln\rho. \quad (6)$$

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε το όριο της τελευταίας ποσότητας, καθώς $\rho \to +\infty$. Ίσως να μπορούσαμε να υπολογίσουμε το όριο κατευθείαν, αλλά σίγουρα θα χρειάζονταν αρκετοί υπολογισμοί, καθώς εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο με πιο απλό τρόπο, θα χρησιμοποιήσουμε ανισότητες.

Καθώς $0 < \ln\rho < \ln(\rho+1)$, έπεται από την (6) ότι

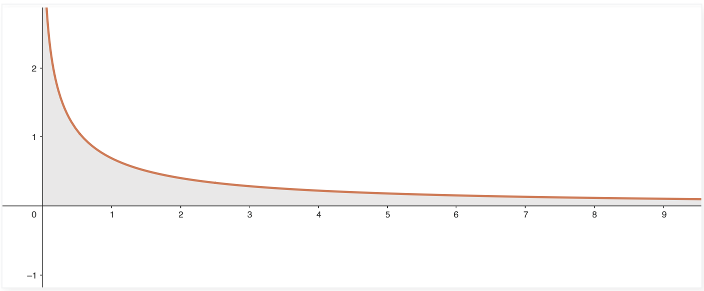
$$\mathrm{E}(\rho) > \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\ln(\rho+1) - (\rho-1)\ln(\rho+1) = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\ln(\rho+1).$$

Εδώ απλώς αντικαθιστούμε το lnρ με ln(ρ+1). Εφόσον αφαιρούμε πλέον μια μεγαλύτερη ποσότητα, η παράσταση «μικραίνει».

Ισχύει ότι $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\left[(1-1/\rho)\ln(\rho+1)\right] = (1-0)\cdot(+\infty) = +\infty$, άρα, αφού το $\mathrm{E}(\rho)$ είναι ακόμη μεγαλύτερο από την ποσότητα μέσα στο όριο, έπεται τελικά ότι $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\mathrm{E}(\rho) = +\infty$, όπως θέλαμε.

Σημείωση:

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά με έναν ενδιαφέροντα τρόπο. Καθώς $\rho \to +\infty$, το άνω όριο ολοκλήρωσης τείνει στο $+\infty$ και το κάτω όριο, που είναι το $1/\rho$, τείνει στο μηδέν. Επομένως, το όριο του ολοκληρώματος $\mathrm{E}(\rho) = \int_{1/\rho}^{\rho} g(x)dx$ αναπαριστά το εμβαδόν του «άπειρου» χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της C_g, του άξονα $x'x$ και του άξονα $y'y$, και το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος θα σήμαινε ότι το παραπάνω γραμμοσκιασμένο χωρίο έχει «άπειρο» εμβαδόν. Φυσικά, όλα αυτά δεν αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης, αλλά έχει ενδιαφέρον να σκεφτεί κανείς πώς θα μπορούσαμε να μελετήσουμε εμβαδά «άπειρων» χωρίων. Αυτό είναι κάτι που συνήθως αναλύεται στα μαθήματα Μαθηματικών πολλών πανεπιστημιακών τμημάτων.

Δ5. (Bonus) Είδαμε παραπάνω ότι $f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$f(\ln x)=\ln\left(e^{-\ln x}+1\right)=\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

για κάθε $x>0$. Καθώς

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{-x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)=\ln(0+1)=0,$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Παίρνουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+1\right)}{\ln(1/x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)-x}{\ln(x+1)-\ln x}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}/\left(e^{x}+1\right)-1}{1/(x+1)-1/x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/\left(e^{x}+1\right)}{-1/\left[x(x+1)\right]}=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2}+x}{e^{x}+1}\right)$$

$$\overset{+\infty/+\infty}{=}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{e^{x}}\overset{+\infty/+\infty}{=}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}}=0.$$

Πριν εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital, γράφουμε ξανά την f στην άλλη της μορφή, καθώς έτσι είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός των παραγώγων.

Διαγώνισμα 4.25

ΘΕΜΑ Α
Λύση

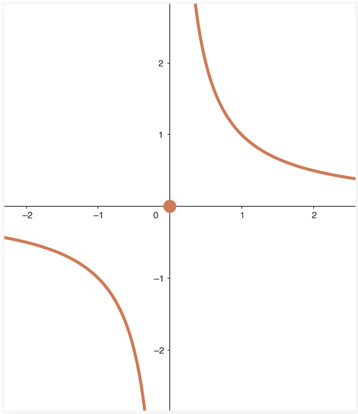
Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 106.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 77.

Α3. i. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (Λ).

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο $O(0,0)$ είναι μέρος της C_f, καθώς αναπαριστά τον κάτω κλάδο της f. Αρχικά, είναι εύκολο να δούμε γραφικά ότι η f είναι «1-1», καθώς καμία οριζόντια ευθεία δεν τέμνει τη γραφική της παράσταση παραπάνω από μία φορά. Αν θέλουμε να επαληθεύσουμε αυτήν την παρατήρηση και αλγεβρικά, μπορούμε να θεωρήσουμε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της «1-1» συνάρτησης, πρέπει να δείξουμε ότι $x_1=x_2$. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:



- Αν $x_1=0$, τότε $f(x_1)=0$, οπότε έπεται από τη σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ ότι $f(x_2)=0$. Η f όμως μηδενίζεται μόνο στη θέση $x=0$, οπότε έπεται ότι $x_2=0$. Άρα $x_1=x_2$.

- Αν $x_1\neq 0$, τότε $f(x_1)=\frac{1}{x_1}$, άρα $f(x_2)=f(x_1)\neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x_2=0$, καθώς σε εκείνη την περίπτωση θα ίσχυε $f(x_2)=f(0)=0$, άτοπο. Αφού $x_2\neq 0$, έπεται ότι $f(x_2)=\frac{1}{x_2}$. Η ισότητα $f(x_1)=f(x_2)$ γράφεται λοιπόν ισοδύναμα στη μορφή $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$, η οποία συνεπάγεται ότι $x_1=x_2$.

Συμπεραίνουμε ότι, σε κάθε περίπτωση, η σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ συνεπάγεται ότι $x_1=x_2$. Άρα η f είναι «1-1». Είναι εύκολο να δούμε όμως ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Για παράδειγμα, δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα, καθώς $1<2$, όμως

$$f(1)=1>\frac{1}{2}=f(2).$$

Ομοίως, δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού για παράδειγμα $-1<0$, όμως,

$$f(-1)=-1<0=f(0).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. **Προσοχή:** Ο αντίστροφος ισχυρισμός θα ήταν σωστός. Αν δηλαδή μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και «1-1».

Α4. i) Σ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Δείτε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης στη σελ. 35 του σχολικού βιβλίου. Το γεγονός ότι η f είναι «1-1» είναι βασική υπόθεση για να ορίζεται η αντίστροφη.

ii. Δείτε την τελευταία παρατήρηση στη σελ. 212 του σχολικού βιβλίου.

iii. Υπάρχει μια παρανόηση πολλές φορές μεταξύ των μαθητών, ότι η ανισότητα $f(x)\leq 3$ σημαίνει πως πρέπει απαραίτητα η f να λαμβάνει την τιμή 3. Αυτό δεν αληθεύει. Η σχέση «μικρότερο ή ίσο» ικανοποιείται με οποιαδήποτε από τις δύο καταστάσεις «μικρότερο» / «ίσο», εξάλλου αυτή είναι η σημασία του διαζευκτικού «ή». Επομένως, η σχέση $f(x)\leq 3$ δεν διασφαλίζει ότι η f παίρνει την τιμή 3. Μπορεί στην πραγματικότητα η f να είναι γνησίως μικρότερη του 3. Για παράδειγμα, η σταθερή συνάρτηση $f(x)=2$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\leq 3$ (ικανοποιεί την κατάσταση «μικρότερο» –όπως είπαμε, δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιεί και την κατάσταση «ίσο», αλλά αρκεί μία από τις δύο), όμως η μέγιστη τιμή της είναι προφανώς το 2.

iv. Ας υποθέσουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $P(x)$ είναι το $\alpha_\nu x^\nu$ και ο μεγιστοβάθμιος όρος του $Q(x)$ είναι το $\beta_\mu x^\mu$, όπου μ,ν είναι μη αρνητικοί θετικοί ακέραιοι. Ισχύει εξ ορισμού $\alpha_\nu,\beta_\mu\neq 0$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι οι μ,ν, που είναι οι βαθμοί των δύο πολυωνύμων, είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Από την παρατήρηση στη σελ. 67 του σχολικού βιβλίου έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}\right)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\nu-\mu}\right).$$

v. Αν $\nu > \mu$, τότε αυτό το όριο ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$, ανάλογα με το πρόσημο του πηλίκου α_ν / β_μ. Από την άλλη, αν $\nu < \mu$, αυτό το όριο ισούται με μηδέν. Ο ισχυρισμός είναι λοιπόν αληθής.

vi. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο με αντικατάσταση της τιμής $x = 0$ στη δοσμένη σχέση.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Ο λογαριθμικός όρος ορίζεται όταν $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, ενώ το κλάσμα ορίζεται για $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο περιορισμούς, προκύπτει ότι $A_f = (-1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x>-1$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}(x+1)' - \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x^2-2x}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-x+1}{(x+1)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα όλα εξαρτώνται από το πρόσημο του αριθμητή. Ο αριθμητής είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5$$

και ρίζες

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός, οπότε το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Σημειώνουμε όμως ότι $x_1 < -1$. Πράγματι, ισχύει $\sqrt{5} > 1$, άρα

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \frac{-1-1}{2} = -1.$$

Επομένως, αυτή η ρίζα δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Για τη δεύτερη ρίζα δεν υπάρχει πρόβλημα, καθώς μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε ότι είναι θετική. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, σχεδιάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας για την f:

x	-1 $\quad\quad$ x_2	$+\infty$
$-x^2-x+1$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,x_2)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_2,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο στη θέση $x=x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Πράγματι, αν $x\in(-1,x_2]$, τότε $f(x)\leq f(x_2)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,x_2]$, ενώ, αν $x\in[x_2,+\infty)$, τότε $f(x)\leq f(x_2)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_2,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>-1$ έχουμε $f(x)\leq f(x_2)$.

Β2. Όπως είδαμε παραπάνω, η f' είναι ρητή, άρα είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Η παράγωγός της είναι ίση με

$$f''(x)=\left(\frac{-x^2-x+1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(-x^2-x+1)'(x+1)^2-(-x^2-x+1)\left[(x+1)^2\right]'}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(-2x-1)(x+1)^2+2(x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^4} = \frac{-(2x+1)(x+1)+2(x^2+x-1)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-2x^2-2x-x-1+2x^2+2x-2}{(x+1)\wedge 3} = -\frac{(x+3)}{(x+1)^3},$$

όπου παραλείψαμε κάποιους ενδιάμεσους υπολογισμούς χάριν συντομίας. Εφόσον $A_f=(-1,+\infty)$, τόσο ο αριθμητής, όσο και ο παρονομαστής, είναι θετικοί για κάθε $x \in A_f$. Έπεται λοιπόν ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > -1$, άρα η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

B3. Έχουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα, έχοντας ήδη αποδείξει ότι η f είναι κοίλη. Αυτό μας παραπέμπει σε εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι η C_f βρίσκεται «κάτω» από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής μαζί τους.
Πρέπει να επιλέξουμε όμως κάποια συγκεκριμένη εφαπτομένη. Θα επιλέξουμε αυτήν στη θέση $x = 0$. Υπάρχει κάποια εξήγηση γι' αυτήν την επιλογή; Γιατί να μη διαλέξουμε κάποια άλλη τιμή του x; Ο λόγος είναι ότι παρατηρούμε πως $f(0) = 0$. Αντίθετα, για κάθε άλλη τιμή του x, εμφανίζονται εκθετικοί ή λογαριθμικοί παράγοντες στην τιμή $f(x)$ [κάτι που δεν είναι ιδανικό για εμάς, καθώς θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) \le x$, και το δεξιό μέλος δεν περιέχει καθόλου εκθετικούς-λογαριθμικούς παράγοντες]. Φυσικά, αν βρεθείτε σε μια αντίστοιχη περίσταση και η πρώτη σας επιλογή δεν δουλέψει, μπορείτε να δοκιμάσετε και άλλες τιμές του x.

Από την έκφραση για την f' που έχουμε βρει στο Ερώτημα B1, προκύπτει ότι $f'(0) = 1$. Σε συνδυασμό με την ισότητα $f(0) = 0$, προκύπτει ότι η εφαπτομένη της C_f στη θέση $x = 0$ είναι η

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Εφόσον η C_f βρίσκεται «κάτω» από αυτήν (με εξαίρεση το σημείο επαφής), έπεται ότι $f(x) \le x$ για κάθε $x \in A_f$, και μάλιστα η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

B4. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g = \mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της ϕ είναι το σύνολο

$$A_\phi = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > -1\}.$$

Πρέπει επομένως να λύσουμε την ανίσωση $g(x) > -1$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x - 1 > -1 \Leftrightarrow e^x > 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A_\phi = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x - 1) \\ &= \ln(e^x - 1 + 1) - \frac{(e^x - 1)^2}{e^x - 1 + 1} \boxed{= x - \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x}.}\end{aligned}$$

B5. Ισχύει

$$\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=e^x-1+e^{-x},$$

άρα

$$\int_0^{\ln 2}\phi(x)dx=\int_0^{\ln 2}\left(x-\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x}\right)dx=\int_0^{\ln 2}\left(x-e^x+1-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-e^x+x+e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=\left(\frac{\ln^2 2}{2}-2+\ln 2+e^{-\ln 2}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-1+0+e^{-0}\right)$$

$$\boxed{=\frac{\ln^2 2}{2}+\ln 2-\frac{3}{2},}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $e^{-\ln 2}=\frac{1}{e^{\ln 2}}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Ισχύουν τότε τα εξής:

- $f^2(x_1)=f^2(x_2)$
- $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$

Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τη σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση, παίρνουμε

$$f^2(x_1)-e^{f(x_1)}=f^2(x_2)-e^{f(x_2)}\Rightarrow x_1^2-1=x_2^2-1$$

$$\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|.$$

Ισχύει όμως $x_1,x_2\geq 0$, οπότε η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $x_1=x_2$. Από εδώ, έπεται ότι η f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f. Δίνεται στην εκφώνηση ότι αυτό είναι το σύνολο $(-\infty,0]$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης, πρέπει να λύσουμε την ισότητα $y=f(x)$ ως προς x. Αντικαθιστώντας $y=f(x)$ στη δοσμένη σχέση, παίρνουμε ότι

$$y^2-e^y=x^2-1\Rightarrow x^2=y^2-e^y+1.\quad (1)$$

Θα θέλαμε να πάρουμε τετραγωνικές ρίζες και στα δύο μέλη, όμως δεν γνωρίζουμε αν το δεύτερο μέλος είναι μη αρνητικός αριθμός. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν πρώτα να το αποδείξουμε. Ισχύει $y=f(x)\in f([0,+\infty))=(-\infty,0]$, άρα $y\le 0$. Από αυτό έπεται ότι $e^y\le 1$, άρα

$$y^2-e^y+1\ge y^2\ge 0,$$

όπως θέλαμε. Επομένως, στη σχέση (1) μπορούμε να θεωρήσουμε τις τετραγωνικές ρίζες των δύο μελών. Προκύπτει ότι

$$|x|=\sqrt{y^2-e^y+1}\overset{x\ge 0}{\Rightarrow} x=\sqrt{y^2-e^y+1}.$$

Η σχέση $x\ge 0$ ισχύει επειδή το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι

$$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-e^x+1} \text{ για κάθε } x\le 0.}$$

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-2x$ για $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και ισχύει

$$g'(x)=e^x-2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε ότι $g'(x)<0$ για $x<\ln 2$ και $g'(x)=0$ για $x=\ln 2$. Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Έτσι, προκύπτει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\ln 2$. Το ολικό της ελάχιστο είναι ίσο με

$$g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι $\ln 2<\ln e=1$.

Πράγματι, αν $x \in (-\infty, \ln 2]$, τότε $g(x) \geq g(\ln 2)$, καθώς g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln 2]$, ενώ, αν $x \in [\ln 2, +\infty)$, τότε $g(x) \geq g(\ln 2)$, καθώς g γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) \geq g(-\ln 2)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αφού η ελάχιστη τιμή της είναι θετική, η g παίρνει μόνο θετικές τιμές, που είναι το ζητούμενο.

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της $f'(x)$. Παραγωγίζουμε λοιπόν και τα δύο μέλη της ισότητας που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση και παίρνουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\left(f^2(x) - e^{f(x)}\right)' = \left(x^2 - 1\right)' \Rightarrow 2f(x)f'(x) - e^{f(x)}f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow f'(x)\left(2f(x) - e^{f(x)}\right) = 2x \Leftrightarrow f'(x)\left(-g(f(x))\right) = 2x. \quad (2)$$

Για κάθε $x > 0$, το δεύτερο μέλος είναι θετικός αριθμός. Επίσης, ο παράγοντας $-g(f(x))$ είναι αρνητικός, διότι δείξαμε προηγουμένως ότι η g παίρνει μόνο θετικές τιμές. Έπεται λοιπόν από την παραπάνω ισότητα ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στη θέση $x = 0$, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0, +\infty) = A_f$, που είναι το ζητούμενο.

Γ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της δίνεται από τον τύπο

$$f([0, +\infty)) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), f(0)\right].$$

Γνωρίζουμε όμως ήδη από την εκφώνηση ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 0]$, άρα

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 0].$$

Από αυτήν τη σχέση έπεται ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, όπως θέλαμε.

Γ4. Από την ισότητα

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 0]$$

που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει επίσης ότι $f(0) = 0$. Αντικαθιστούμε $x = 0$ στη σχέση (2) και χρησιμοποιούμε τη σχέση $f(0) = 0$. Προκύπτει ότι

$$f'(0)\left(2f(0) - e^{f(0)}\right) = 0 \Leftrightarrow f'(0)(0 - 1) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=0.}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε αυτήν τη θέση. Γνωρίζουμε ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x \in A_{f^{-1}}=(-\infty,0]$. Θα παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη αυτής της σχέσης και θα θέσουμε $x=0$. Αυτό είναι κάτι που μπορούμε να κάνουμε, διότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$. Προκύπτει λοιπόν από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x)=x=1 \overset{x=0}{\Rightarrow} f'\left(f^{-1}(0)\right)\left(f^{-1}\right)'(0)=1.$$

Από τον τύπο της f^{-1} προκύπτει ότι $f^{-1}(0)=0$. Άρα η τελευταία ισότητα γράφεται

$$f'(0)\left(f^{-1}\right)'(0)=1 \overset{f'(0)=0}{\Rightarrow} 0\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1,$$

το οποίο είναι προφανώς αδύνατο. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{xe^x+(\alpha-1)x^2+\alpha}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{e^x}{x^2+1}+\frac{(\alpha-1)x}{x^2+1}+\frac{\alpha}{x\left(x^2+1\right)}.$$

Θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x+(\alpha-1)x^2+\alpha}{x\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{x^2+1}+\frac{(\alpha-1)x}{x^2+1}+\frac{\alpha}{x\left(x^2+1\right)}\right)=1+0+(+\infty)=+\infty, \quad (1)$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 0^+}\left[x\left(x^2+1\right)\right]=0$, και $x\left(x^2+1\right)>0$ καθώς το x τείνει στο 0 από τα δεξιά. Από την άλλη, γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x) \geq \frac{xe^x + (\alpha - 1)x^2 + \alpha}{x(x^2+1)},$$

άρα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x + (\alpha - 1)x^2 + \alpha}{x(x^2+1)}$$

Αυτό όμως θα σήμαινε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, το οποίο όμως είναι άτοπο διότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$, καθώς η f είναι συνεχής στο 0.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, υποθέτοντας ότι $\alpha \neq 0$, άρα συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$. Μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση γράφεται στη μορφή

$$f(x) \geq \frac{e^x - x}{x^2+1}. \qquad (2)$$

Μάλιστα, αφού $f(0) = 1$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει και για $x = 0$, οπότε τελικά ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \frac{e^x - x}{x^2+1}$$

για $x \in \mathbb{R}$. Από τη συνθήκη που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση και από την παρατήρηση που κάναμε στο τέλος της λύσης του Ερωτήματος Δ1, προκύπτει ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει όμως

$$g(0) = f(0) - \frac{e^0 - 0}{0^2+1} = 0,$$

οπότε ισχύει $g(x) \geq 0 = g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Φυσικά, η g είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ (και σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Συμπεραίνουμε λοιπόν από το Θεώρημα Fermat ότι $g'(0) = 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x) = f'(x) - \frac{(e^x - x)'(x^2+1) - (e^x - x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = f'(x) - \frac{(e^x - 1)(x^2+1) - 2x(e^x - x)}{(x^2+1)^2},$$

οπότε

$$g'(0)=f'(0)-\frac{(e^0-1)(0^2+1)-2\cdot 0\cdot(e^0-0)}{(0^2+1)^2}=f'(0).$$

Από τη σχέση $g'(0)=0$, έπεται λοιπόν ότι $f'(0)=0$.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\geq x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Μπορούμε να αποδείξουμε αυτήν την ανισότητα με χρήση της «γνωστής» ανισότητας $\ln x\leq x-1$, αντικαθιστώντας το x με e^x. Όπως έχουμε αναφέρει ξανά, η τελευταία ανισότητα είναι «γνωστή» διότι αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, και έτσι μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.
Αντικαθιστώντας το x με $x-1$ στην ανισότητα $e^x\geq x+1$, παίρνουμε $e^{x-1}\geq(x-1)+1=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με ισότητα μόνο αν $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Επομένως, συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα με τη (2), παίρνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\geq\frac{e^x-x}{x^2+1}=\frac{e\cdot e^{x-1}-x}{x^2+1}\overset{(2)}{\geq}\frac{ex-x}{x^2+1}=\frac{ex}{x^2+1},$$

με την ισότητα στη δεύτερη ανισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ισχύει η γνήσια ανισότητα

«Γνήσια», διότι στην παραπάνω ανισότητα η ισότητα ισχύει (ενδεχομένως) για x=1 και για καμία άλλη τιμή του x. Γράφουμε «ενδεχομένως», διότι η παραπάνω σχέση αποτελείται από 2 ανισότητες και, για να ισχύει η ισότητα, πρέπει να ισχύει η ισότητα και στις δύο αυτές επιμέρους ανισότητες.

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\frac{ex}{x^2+1}dx=\left[\frac{e}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{e\ln 2}{2}.$$

Δ4. Η σχέση (2) μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί στη μορφή

$$(x^2+1)f(x)\geq e^x-x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x^2+1)f(x)-e^x+x$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, ισχύει $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα η h είναι η μηδενική συνάρτηση. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x_0)>0$. Επιλέγοντας το β αρκετά μεγάλο, μπορούμε να διασφαλίσουμε ότι $x_0\in[-\beta,\beta]$. Χρησιμοποιούμε τώρα για την h το θεώρημα 3 της σελ. 214 του σχολικού βιβλίου. Το διάστημα στο οποίο εφαρμόζουμε το θεώρημα είναι το $[-\beta,\beta]$. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\beta}^{\beta} h(x)dx > 0 \Rightarrow \int_{-\beta}^{\beta} (x^2+1)f(x)dx - \int_{-\beta}^{\beta} (e^x - x)dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\beta}^{\beta} (x^2+1)f(x)dx > \int_{-\beta}^{\beta} (e^x - x)dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\beta}^{\beta} (x^2+1)f(x)dx > \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\beta}^{\beta} = e^{\beta} - e^{-\beta},$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της ισότητας που μας έχει δοθεί στην υπόθεση. Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι η h δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, οπότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x^2+1)f(x) = e^x - x \;\; \boxed{\Rightarrow f(x) = \frac{e^x - x}{x^2+1}.}$$

Διαγώνισμα 4.26

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)**Λ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right)'}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x) = \frac{-8\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right)'}{\left(e^x + e^{-x}\right)^4} = -\frac{8\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^3}$$

Ισχύει ότι $e^x + e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και $\left(e^x + e^{-x}\right)^3 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα ο παρονομαστής είναι θετικός. Επομένως, για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f'', πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο του αριθμητή. Συγκεκριμένα, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -8\left(e^x - e^{-x}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(e^x - e^{-x}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow e^x < e^{-x} \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x < -x \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f'' είναι αρνητική για $x > 0$ και μηδενίζεται για $x = 0$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $\Sigma(0,f(0))\equiv(0,0)$.

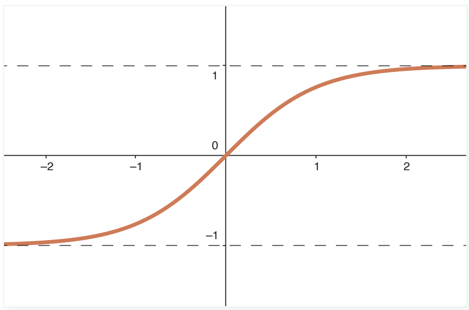
B3. Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, επομένως η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα αναζητήσουμε οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και το $-\infty$. Αναζητούμε αρχικά οριζόντιες ασύμπτωτες. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\dfrac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\dfrac{e^{-x}}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-e^{-2x}\right)}{\left(1+e^{-2x}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1,$$

οπότε η ευθεία $\boxed{y=-1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Τέλος, εφόσον η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες, συμπεραίνουμε ότι δεν έχει πλάγιες. Με βάση τη μονοτονία, την κυρτότητα και τις ασύμπτωτές της που βρήκαμε παραπάνω, μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της C_f. Αυτή φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



B4. Αντικαθιστούμε $u=e^x+e^{-x}$, όπως υποδεικνύεται στην εκφώνηση. Τότε, ισχύει $du=\left(e^x-e^{-x}\right)dx$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$, ισχύει $u=e^0+e^{-0}=2$.
- Για $x=1$ ισχύει $u=e+e^{-1}$.

Τότε, το ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{e^x+e^{-x}}\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)\right]dx$$

$$=\int_2^{e+e^{-1}}\frac{1}{u}du=\left[\ln|u|\right]_2^{e+e^{-1}}\ \boxed{=\ln\left(e+e^{-1}\right)-\ln 2.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Το πεδίο ορισμού της h είναι το $A_h=(0,+\infty)$ και το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A_\varphi=\mathbb{R}-\{0\}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της $f=\varphi\circ h$ είναι το σύνολο

$$A_f=\left\{x\in A_h : h(x)\in A_\varphi\right\}.$$

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα περιορισμών:

$$\begin{cases} x\in A_h \\ h(x)\in A_\varphi \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ h(x)\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq \ln 1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}.$$

Συνδυάζοντας τους δύο περιορισμούς, παίρνουμε ότι $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$. Για κάθε $x\in A_f$ ισχύει

$$\boxed{f(x)=\varphi\left(h(x)\right)=\frac{1}{|h(x)|}=\frac{1}{|\ln x|}.}$$

Γ2. Θα προσπαθήσουμε αρχικά να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή, διότι με την απόλυτη τιμή είναι αδύνατο να υπολογίσουμε παραγώγους.

- Για κάθε $0<x<1$ ισχύει $\ln x<\ln 1=0$, καθώς η $g(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $|\ln x|=-\ln x$ για κάθε $0<x<1$.
- Για κάθε $x>1$ ισχύει $\ln x>\ln 1=0$, και πάλι λόγω της μονοτονίας της λογαριθμικής συνάρτησης. Άρα για $x>1$ ισχύει $|\ln x|=\ln x$.

Συμπεραίνουμε ότι ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται στη μορφή

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{\ln x}, & x>1 \end{cases}.$$

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία της f, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου της ξεχωριστά για κάθε κλάδο.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{1}{x(\ln x)^2}>0.$$

  Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x(\ln x)^2}<0.$$

  Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Μελετάμε τώρα την f ως προς την κυρτότητα, ξεχωριστά για κάθε κλάδο της.

- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)'=\frac{-(\ln x)^2-2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{x^2(\ln x)^4}=\frac{-(\ln x)^2-2\ln x}{x^2(\ln x)^4}.$$

  Ο παρονομαστής είναι θετικός, οπότε το πρόσημο εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμητή. Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$f''(x)>0\Leftrightarrow-(\ln x)^2-2\ln x>0\Leftrightarrow(\ln x)^2+2\ln x<0\Leftrightarrow\ln x(\ln x+2)<0.$$

Όμως, όπως είδαμε και πριν, για κάθε $0<x<1$ ισχύει $\ln x<0$. Άρα, στο διάστημα $(0,1)$, η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+2>0 \Leftrightarrow \ln x>-2 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x>e^{-2} \overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow} x\in\left(e^{-2},1\right).$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f''(x)=0$ για $x=e^{-2}$ και $f''(x)<0$ για $x\in\left(0,e^{-2}\right)$.

- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)'=\frac{(\ln x)^2+2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{x^2(\ln x)^4}=\frac{(\ln x)^2+2\ln x}{x^2(\ln x)^4}.$$

Όπως και πριν, ο παρονομαστής είναι θετικός. Πλέον όμως, είναι και ο αριθμητής θετικός, αφού $\ln x>0$ για $x>1$.

Βάσει των παραπάνω πληροφοριών, σχεδιάζουμε τον ακόλουθο πίνακα κυρτότητας:

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left[e^{-2},1\right)$ και $(1,+\infty)$, και κοίλη στο διάστημα $\left(0,e^{-2}\right]$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $K\left(e^{-2},f\left(e^{-2}\right)\right)$.

Γ3. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|\ln x|}=0,$$

καθώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Επομένως, η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αντίθετα, ισχύει

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{|\ln x|}=+\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0$ και $|\ln x| > 0$ για $x < 1$ και κοντά στο 1. Επομένως, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αναζητούμε τώρα οριζόντιες/πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|\ln x|} = 0,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Εφόσον έχει οριζόντια ασύμπτωτη, η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Γ4. Για να βρούμε τα σημεία A, B, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 1$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\ln x|} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\ln x} = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \quad \text{ή} \quad \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e \quad \text{ή} \quad x = e^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, B έχουν συντεταγμένες $(e,1)$ και $(e^{-1},1)$ αντίστοιχα (για την ακρίβεια, δεν έχει τόση σημασία ποιο σημείο από τα δύο ονομάζουμε A και ποιο B). Για να αποδείξουμε ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης τους έχουν γινόμενο ίσο με -1, αφού αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τις κάθετες ευθείες.

Στο σημείο A η κλίση της C_f είναι ίση με

$$f'(e) = -\frac{1}{e(\ln e)^2} = -\frac{1}{e},$$

ενώ στο σημείο B η κλίση της C_f είναι ίση με

$$f'(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}(\ln e^{-1})^2} = \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $f'(e)f'(e^{-1}) = -1$, άρα οι εφαπτομένες στα σημεία A, B είναι μεταξύ τους κάθετες.

Γ5. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ισχύει $\alpha'(t) = 5\alpha(t)\,\mathrm{cm/s}$. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $\Sigma(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 1$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\ln\alpha} = -\frac{1}{\alpha(\ln\alpha)^2}(x - \alpha)$$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει η ευθεία (ε) τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y=0$. Τότε, προκύπτει η εξίσωση

$$-\frac{1}{\ln\alpha}=-\frac{1}{\alpha(\ln\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow \alpha\ln\alpha=x-\alpha$$
$$\Leftrightarrow x=\alpha+\alpha\ln\alpha.$$

Άρα η τετμημένη του Γ γράφεται συναρτήσει του χρόνου στη μορφή

$$x_\Gamma(t)=\alpha(t)+\alpha(t)\ln\alpha(t).$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας, προκύπτει ότι

$$x'(t)=\left(\alpha(t)+\alpha(t)\ln\alpha(t)\right)'=\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)+\alpha(t)\cdot\frac{1}{\alpha(t)}\alpha'(t)$$
$$=2\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)=\alpha'(t)\left(2+\ln\alpha(t)\right).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $\alpha(t_0)=e^2$, ισχύει ότι

$$\alpha'(t_0)=5\alpha(t_0)=5e^2 \mathrm{cm/s},$$

συνεπώς

$$\boxed{x'(t_0)=5e^2\left(2+\ln e^2\right)=20e^2 \ \mathrm{cm/s}}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$w'(x)=2g(x)g'(x)-2xg'(x)-2g(x)$$

Όμως, επειδή $g'(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)-x}$, η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$w'(x)=2g(x)\left(\frac{g(x)}{g(x)-x}\right)-2x\left(\frac{g(x)}{g(x)-x}\right)-2g(x)$$
$$=\frac{2g^2(x)-2xg(x)}{g(x)-x}-2g(x)=\frac{2g^2(x)-2xg(x)-2g(x)\left(g(x)-x\right)}{g(x)-x}$$

$$= \frac{2g^2(x) - 2xg(x) - 2g^2(x) + 2xg(x)}{g(x) - x} = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έπεται ότι η w είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Αφού η w είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $w(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα, ισχύει $g^2(x) - 2xg(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$, και με χρήση της υπόθεσης $g(0) = 4$, προκύπτει ότι $c = 16$. Έπεται λοιπόν ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g^2(x) - 2xg(x) = 16 \Leftrightarrow g^2(x) - 2xg(x) + x^2 = x^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (g(x) - x)^2 = x^2 + 16 \Leftrightarrow |g(x) - x| = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$\Leftrightarrow |h(x)| = \sqrt{x^2 + 16}, \qquad (1)$$

όπου ορίσαμε $h(x) = g(x) - x$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{x^2 + 16} \neq 0$, προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι $|h(x)| \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, η h είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$. Αφού δεν μηδενίζεται, έπεται ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Για να βρούμε αυτό το πρόσημο, υπολογίζουμε μία τιμή της. Ισχύει

$$h(0) = g(0) = 4 > 0,$$

άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (1) ότι

$$\boxed{h(x) = \sqrt{x^2 + 16} \Leftrightarrow g(x) = x + \sqrt{x^2 + 16} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.}$$

Δ3. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $x + \sqrt{x^2 + 16} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(g(x)) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right)$$

είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι προφανής αν $x \geq 0$, καθώς τότε ισχύει

$$x + \sqrt{x^2 + 16} \geq 0 + \sqrt{16} > 0$$

Αν τώρα $x < 0$, τότε ισχύει

$$x + \sqrt{x^2 + 16} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| = 0,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|x|=-x$ για $x<0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)=\ln(g(x))$ είναι πράγματι το $A_f=\mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{g(x)}{g(x)-x}}{g(x)}=\frac{1}{h(x)}>0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την τρίτη συνθήκη που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση και στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπως αποδείξαμε στο Ερώτημα Δ2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1». Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της f θα δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right). \quad (2)$$

Αυτά τα δύο όρια υπολογίζονται ως εξής:

- Το όριο της g στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)=+\infty$$

  άρα ισχύει και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(g(x))\overset{u=g(x)}{=}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty. \quad (3)$$

- Το όριο της g στο $-\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+16}\right),$$

το οποίο έχει την απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)+(+\infty)$. Κάνουμε το γνωστό τρικ του πολλαπλασιασμού με τη συζυγή παράσταση. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\left(x-\sqrt{x^2+16}\right)}{x-\sqrt{x^2+16}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^2+16}^{\,2}}{x-\sqrt{x^2+16}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-16}{x-\sqrt{x^2+16}}=0=0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(g(x)\right) \overset{u=g(x)}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3), (4), προκύπτει ότι $\boxed{f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}\,.}$

Δ4. Στο Ερώτημα Δ3 υπολογίσαμε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$I_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^3 = f(3) - f(0).$$

Ισχύει

$$f(3) = \ln g(3) = \ln\left(3+\sqrt{3^2+16}\right) = \ln(3+5) = \ln 8$$

και $f(0) = \ln\left(g(0)\right) = \ln 4$, άρα από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$\boxed{I_1 = \ln 8 - \ln 4 = \ln(8/4) = \ln 2.}$$

Δ5. i. Ισχύει

$$I_2 + 16I_1 = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx + \int_0^3 \frac{16}{\sqrt{x^2+16}}dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx = I_3.$$

Για δεύτερη ζητούμενη σχέση, θα εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση στο I_3:

$$I_3 = \int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx = \int_0^3 (x)'\sqrt{x^2+16}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+16}\right]_0^3 - \int_0^3 x\left(\sqrt{x^2+16}\right)'dx$$

$$= 3\sqrt{25} - \int_0^3 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+16}}\left(x^2+16\right)'dx = 15 - \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx \;\boxed{= 15 - I_2,}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} I_2+16I_1=I_3 \\ I_2+I_3=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2+16I_1=15-I_2 \\ I_3=15-I_2 \end{cases} \overset{I_1=\ln 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2I_2=15-16\ln 2 \\ I_3=15-I_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_2=15/2-8\ln 2 \\ I_3=15-(15/2-8\ln 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2=15/2-8\ln 2 \\ I_3=15/2+8\ln 2 \end{cases}.$$

Διαγώνισμα 4.27

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)**Σ, **v)** Λ

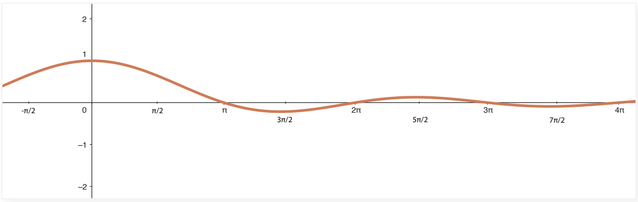
Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Έχουμε συναντήσει ξανά αυτό το ερώτημα στο διαγώνισμα 4.22 (ερώτημα i στα Σ/Λ). Δείτε τη λύση εκείνου του ερωτήματος, η οποία περιέχει αντιπαράδειγμα με αναλυτική εξήγηση.

ii. Προκύπτει από την ιδιότητα 5 στη σελ. 48 του σχολικού βιβλίου.

iii. Έχουμε συναντήσει ξανά αυτό το ερώτημα σε προηγούμενα διαγωνίσματα. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε, για παράδειγμα, τη λύση του ερωτήματος iv στο διαγώνισμα 4.23.

iv. Παρότι αυτό φαίνεται οξύμωρο, ο όρος «ασύμπτωτη» είναι παραπλανητικός και στην πραγματικότητα η C_f μπορεί να έχει κοινά σημεία με μια ασύμπτωτή της. Το κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x/x$. Με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής, μπορούμε να δείξουμε ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Παρ' όλα αυτά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η C_f τέμνει αυτήν την ευθεία, και μάλιστα σε άπειρα σημεία, αφού για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$ ισχύει $f(\kappa\pi)=0$.



v. Έχουμε συναντήσει αυτό το ερώτημα και σε άλλα διαγωνίσματα. Δείτε, για παράδειγμα, το Ερώτημα A3 στο Διαγώνισμα 4.25. Αυτό το ερώτημα έχει τεθεί στις εξετάσεις ως ερώτηση Σ/Λ με αιτιολόγηση, οπότε είναι καλό να θυμόμαστε ένα σχετικό αντιπαράδειγμα.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $x=0$ διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$.
- $f(0)=0$.

Θα προσδιορίσουμε τώρα το πρόσημο της παραγώγου ξεχωριστά σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

- Για $x<0$ ισχύει $f'(x)=\left(-x^2\right)'=-2x>0$, όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $x<0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στη θέση $x=0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $(-\infty,0]$.

- Για $x>0$ ισχύει $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x>0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στη θέση $x=0$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $[0,+\infty)$.

Καθώς η f είναι συνεχής στο 0 και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Αυτό είναι συνέπεια του μέρους (iii) του θεωρήματος στη σελ. 144 του σχολικού βιβλίου.

B2. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, έπεται ότι είναι «1-1». Άρα, η f αντιστρέφεται. Θα προσδιορίσουμε τώρα την f^{-1} λύνοντας την εξίσωση $f(x)=y$. Θα διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- Για $x=0$: Γνωρίζουμε ότι $f(0)=0$, οπότε έπεται ότι $f^{-1}(0)=0$.
- Για $x>0$: Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{y} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{y}.$$

- Για $x<0$: Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow -x^2=y \Leftrightarrow x^2=-y$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{-y} \Leftrightarrow |x|=\sqrt{-y}$$
$$\overset{x<0}{\Leftrightarrow} -x=\sqrt{-y} \Leftrightarrow x=-\sqrt{-y}.$$

Μπορεί αρχικά να φαίνεται παράδοξο ότι εμφανίζεται το -y κάτω από τη ρίζα, καθώς το «-» μας παραπέμπει σε αρνητικό αριθμό. Εδώ όμως αυτό δεν αληθεύει: Καθώς x^2=-y, έπεται ότι ο -y είναι μη αρνητικός.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι

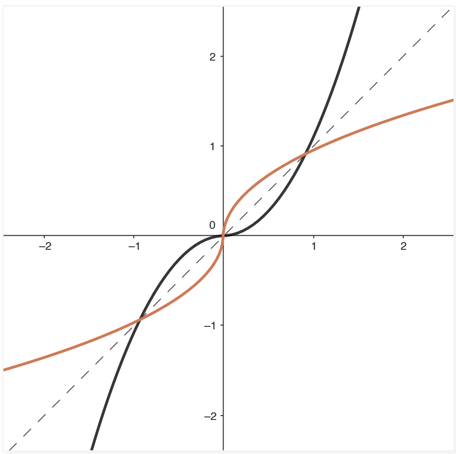
$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x<0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases},$$

όπου η σύμπτυξη μπορεί να γίνει, αφού ο «κάτω» κλάδος ορίζεται καλά για $x=0$, και έχει την ίδια τιμή με τον μεσαίο κλάδο γι' αυτήν την τιμή του x.

B3. Λύνουμε αρχικά την εξίσωση $f(x)=x$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό τύπο της f, αυτόν με την απόλυτη τιμή. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=x \Leftrightarrow x|x|=x \Leftrightarrow x|x|-x=0 \Leftrightarrow x(|x|-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad |x|=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad x=\pm 1.$$

Ο σχεδιασμός της C_f είναι εύκολος:



- Για $x<0$ ισχύει $f(x)=-x^2$, οπότε σχεδιάζουμε το κομμάτι της παραβολής $y=-x^2$ που αντιστοιχεί σε $x<0$.
- Για $x\geq 0$ ισχύει $f(x)=x^2$, οπότε σχεδιάζουμε το κομμάτι της παραβολής $y=x^2$ που αντιστοιχεί σε $x\geq 0$.

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τη $C_{f^{-1}}$ ως τη συμμετρική της C_f με άξονα την ευθεία $y=x$. Όλα αυτά φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου η C_f είναι σχεδιασμένη με γαλάζιο και η $C_{f^{-1}}$ με μαύρο χρώμα.

B4. Για x κοντά στο $+\infty$ ισχύει $f(x)=x^2$. Εφόσον η f/g έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x-4$ στο $+\infty$, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x}=1.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-x\right)=-4$.

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ (αν υπάρχει). Παρατηρούμε ότι για $x>0$ ισχύει

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x}=\frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x}=\frac{x}{g(x)},$$

οπότε, σύμφωνα με τις δύο παραπάνω παρατηρήσεις, έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)/g(x)}{x}\right)}=1. \qquad (1)$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x)=4$. Όπως είδαμε, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-x\right)=-4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{g(x)}-x\right)=-4$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-xg(x)}{g(x)}\right)=-4. \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{g(x)}(x-g(x))=-4.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$, το οποίο είδαμε στη σχέση (1) ότι ισούται με 1, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{x}{g(x)}\cdot(x-g(x))\right]=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{g(x)}\cdot(x-g(x))\right)=-4.$$

Σημειώνουμε ότι η ανάλυση σε δύο επιμέρους όρια είναι επιτρεπτή, αφού, σύμφωνα με όσα έχουμε αποδείξει παραπάνω, και τα δύο αυτά όρια υπάρχουν (δείτε την ιδιότητα 3 στο θεώρημα της σελ. 48 του σχολικού βιβλίου). Ισχύει όμως

$$\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{x}{g(x)}\cdot\left(x-g(x)\right)=x-g(x),$$

οπότε η παραπάνω ισότητα συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-g(x)\right)=-4$, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=4,\quad (2)$$

που είναι το ζητούμενο. Οι σχέσεις (1) και (2) αποδεικνύουν ότι πράγματι η ευθεία $y=x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $1+e^{-x}>0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Πρέπει επομένως να βρούμε τα όρια της f στο $-\infty$ και το $+\infty$.

- Ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{-x}\right)\overset{u=-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+e^{u}\right)=+\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=+\infty.$$

- Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)\overset{u=-x}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(1+e^{u}\right)=1+0=1$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln(1+0)=0.$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)'=\frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)}\left(1+e^{-x}\right)'=-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.\quad (1)$$

Ισχύει λοιπόν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\left(-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)'=-\frac{\left(e^{-x}\right)'\left(1+e^{-x}\right)-e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)'}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$=-\frac{-e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)-e^{-x}\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=-\frac{-e^{-x}-e^{-2x}+e^{-2x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση:

Προσπαθήστε να δείξετε ότι αυτή η συνάρτηση είναι η ίδια με εκείνη που είχαμε συναντήσει στο Θέμα Δ του Διαγωνίσματος 4.24. Εκεί βέβαια τα ερωτήματα ήταν διαφορετικά και δεν αφορούσαν μονοτονία/κυρτότητα. Μάλιστα, η αντίθετη αυτής της συνάρτησης είχε τεθεί στο Θέμα Γ των Μαθηματικών κατεύθυνσης στις Εξετάσεις του 2014.

Γ3. Ισχύει $f(0)=\ln\left(1+e^{-0}\right)=\ln 2$. Επίσης, από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$f'(0)=-\frac{e^{-0}}{1+e^{-0}}=-\frac{1}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\ln 2.}$$

Στο Δ2 δείξαμε ότι η f είναι κυρτή. Αυτό σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται «πάνω» από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής μαζί τους. Από αυτό προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f(x)\geq -\frac{1}{2}x+\ln 2}$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$.

Γ4. i. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$=\ln\left(1+e^x\right)-\ln e^x=\ln\left(1+e^x\right)-x. \quad (2)$$

Από τον ορισμό της f, προκύπτει επίσης ότι

$$f(-x)=\ln\left(1+e^{-(-x)}\right)=\ln\left(1+e^{x}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από αυτές τις δύο σχέσεις ότι

$$\boxed{f(x)-f(-x)=\left(\ln\left(1+e^{x}\right)-x\right)-\ln\left(1+e^{x}\right)=-x,}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

ii. Γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου ότι η κλίση μιας ευθείας που περνά από δύο σημεία $K(x_1,y_1)$ και $\Lambda(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$$\lambda_{K\Lambda}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Άρα η κλίση της ευθείας AB είναι ίση με

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{\alpha-(-\alpha)}=-\frac{\alpha}{2\alpha}=-\frac{1}{2},$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος i. Όμως, από την εξίσωση της (ε) που έχουμε βρει στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η κλίση αυτής της ευθείας είναι επίσης ίση με $-\frac{1}{2}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Επισημαίνουμε αρχικά ότι η f είναι καλά ορισμένη στο διάστημα A. Πράγματι, για κάθε $x\in A$ ισχύει

$$0\le x<\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow 0\le\sqrt{x}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)<0,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι θετικό στο διάστημα $[0,\pi/2)$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Μας αρκεί το πλευρικό όριο διότι η f είναι ορισμένη μόνο από τη δεξιά πλευρά του x_0=0.

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Εφόσον $\sigma\upsilon\nu(0)=1$, έπεται ότι $f(0)=1$.

Άρα το παραπάνω όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}{x\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}. \qquad (3)$$

Αυτό το όριο δυστυχώς έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε όμως τον κανόνα De L' Hospital, καθώς οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις (σύνθεση τριγωνομετρικών με τετράγωνο και ρίζα) έχουν ακόμη πιο περίπλοκες παραγώγους και επομένως τα πράγματα θα γίνουν ακόμη πιο δύσκολα.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u=\sqrt{x}$, το όριο γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2(u)}{u^2\sigma\upsilon\nu^2(u)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu(u)\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu(u)\right)}{u^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2(u)}=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(u)}{u^2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu(u)}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}\right) \qquad (4)$$

Σημείωση:

Στο τελευταίο βήμα επιλέξαμε αυτήν την ανάλυση σε δύο παράγοντες διότι παρατηρήσαμε ότι η απροσδιοριστία $0/0$ προέρχεται από τους όρους $1-\sigma\upsilon\nu(u)$ και u^2. Ο δεύτερος παράγοντας δεν αποτελεί πλέον πρόβλημα, καθώς δεν έχει απροσδιόριστη μορφή. Μάλιστα, το όριό του υπολογίζεται άμεσα και είναι ίσο με 2. Γενικά, όταν εμφανίζεται απροσδιόριστη μορφή, είναι καλό να κάνουμε στην άκρη τους παράγοντες που δεν προκαλούν την απροσδιοριστία, έτσι ώστε να απλοποιηθεί το κομμάτι που την προκαλεί.

Φυσικά, στην ισότητα (4), ένα ακόμη σημαντικό βήμα είναι η παραγοντοποίηση του αριθμητή.

Εστιάζουμε τώρα στον πρώτο παράγοντα. Αυτός έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, οπότε θα εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Ισχύει λοιπόν

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(u)}{u^2}\right)\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(u)}{2u}=\frac{1}{2},$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu x/x\right)=1$. Πλέον, το όριο της σχέσης (4) υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(u)}{u^2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu(u)}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1^2}=1.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το όριο που μόλις υπολογίσαμε είναι (μετά από πολλά ενδιάμεσα βήματα) το

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Άρα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει $\boxed{f'(0)=1.}$

Σημείωση:

Ένα ακόμη σημαντικό μέρος της λύσης είναι η αλλαγή μεταβλητής $u=\sqrt{x}$. Γενικότερα, η σύνθεση της τριγωνομετρικής συνάρτησης με την τετραγωνική ρίζα περιπλέκει πολύ τα πράγματα, οπότε μια τέτοια αλλαγή μεταβλητής είναι λογική και οδηγεί σε απλοποίηση του ορίου.

Σημείωση:

Κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί γιατί δεν μπορούμε να γράψουμε την κλασική φράση «η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ως πράξη παραγωγίσιμων» και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την f' από τον τύπο της f. Ο λόγος είναι ότι η συνάρτηση $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι επίσης ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, παρότι η f είναι σύνθεση κάποιων συναρτήσεων, οι οποίες δεν είναι όλες παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ (όπως, π.χ., η τετραγωνική ρίζα), η ίδια η f είναι παραγωγίσιμη!

Για να βρούμε την εφαπτομένη της C_f, αρκεί να υπολογίσουμε το $f(0)$ και το $f'(0)$. Όμως αυτά έχουν ήδη υπολογιστεί: Είδαμε πιο πάνω ότι $f'(0)=1$ και στην αρχή της λύσης δείξαμε και ότι $f(0)=1$. Επομένως, η ζητούμενη εφαπτόμενη ευθεία είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+1.}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ο υπολογισμός της παραγώγου θέλει ιδιαίτερη προσοχή, διότι η $\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)$ είναι σύνθεση τριών συναρτήσεων (ρίζα - συνημίτονο - τετράγωνο). Για κάθε $x\in\left(0,\pi^2/4\right)$ ισχύει

$$f'(x)=-\frac{\left(\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)\right)'}{\sigma\upsilon\nu^4\left(\sqrt{x}\right)}=-\frac{2\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)\right)'}{\sigma\upsilon\nu^4\left(\sqrt{x}\right)}$$

$$=-\frac{2\left(-\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\sigma\upsilon\nu^3\left(\sqrt{x}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sigma\upsilon\nu^3\left(\sqrt{x}\right)}.$$

Ο παράγοντας $\sqrt{x}$ που εμφανίζεται στον παρονομαστή είναι ο λόγος που υπολογίζουμε την παράγωγο στο $\left(0,\pi^2/4\right)$, εξαιρώντας το $x_0=0$. Αυτή η παρατήρηση σχετίζεται με τη σημείωση που κάναμε στο τέλος του προηγούμενου ερωτήματος.

Ο παράγοντας $\sqrt{x}$ είναι θετικός για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi^2}{2}\right)$. Επίσης, δείξαμε προηγουμένως, στην αρχή του Ερωτήματος Δ1, ότι $\sqrt{x}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x\in A$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)>0$ και $\sigma\upsilon\nu^3\left(\sqrt{x}\right)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi^2}{4}\right)$, αφού γνωρίζουμε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι θετικές στο πρώτο τεταρτημόριο, με εξαίρεση πιθανά (κάποια από) τα άκρα, τα οποία εδώ όμως τα έχουμε εξαιρέσει ούτως ή άλλως, αφού δουλεύουμε στο ανοιχτό διάστημα $\left(0,\frac{\pi^2}{4}\right)$. Έπεται λοιπόν ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi^2}{4}\right)$. Λόγω συνέχειας, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $A=\left[0,\frac{\pi^2}{4}\right)$.

Εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f\left(\left[0,\pi^2/4\right)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\left(\pi^2/4\right)^-}f(x)\right). \qquad (5)$$

Υπολογίζουμε λοιπόν το όριο της f, καθώς $x\to\frac{\pi^2}{4}^-$:

$$\lim_{x\to\left(\pi^2/4\right)^-}f(x)=\lim_{x\to\left(\pi^2/4\right)^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}\overset{u=\sqrt{x}}{=}\lim_{u\to(\pi/2)^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}. \qquad (6)$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{u\to(\pi/2)^-}\sigma\upsilon\nu^2(u)=\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

και φυσικά $\sigma\upsilon\nu^2(u)>0$, καθώς $u\to\frac{\pi}{2}^-$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το όριο της σχέσης (6) ισούται με $+\infty$. Από την (5) έπεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με $f(A)=\left[f(0),+\infty\right)=[1,+\infty)$.

Δ3. Η εκφώνηση του ερωτήματος μοιάζει πολύ με τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ., οπότε θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το θεώρημα. Συγκεκριμένα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 .$$

Ισχύει $\left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right] \subseteq A$, οπότε ισχύουν τα εξής:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right]$, αφού είναι συνεχής σε όλο το A.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right)$, αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το A.

Έπεται λοιπόν από το Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{9}\right) - f\left(\frac{\pi^2}{16}\right)}{\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}} .$$

Ισχύει όμως

$$f\left(\frac{\pi^2}{9}\right) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

και

$$f\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

και $\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{7\pi^2}{144}$, οπότε έπεται από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{9}\right) - f\left(\frac{\pi^2}{16}\right)}{\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}} = \frac{4-2}{\frac{7\pi^2}{144}} = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 ,$$

όπως θέλαμε. Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $144 = 12^2$.

Δ4. Όπως δείξαμε στο Ερώτημα Δ3, η f παίρνει μόνο θετικές τιμές (για την ακρίβεια, μεγαλύτερες ή ίσες του 1). Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^{\pi^2/9}|f(x)|dx=\int_0^{\pi^2/9}f(x)dx=\int_0^{\pi^2/9}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}dx \qquad (7)$$

Κάνουμε και πάλι την αλλαγή μεταβλητής $u=\sqrt{x}$, που έχει αποδειχτεί πολύ χρήσιμη και σε προηγούμενα ερωτήματα. Ισχύει τότε

$$du=\left(\sqrt{x}\right)'dx=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2u}dx$$

άρα $dx=(2u)du$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$ ισχύει $u=0$.
- Για $x=\frac{\pi^2}{9}$ ισχύει $u=\frac{\pi}{3}$.

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=(\varepsilon\varphi(x))'$, προκύπτει από τη σχέση (7) ότι

$$E=\int_0^{\pi/3}2u\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}du=\int_0^{\pi/3}(\varepsilon\varphi(u))'\cdot 2udu=\left[2u\varepsilon\varphi(u)\right]_0^{\pi/3}-\int_0^{\pi/3}(2u)'\varepsilon\varphi(u)du$$

$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{3}-2\int_0^{\pi/3}\varepsilon\varphi(u)du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\int_0^{\pi/3}\frac{\eta\mu(u)}{\sigma\upsilon\nu(u)}du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\int_0^{\pi/3}-\frac{(\sigma\upsilon\nu(u))'}{\sigma\upsilon\nu(u)}du$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\int_0^{\pi/3}(\ln(\sigma\upsilon\nu(u)))'du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+2\left[\ln(\sigma\upsilon\nu(u))\right]_0^{\pi/3}\ \boxed{=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+2\ln\frac{1}{2},}$$

όπου ενδιάμεσα χρησιμοποιήσαμε και την ταυτότητα $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Διαγώνισμα 4.28

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 77.

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

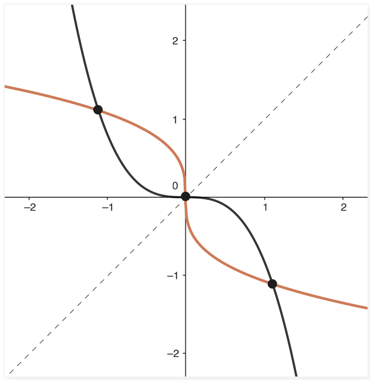
Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)**Σ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Δείτε τη συζήτηση στο τέλος της σελ. 74 του σχολικού βιβλίου.

ii. Η παράγωγος είναι ίση με $\frac{1}{x}$. Δείτε τη σελ. 117 του σχολικού βιβλίου για περισσότερες λεπτομέρειες. Είναι καλό να γνωρίζουμε και την απόδειξη αυτής της ισότητας.

iii. Αυτή η πρόταση στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Παρότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, αυτό δεν συνεπάγεται ότι όλα τα κοινά τους σημεία βρίσκονται πάνω σε αυτήν την ευθεία. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x)=-x^3$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε σχεδιάσει επίσης την ευθεία $y=x$ και τη συμμετρική της C_f ως προς αυτήν την ευθεία, δηλαδή τη $C_{f^{-1}}$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν τρία κοινά σημεία, όμως μόνο ένα από αυτά βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$. Έτσι, καταρρίπτεται ο ισχυρισμός ότι όλα τα κοινά σημεία βρίσκονται πάνω σε αυτήν την ευθεία. Είναι όμως χρήσιμο να τονίσουμε ότι, αν κάναμε την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε ο ισχυρισμός θα ήταν αληθής! Εδώ, η συνάρτηση $f(x)=-x^3$ δεν είναι γνησίως αύξουσα, οπότε δεν εμπίπτει σε αυτήν την κατηγορία και γι' αυτό άλλωστε αποτελεί αντιπαράδειγμα.



iv. Ισχύει $x^{2\nu}>0$ για x κοντά στο 0 και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\nu}=0$.

v. Όπως έχουμε δει αρκετές φορές σε προηγούμενα διαγωνίσματα, αυτός ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος –μόνο η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι σωστή. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε το ερώτημα Α4i στο διαγώνισμα 4.6.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της $f = g\circ\varphi$ είναι το σύνολο $A_f = \{x \in A_\varphi \mid \varphi(x) \in A_g\}$. Λύνουμε αυτό το σύστημα των περιορισμών:

$$\begin{cases} x \in A_\varphi \\ \varphi(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 < \sqrt{x-1} < 1 \end{cases}$$

Το σκέλος $\sqrt{x-1} > -1$ ισχύει για κάθε $x \geq 1$. Η ανίσωση $\sqrt{x-1} < 1$ είναι, για κάθε $x \geq 1$, ισοδύναμη της

$$\sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow x-1 < 1 \Leftrightarrow x < 2.$$

Επομένως, το παραπάνω σύστημα περιορισμών είναι ισοδύναμο με τις ανισότητες $1 \leq x$ και $x < 2$, απ' όπου έπεται τελικά ότι $A_f = [1,2)$. Για κάθε $x \in [1,2)$ ισχύει

$$f(x) = (g\circ\varphi) = g(\varphi(x)) = \ln(1-\varphi^2(x)) = \ln\left(1-\sqrt{x-1}^{\,2}\right) \boxed{= \ln(2-x).}$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2)$ και για κάθε $x \in [1,2)$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{2-x}(2-x)' = -\frac{1}{2-x}.$$

Καθώς $x < 2$, θα ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε και «1-1» σε αυτό. Από αυτό προκύπτει ότι η f αντιστρέφεται. Για τον τύπο της αντίστροφης, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

όπως έχουμε κάνει πολλές φορές σε προηγούμενα αντίστοιχα θέματα. Αντικαθιστώντας τον τύπο της f, αυτή η ισοδυναμία γράφεται στη μορφή

$$y = \ln(2-x) \Leftrightarrow 2-x = e^y \Leftrightarrow x = 2-e^y.$$

Πρέπει όμως να ισχύει $x \in A_f = [1,2)$, άρα, για να είναι αποδεκτή η παραπάνω ισότητα, θα πρέπει

$$1 \leq 2-e^y < 2 \Leftrightarrow -2 < e^y - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 0 < e^y \leq 1.$$

Το αριστερό μέλος αυτής της διπλής ανίσωσης δεν αποτελεί στην πραγματικότητα περιορισμό, αφού ισχύει για κάθε τιμή του $y \in \mathbb{R}$. Το δεξιό μέλος γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^y \leq e^0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} y \leq 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το $A_{f^{-1}}=\left(-\infty,0\right]$ και για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right]$ ισχύει ότι $f^{-1}(x)=2-e^x$.

B3. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty,0\right]$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\le 0$ ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(2-e^x\right)'=-e^x<0,$$

οπότε η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία (σελ. 53 του σχολικού βιβλίου) ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$. Επομένως, για κάθε $x<0$ ισχύει

$$|\eta\mu x|<|x|\overset{x<0}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|<-x\Rightarrow-(-x)<\eta\mu x<-x$$

$$\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x \quad (1)$$

Γνωρίζουμε επίσης από τη βασική θεωρία τριγωνομετρικών συναρτήσεων ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ ισχύει $\eta\mu x<0$. Εφόσον $f\searrow\left(-\infty,0\right]$, έπεται από τη σχέση (1), και συγκεκριμένα από το αριστερό της μέλος, ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ ισχύει $f^{-1}(x)>f^{-1}(\eta\mu x)$.

B4. i. Το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)-1}{\eta\mu 3x}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{\eta\mu 3x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{3\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{1}{3},$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

ii. Το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3^x-f^{-1}(x)}{5^x+4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-3^x}{5^x+4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(\left(\frac{e}{3}\right)^x-1\right)}{5^x\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1}=0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0.$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|ημx| \leq |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$-|x| \leq ημx \leq |x|. \quad (1)$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $|x| = x$, οπότε η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-x < ημx < x.$$

Προκύπτει έτσι ότι $x - ημx > 0$, δηλαδή $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Αντίστοιχα, για κάθε $x < 0$ ισχύει $|x| = -x$, οπότε η (2) γράφεται στη μορφή

$$x < ημx < -x.$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι $x - ημx < 0$, δηλαδή $\boxed{g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0).}$ Ισχύει επίσης $g(0) = 0$.

Γ2. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = 2x - 2ημx = 2(x - ημx) = 2g(x).$$

Από το Γ1 προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. Επίσης, $f'(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$, με τιμή $f(0) = 0^2 - συν0 = -1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x) = (2x - 2ημx)' = 2 - 2συνx = 2(1 - συνx).$$

Εφόσον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$, έπεται ότι $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, η εξίσωση $f''(x) = 0$ λύνεται ως εξής:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Έπεται από αυτό ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Σημείωση:

Η απόδειξη της κυρτότητας της f ενδεχομένως να χρειάζεται λίγη παραπάνω δικαιολόγηση. Συγκεκριμένα, το θεώρημα στη σελ. 156 του σχολικού βιβλίου (το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος της σελ. 135 και το οποίο θα θέλαμε ιδανικά να χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε την κυρτότητα) δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα, καθώς απαιτεί από την f'' να είναι γνησίως θετική στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ. Παρότι εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα αυτό το θεώρημα (αφού η f'' μηδενίζεται σε άπειρα σημεία), μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα επιχείρημα που εξηγεί γιατί το συμπέρασμα (δηλαδή η κυρτότητα) συνεχίζει να ισχύει. Το επιχείρημα είναι το εξής:

Θεωρούμε αρχικά το διάστημα $\Delta_1 = [0, 2\pi]$. Στο εσωτερικό αυτού του διαστήματος, δηλαδή στο $(0, 2\pi)$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu x < 1$, άρα $f''(x) > 0$. Επομένως, από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ., έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το Δ_1. Όμοιο επιχείρημα αποδεικνύει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], [6\pi, 8\pi], \ldots$, αλλά και στα διαστήματα $[-2\pi, 0], [-4\pi, -2\pi], \ldots$ Εφόσον αυτά τα κλειστά διαστήματα έχουν κοινά άκρα, έπεται τελικά ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στην ένωσή τους, δηλαδή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ3. Εξηγήσαμε στο Ερώτημα Γ2 ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα, αφού $0 < \pi$, έπεται ότι $f(0) < f(\pi)$. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε τη σχέση

$$f(0) < \frac{2f(0) + 3f(\pi)}{5} < f(\pi). \qquad (2)$$

Πράγματι, η αριστερή ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(0) < \frac{2f(0) + 3f(\pi)}{5} \Leftrightarrow 5f(0) < 2f(0) + 3f(\pi)$$

$$\Leftrightarrow 3f(0) < 3f(\pi) \Leftrightarrow f(0) < f(\pi),$$

το οποίο, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, είναι αληθές. Ομοίως, η δεξιά ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}<f(\pi)\Leftrightarrow 2f(0)+3f(\pi)<5f(\pi)$$
$$\Leftrightarrow 2f(0)<2f(\pi)\ \Leftrightarrow f(0)<f(\pi),$$

το οποίο, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, είναι αληθές. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της σχέσης (1).

Συνοψίζοντας, ισχύει ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f(0)\neq f(\pi)$.
- Από τη σχέση (1), την οποία αποδείξαμε παραπάνω, προκύπτει ότι η ποσότητα $\eta=\frac{2f(0)+3f(\pi)}{2}$ βρίσκεται ανάμεσα στα $f(0)$ και $f(\pi)$.

Συνεπώς, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.), προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)=\eta=\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}.$$

Για το δεύτερο ζητούμενο, παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,\pi]$, οπότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε αυτά τα διαστήματα. Έτσι, από το Θ.Μ.Τ., προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1\in(0,\xi)$ και $\xi_2\in(\xi,\pi)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}-f(0)}{\xi}=\frac{\frac{2f(0)+3f(\pi)-5f(0)}{5}}{\xi}$$
$$=\frac{3f(\pi)-3f(0)}{5\xi}=\frac{3}{5\xi}\big(f(\pi)-f(0)\big)$$

και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\pi)-f(\xi)}{\pi-\xi}=\frac{f(\pi)-\frac{2f(0)+3f(\pi)}{5}}{\pi-\xi}=\frac{\frac{5f(\pi)-2f(0)-3f(\pi)}{5}}{\pi-\xi}$$
$$=\frac{2f(\pi)-2f(0)}{5(\pi-\xi)}=\frac{2}{5(\pi-\xi)}\big(f(\pi)-f(0)\big).$$

Καθώς $0<\xi_1<\xi<\xi_2<\pi$ και αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα), έπεται ότι

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{3}{5\xi}\big(f(\pi)-f(0)\big)<\frac{2}{5(\pi-\xi)}\big(f(\pi)-f(0)\big).$$

Αφού όμως $f(\pi)>f(0)$, δηλαδή $f(\pi)-f(0)>0$, μπορούμε να διαιρέσουμε με $f(\pi)-f(0)$ χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας. Μετά από αυτήν τη διαίρεση, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{3}{5\xi}<\frac{2}{5(\pi-\xi)}\overset{\xi>0,\pi-\xi>0}{\Leftrightarrow}15\pi-15\xi<10\xi\Leftrightarrow 25\xi>15\pi\ \boxed{\Leftrightarrow \xi>\frac{15\pi}{25}=\frac{3\pi}{5},}$$

όπως θέλαμε.

Γ5. Για την εξίσωση $f(x)=h(x)$ δουλεύουμε ως εξής:

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2-2\text{συν}x=x^2-2\Leftrightarrow \text{συν}x=1$$
$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\text{συν}x}{x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{2\text{συν}x}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2\text{συν}x}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}}.\qquad(3)$$

Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$\left|\frac{\text{συν}x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}\Rightarrow -\frac{1}{x^2}\leq\frac{\text{συν}x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

Αφού όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}x}{x^2}=0$. Επομένως, η σχέση (3) συνεπάγεται ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2\text{συν}x}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{1-0}{1-0}=1.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$h'(x) = (e^x)' f(x) + e^x f'(x) + 2e^x = e^x f(x) + e^x f'(x) + 2e^x.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $f'(x) + f(x) = -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ισοδύναμα γράφεται στη μορφή $f'(x) = -2 - f(x)$. Επομένως, αντικαθιστώντας το $f'(x)$ με $-2 - f(x)$ στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$h'(x) = e^x f(x) + e^x(-2 - f(x)) + 2e^x = e^x f(x) - 2e^x - e^x f(x) + 2e^x = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έπεται ότι η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $h(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Ισχύει όμως εξ ορισμού ότι $h(x) = e^x f(x) + 2e^x$, οπότε η σχέση $h(x) = c$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x f(x) + 2e^x = c \Leftrightarrow e^x f(x) = c - 2e^x \boxed{\Leftrightarrow f(x) = ce^{-x} - 2.}$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $f(0) = 2$, οπότε, αντικαθιστώντας $x = 0$ στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε ότι $2 = c \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow c = 4$. Έπεται λοιπόν ότι $f(x) = 4e^{-x} - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = (4e^{-x} - 2)' = -4e^{-x}$, οπότε η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με $f''(x) = 4e^{-x} > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τώρα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Πράγματι, η αριστερή ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta,$$

που ισχύει. Η δεξιά ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta,$$

που ισχύει. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, έτσι ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}}=\frac{2\left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}$$

και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\left(f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha}.$$

Επιπλέον, ισχύει από τον ορισμό των ξ_1,ξ_2 ότι $\alpha<\xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta$. Από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει λοιπόν ότι

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{2\left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}<\frac{2\left(f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha}. \quad (1)$$

Εφόσον $\alpha<\beta$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με τον θετικό παράγοντα $\beta-\alpha$ χωρίς να αλλάξει η φορά της ανίσωσης. Επομένως, η (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2},\ \text{που είναι το ζητούμενο.}}$$

Σημείωση:

Η ανισότητα που αποδείξαμε είναι «διάσημη» μαθηματική ανισότητα, η οποία είναι ευρέως γνωστή ως ανισότητα Jensen. Φυσικά, δεν αποτελεί μέρος της θεωρίας της Γ΄ Λυκείου, οπότε, αν μας ζητηθεί να την αποδείξουμε, τότε πρέπει να γράψουμε ένα λεπτομερές επιχείρημα, όπως το παραπάνω. Αυτή η ανισότητα τέθηκε και στις εξετάσεις, το 2012, στο Ερώτημα Δ3, σε λίγο διαφορετική μορφή.

Δ3. Το πεδίο ορισμού της $\varphi = f \circ g$ είναι το σύνολο $A_\varphi = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\}$. Καθώς οι f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η παραπάνω συνθήκη γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $A_\varphi = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\varphi(x) = f(g(x)) = 4e^{-g(x)} - 2 = 4e^{(x-1)^2 - \ln 2} - 2 = 4e^{(x-1)^2} \cdot e^{-\ln 2} - 2$$

$$= 4e^{(x-1)^2} \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 2 = 4e^{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2} - 2 = 2e^{(x-1)^2} - 2 = 2\left[e^{(x-1)^2} - 1\right].$$

Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $(x-1)^2 > 0$. Αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι $e^{(x-1)^2} > e^0 = 1$ για κάθε $x \neq 1$. Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι, για κάθε $x \neq 1$, ισχύει $e^{(x-1)^2} - 1 > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$, όπως θέλαμε.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x) = \varphi(x) - 4ex + 6e + 2 - 6e(x-2)^2$ για $x \in [1,2]$. Η κ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει

$$\kappa'(x) = \varphi'(x) - 4e - 12(x-2) = 2\left(e^{(x-1)^2} - 1\right)' + 24 - 12x$$

$$= 2e^{(x-1)^2} \cdot \left[(x-1)^2\right]' + 24 - 12x = 4\left((x-1)e^{(x-1)^2} + 6 - 3x\right). \quad (2)$$

Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύουν τα εξής:

- $x - 1 \geq 0$, οπότε $(x-1)e^{(x-1)^2} \geq 0$. Μάλιστα, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.
- $x \leq 2$, οπότε $6 - 3x = 3(2-x) \geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Από αυτές τις δύο ανισότητες και από τη σχέση (2) έπεται με πρόσθεση κατά μέλη ότι $\kappa'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Λόγω συνέχειας έπεται ότι η κ είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[1,2]$. Παρατηρούμε όμως ότι

$$\kappa(2) = \varphi(2) - 4e \cdot 2 + 6e + 2 - 6e \cdot (2-2)^2$$

$$= 2\left[e^{(2-1)^2} - 1\right] - 8e + 6e + 2 = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι, λόγω της μονοτονίας, θα ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$ ότι

$$\kappa(x) \le \kappa(2) \Leftrightarrow \varphi(x) - 4ex + 6e + 2 - 6e(x-2)^2 \le 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \varphi(x) \le 4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2.}$$

Μάλιστα, σημειώνουμε ότι, λόγω της μονοτονίας, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Δ5. Αφού $\varphi(x) \le 4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2$ για κάθε $x \in [1,2]$ και αφού η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, έπεται ότι για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει

$$\int_1^2 \varphi(x)dx < \int_1^2 \left(4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2\right)dx. \quad (3)$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(4ex - 6e - 2 + 6e(x-2)^2\right)dx &= \int_1^2 \left(2ex^2 - 6ex - 2x + 2e(x-2)^3\right)' dx \\ &= \left[2ex^2 - 6ex - 2x + 2e(x-2)^3\right]_1^2 \\ &= 8e - 12e - 4 - (2e - 6e - 2 - 2e) \\ &= -4e - 4 + 4e + 2 + 2e = 2e - 2 = 2(e-1).\end{aligned}$$

Αυτή η ισότητα, σε συνδυασμό με τη σχέση (3), συνεπάγεται ότι

$$\int_1^2 \varphi(x)dx < 2(e-1). \quad (4)$$

Επιπλέον, από το Ερώτημα Δ3, γνωρίζουμε ότι $\varphi(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$. Επομένως, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ισχύει ότι

$$\int_1^2 \varphi(x)dx > \int_1^2 0dx = 0. \quad (5)$$

Από τις (4), (5) έπεται ότι $\boxed{0 < \int_1^2 \varphi(x)dx < 2(e-1).}$

Διαγώνισμα 4.29

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)**Σ, **v)** Λ

Όταν μας δίνεται ο τύπος της ασύμπτωτης (όπως εδώ), τότε είναι συχνά χρήσιμο να δουλεύουμε απευθείας με τον ορισμό.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Σύμφωνα με τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης (σελ. 162 του σχολικού βιβλίου), η ευθεία $y=x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}-(x+3)\right)=0.$$

Το όριο στο αριστερό μέλος γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}-\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-(x^2+3x-2x-6)}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x-2}=0.$$

Άρα η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β2. Το ερώτημα μας ζητά ουσιαστικά να δείξουμε ότι $f(x)>x+3$ για κάθε $x>2$. Είδαμε όμως στο προηγούμενο ερώτημα ότι

$$f(x)-(x+3)=\frac{x^2+x}{x-2}-(x+3)=\frac{6}{x-2},$$

το οποίο είναι προφανώς θετικό για $x>2$. Έπεται έτσι ότι $f(x)>x+3$ για κάθε $x>2$.

Β3. **i.** Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$E=\int_{\alpha}^{\alpha+2}\left|f(x)-(x+3)\right|dx \overset{f(x)>x+3}{=} \int_{\alpha}^{\alpha+2}\frac{6}{x-2}dx$$

$$=6\left[\ln(x-2)\right]_{\alpha}^{\alpha+2}=6\left[\ln\alpha-\ln(\alpha-2)\right]=6\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right)$$ τετραγωνικές μονάδες.

ii. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, ισχύει

$$\mathrm{E}(3)=6\ln\left(\frac{3}{3-2}\right)=6\ln 3$$

τετραγωνικές μονάδες. Επιπρόσθετα,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}6\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right). \qquad (1)$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\alpha-2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\alpha}=1,$$

άρα, αν στο όριο στη σχέση (1) θέσουμε $u=\frac{\alpha}{\alpha-2}$ τότε $u\to 1$, και αυτό το όριο γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{\alpha\to+\infty}6\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right)=\lim_{u\to 1}6\ln u=6\ln 1=0.$$

B4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x}{x-2}\right)'=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

Έστω $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M είναι

$$(\varepsilon_{\mathrm{M}}):y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

$$\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+\left(f(x_0)-x_0f'(x_0)\right).$$

Άρα, για να είναι η ευθεία $y=-5x+27$ εφαπτόμενη της C_f, θα πρέπει το x_0 να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις

$$\begin{cases} f'(x_0)=-5 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}$$

Αυτό το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2-4x_0-2}{(x_0-2)^2}=-5 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0-2=-5(x_0^2-4x_0+4) \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0-2=-5x_0^2+20x_0-20 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_0^2-24x_0+18=0 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0+3=0 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=27 \end{cases}.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_0^2-4x_0+3$ είναι ίση με

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4.$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $x_0^2-4x_0+3$ είναι οι

$$\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4+2}{2}=3 \quad \text{και} \quad \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4-2}{2}=1.$$

Θα βρούμε ποια από αυτές τις δύο τιμές ικανοποιεί και την ισότητα $f(x_0)-x_0f'(x_0)=27$. Αν $x_0=1$, τότε

$$f(x_0)-x_0f'(x_0)=f(1)-f'(1)=\frac{1^2+1}{1-2}-(-5)=-2+5=3\neq 27,$$

άρα αυτή η τιμή του x_0 απορρίπτεται. Αν $x_0=3$, τότε

$$f(x_0)-x_0f'(x_0)=f(3)-3f'(3)=\frac{3^2+3}{3-2}-3\cdot(-5)=12+15=27,$$

άρα αυτή η τιμή του x_0 γίνεται δεκτή.

Επομένως, η ευθεία $y=-5x+27$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(3,f(3))$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Αρχικά, υπολογίζουμε το $f(1)$ κατευθείαν από τη σχέση που δίνεται στην εκφώνηση:

$$f(1)=\frac{12}{5}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\right)\overset{0/0}{=}\frac{12}{5}\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2x}=-\frac{6}{5},$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Από την υπόθεση, γνωρίζουμε επίσης ότι $f(-1)=f(1)$, οπότε, από τον παραπάνω υπολογισμό, προκύπτει και ότι $f(-1)=-\frac{6}{5}$.

Για να υπολογίσουμε το $f(3)$, χρησιμοποιούμε την άλλη συνθήκη που μας έχει δοθεί, αυτή που περιέχει το ολοκλήρωμα. Για να απλοποιήσουμε το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}xf''(x)dx&=\int_{-2}^{3}x\left(f'(x)\right)'dx=\left[xf'(x)\right]_{-2}^{3}-\int_{-2}^{3}f'(x)dx\\&=3f'(3)-(-2)f'(-2)-\left[f(x)\right]_{-2}^{3}=0-0-\left[f(3)-f(-2)\right]\\&=f(-2)-f(3)=\frac{1}{2}-f(3).\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι το ολοκλήρωμα στο πρώτο βήμα ισούται με $-\frac{8}{5}$, οπότε προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι

$$-\frac{8}{5}=0-f(3)\Leftrightarrow f(3)=\frac{8}{5}.$$

Γ2. Από το γράφημα της παραγώγου προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,0)$, οπότε, λόγω συνέχειας, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0]$.
- $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,3)$, οπότε, λόγω συνέχειας, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.
- $f'(0)=0$, άρα το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

Σχεδιάζουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	-2		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Σύμφωνα με το δεύτερο σχόλιο στη σελ. 146 του σχολικού βιβλίου, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα άκρα του κλειστού διαστήματος $[2,3]$, καθώς και στο κρίσιμο σημείο $x=0$.

- Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $f(0)=-\frac{5}{2}$.
- Επίσης, από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $f(2)=0$.
- Στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίσαμε ότι $f(3)=\frac{8}{5}$.

Η μεγαλύτερη από αυτές τις τιμές είναι το $\frac{8}{5}$, άρα αυτή είναι η μέγιστη τιμή της f. Αντίστοιχα, το $-\frac{5}{2}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f. Από τον πίνακα μονοτονίας, μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-2$, με τιμή $f(-2)=0$.

Γ3. Από το γράφημα της παραγώγου προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2,-1]$ και $[1,3]$, οπότε η f είναι κοίλη σε αυτά τα διαστήματα.
- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, οπότε η f είναι κυρτή σε αυτό το διάστημα.
- Τέλος, η C_f παρουσιάζει δύο σημεία καμπής, αυτά στα οποία αλλάζει η κυρτότητα της f. Αυτά τα σημεία είναι το $A(-1,f(-1))\equiv\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$ και το $\Gamma(1,f(1))\equiv\left(1,-\frac{6}{5}\right)$.

Συνοψίζουμε αυτά τα συμπεράσματα στον ακόλουθο πίνακα κυρτότητας:

x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\smile$	

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι

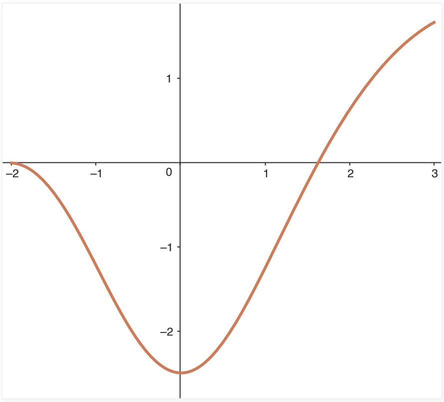
$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2(x-1)-\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow y=2x-\frac{10}{5}-\frac{6}{5} \Leftrightarrow y=2x-\frac{16}{5}.$$

Η f είναι κυρτή στο $[-1,1]$, άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ θα βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Συνεπώς για κάθε $x\in[-1,1]$ θα ισχύει οτι

$$\boxed{f(x)\geq 2x-\frac{16}{5}, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Γ4. Σύμφωνα με όσες πληροφορίες έχουμε συλλέξει για τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα της f και τα σημεία καμπής της C_f, μπορούμε πλέον να σχεδιάσουμε τη C_f. Χρησιμοποιούμε επίσης όλες τις πληροφορίες που γνωρίζουμε για τις τιμές της f στα σημεία $-3,-2,-1,0,1,2$. Η C_f φαίνεται λοιπόν στο παρακάτω σχήμα:



Γ5. i. Το πρώτο όριο ισούται με

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+f(1-h)+\frac{6}{5}}{h^2} \overset{0/0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1-h)}{2h}$$

$$\overset{0/0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f''(1+h)+f''(1-h)}{2} \overset{f''\text{συν.}}{=} f''(1),$$

όπου στο πρώτο και στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$ και στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f''.

Σημείωση:
Αν δεν μας είχε δοθεί ότι η f'' είναι συνεχής, δεν θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε το τελευταίο βήμα. Πράγματι, χωρίς την υπόθεση της συνέχειας, δεν ισχύει απαραίτητα ότι

$$\lim_{h\to 0} f''(1+h) = f''(1) \quad \text{ούτε ότι} \quad \lim_{h\to 0} f''(1-h) = f''(1)$$

Παρ' όλα αυτά, θα μπορούσαμε και πάλι να αποδείξουμε το ζητούμενο, απλώς αυτήν τη φορά με διαφορετικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, αντί να χρησιμοποιήσουμε για δεύτερη φορά τον κανόνα De L' Hospital, θα εφαρμόζαμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση f'. Έχουμε δει αυτήν τη λύση στο Ερώτημα Δ5 του Διαγωνίσματος 4.2.

Περνάμε τώρα στο δεύτερο όριο: Αυτό ισούται με

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{(x^2-1)(5f(x)-10x+16)} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{5f(x)-10x+16}\right). \quad (1)$$

Ο πρώτος όρος ισούται με

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1, \quad (2)$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Για τον δεύτερο παράγοντα, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 1^-}\left(5f(x)-10x+16\right) = 0 \quad (3)$$

Όμως, από το προηγούμενο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι

$$f(x) \geq 2x - \frac{16}{5} \Rightarrow 5f(x) - 10x + 16 \geq 0$$

για κάθε $x \in [-1,1]$, με ισότητα μόνο για $x=1$. Σε συνδυασμό με την (3), αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{5f(x)-10x+16} = +\infty.$$

Συνδυάζοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $+\infty$.

ii. Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω θα δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι

$$f(x)\le f(1)=-\frac{6}{5}. \qquad (4)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Αρχικά, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx.$$

Επίσης, εφόσον η ισότητα στην (4) ισχύει μόνο για $x=1$, συμπεραίνουμε ότι για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει γνήσια ανισότητα, δηλαδή

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left(-\frac{6}{5}\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<-\frac{6}{5} \Leftrightarrow -\int_0^1 f(x)dx>\frac{6}{5} \Leftrightarrow E(\Omega)>\frac{6}{5}, \qquad (5)$$

η οποία αποδεικνύει το αριστερό κομμάτι της ζητούμενης ανισότητας. Για να αποδείξουμε το δεξιό μέρος, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ3, σύμφωνα με το οποίο ισχύει $f(x)\ge 2x-\frac{15}{6}$ για κάθε $x\in[0,1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Συμπεραίνουμε ότι, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ισχύει γνήσια ανισότητα, δηλαδή

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(2x-\frac{16}{5}\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\left[x^2-\frac{16}{5}x\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=1-\frac{16}{5}=\frac{-11}{5} \Leftrightarrow -\int_0^1 f(x)dx<\frac{11}{5}$$

$$\Leftrightarrow E(\Omega)<\frac{11}{5}.$$

Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με την (5), αποδεικνύουν το ζητούμενο αποτέλεσμα.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη και εφόσον για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) \neq 0$ και $e^x - 1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x + 1}. \quad (1)$$

Όμως, γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $(e^{2x} - 1)f'(x) - 2e^x f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq 0$, αυτή η ισότητα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} f(x).$$

Αντικαθιστώντας την f' με $\dfrac{2e^x}{e^x + 1} f(x)$ στη σχέση (1), παίρνουμε ισοδύναμα ότι

$$g'(x) = \frac{\frac{2e^x}{e^{2x} - 1} f(x)}{f(x)} - \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} + \frac{e^x(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} - \frac{e^x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1}$$

$$= \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} - \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} = 0, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ., συμπεραίνουμε ότι η g θα είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν σταθεροί πραγματικοί αριθμοί $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι, ώστε

- $g(x) = c_1$ για κάθε $x < 0$,
- $g(x) = c_2$ για κάθε $x > 0$.

Ξεκινάμε με την πρώτη από αυτές τις σχέσεις, η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln|f(x)| - \ln|e^x - 1| + \ln(e^x + 1) = c_1.$$

Όμως, για κάθε $x < 0$ ισχύει $e^x < 1$ και άρα $|e^x - 1| = 1 - e^x$. Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln|f(x)| - \ln(1 - e^x) + \ln(e^x + 1) = c_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \ln\left(\frac{1 - e^x}{e^x + 1}\right) + c_1. \quad (2)$$

Επειδή η f είναι περιττή, προκύπτει ότι $f(-1) = -f(1) = -\dfrac{e - 1}{e + 1} < 0$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση $x = -1$, παίρνουμε ότι

$$\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{1-e^{-1}}{e^{-1}+1}\right)+c_1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x<0$, έπεται ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$. Είδαμε παραπάνω ότι $f(-1)<0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x<0$. Ισχύει λοιπόν $|f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Συνεπώς, η σχέση (2), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $c_1=0$, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln(-f(x))=\ln\left(\frac{1-e^x}{e^x+1}\right)\Leftrightarrow -f(x)=\frac{1-e^x}{e^x+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}. \qquad (3)$$

Εξετάζουμε τώρα το διάστημα $(0,+\infty)$. Η σχέση $g(x)=c_2$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln|f(x)|-\ln|e^x-1|+\ln(e^x+1)=c_1.$$

Όμως, για κάθε $x>0$, ισχύει ότι $e^x>1$, άρα $|e^x-1|=e^x-1$. Συνεπώς, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\ln|f(x)|-\ln(e^x-1)+\ln(e^x+1)=c_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)|=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+c_2 \qquad (4)$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $f(1)=\frac{e-1}{e+1}$. Άρα, για $x=1$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)+c_2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)+c_2 \Leftrightarrow c_2=0.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$, έπεται ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Είδαμε παραπάνω ότι $f(1)=\frac{e-1}{e+1}>0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς, ισχύει $|f(x)|=f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Συνεπώς, η σχέση (4), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $c_2=0$, συνεπάγεται ότι

$$\ln(f(x))=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

για κάθε $x>0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ για κάθε $x\neq 0$. Επίσης, αντικαθιστώντας $x=0$ στη σχέση $(e^{2x}-1)f'(x)-2e^x f(x)=0$, παίρνουμε

$f(0)=0$, οπότε η f συμφωνεί με την $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ και για $x=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}.}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0.$$

Έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται. Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1}, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έπεται ότι

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,1),$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής: Το όριο στο $-\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1,$$

ενώ το όριο στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το σύνολο $A_{f^{-1}}=(-1,1)$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της f^{-1}, θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in(-1,1)$ ισχύει η ισοδυναμία

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Leftrightarrow y\left(e^x+1\right)=e^x-1\Leftrightarrow e^x(y-1)=-y-1$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει

$$\boxed{f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Δ3. i. Η $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)'=\frac{2e^x\left(e^x+1\right)^2-4e^{2x}\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$=\frac{2e^x\left(e^x+1\right)\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}.$$

Ο παρονομαστής, καθώς και ο παράγοντας $\left(e^x+1\right)^3$, είναι θετικοί για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, το πρόσημο της f'' είναι ίδιο με το πρόσημο του παράγοντα $1-e^x$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\ \Leftrightarrow x<0.$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $1-e^x<0$ για $x>0$ και ότι ο όρος $1-e^x$ μηδενίζεται για $x=0$. Αυτά τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

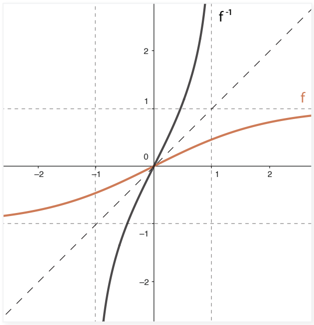
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$	

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $O(0,0)$.

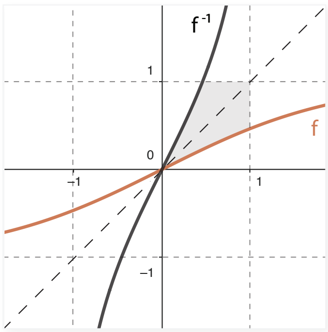
ii. Ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=\dfrac{2\cdot 1}{\left(e^0+1\right)^2}=1$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $O(0,0)$ είναι

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x.$$

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, η εφαπτόμενή της στο $O(0,0)$ θα βρίσκεται «πάνω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Επομένως, για κάθε $x>0$ θα ισχύει ότι $f(x)<x$.



iii. Στο Δ2 δείξαμε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, οπότε οι ευθείες $y=-1$ και $y=1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα. Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο όπως και στο ερώτημα Δ3 μπορούμε να δείξουμε ότι $f(x)>x$ για $x<0$. Αυτή η παρατήρηση χρησιμεύει για να σχεδιάσουμε τη $C_{f^{-1}}$, καθώς ξέρουμε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Με βάση λοιπόν αυτήν τη συμμετρία και σύμφωνα με όλες τις πληροφορίες που έχουμε βρει στα προηγούμενα ερωτήματα για τη μονοτονία, την κυρτότητα της f και τις ασύμπτωτες της C_f, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}, οι οποίες παρατίθενται στο παραπάνω σχήμα. Στο σχήμα φαίνονται επίσης οι οριζόντιες ασύμπτωτες $y=1$ και $y=-1$ της C_f, καθώς και οι κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=-1$, οι οποίες οριοθετούν το πεδίο ορισμού της f^{-1}.



Δ4. Το χωρίο που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του διπλανού σχήματος: Λόγω συμμετρίας, αυτό το χωρίο ισούται με δύο ίσα μικρότερα χωρία, αυτό που ορίζεται από τη C_f, την ευθεία $y=x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=1$, και εκείνο που ορίζεται από τη $C_{f^{-1}}$, την ευθεία $y=x$ και την οριζόντια ευθεία $y=1$. Επομένως, για να υπολογίσουμε το συνολικό εμβαδόν, αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του πρώτου χωρίου και να πολλαπλασιάσουμε με το 2. Αυτό το εμβαδόν ισούται με

$$E_1=\int_0^1 |f(x)-x|\,dx.$$

Έχουμε όμως δείξει στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(x)<x$ για κάθε $x<0$ (για $x=0$ ισχύει η ισότητα), οπότε συμπεραίνουμε από την παραπάνω έκφραση ότι

$$E_1=\int_0^1 (x-f(x))\,dx=\int_0^1\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx. \quad (5)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το ολοκλήρωμα του καθενός από τους δύο όρους. Το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$E_2=\int_0^1 x dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Για τον δεύτερο όρο, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u=e^x$. Ισχύει τότε $du=e^x dx$, οπότε

$$dx=\frac{1}{e^x}du=\frac{1}{u}du.$$

Τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι $u_0=e^0=1$ και $u_1=e^1=e$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$E_3=\int_0^1\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{u-1}{u+1}\cdot\frac{1}{u}\right)du=\int_1^e\frac{u-1}{u(u+1)}du$$

$$=\int_1^e\left(\frac{u}{u(u+1)}-\frac{1}{u(u+1)}\right)du=\int_1^e\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u(u+1)}\right)du. \qquad (7)$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι η παράγωγος του λογάριθμου $\left(\ln|u+1|\right)'$. Για τον δεύτερο παράγοντα, χρησιμοποιούμε ανάλυση σε απλά κλάσματα (κάτι που έχουμε ήδη κάνει και σε άλλα θέματα –δείτε, π.χ., το Ερώτημα Γ3 του Διαγωνίσματος 4.18). Για να το κάνουμε αυτό, γράφουμε

$$\frac{2}{u(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1} \qquad (8)$$

και στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και υπολογίζουμε τα A, B Συγκεκριμένα, για κάθε $u\notin\{0,1\}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\frac{1}{u(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}\Leftrightarrow 1=A(u+1)+Bu \Leftrightarrow 1=(A+B)u+A.$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε τιμή του $u\notin\{0,1\}$, θα πρέπει να ισχύουν οι επιμέρους ισότητες

$$\begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases}.$$

Τελευταίο σύστημα έχει προφανώς μοναδική λύση την $A=1$ και $B=-1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (8) ότι

$$\frac{1}{u(u+1)}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}.$$

Προκύπτει τώρα από την (7) ότι

$$E_3=\int_1^e\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u(u+1)}\right)du=\int_1^e\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)du=\int_1^e\left(\frac{2}{u+1}-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\left[2\ln|u+1|-\ln|u|\right]_1^e=\left(2\ln(e+1)-\ln e\right)-\left(2\ln2-\ln1\right)$$

$$=2\ln(e+1)-2\ln2-1$$

Τέλος, από τις σχέσεις (5) και (6), προκύπτει ότι

$$E_1=\frac{1}{2}-\left(\ln(e+1)-\ln2-1\right)=\frac{3}{2}-2\ln(e+1)+2\ln2.$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση στην αρχή της λύσης, το ζητούμενο εμβαδόν είναι διπλάσιο από το E_1, δηλαδή ίσο με $E=3-4\ln(e+1)+4\ln2$.

Διαγώνισμα 4.30

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 217.

A2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

A3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

A4. $\int_1^2 f(x)dx=-1,\quad \int_2^3 f(x)dx=2,\quad \int_1^4 f(x)dx=0,\quad \int_1^3 |f(x)|dx=3.$

A5. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\left(e^x+1\right)^2+1\right)'=2\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)'$$

$$=2e^x\left(e^x+1\right)>0,$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έπεται ότι η f είναι «1-1», άρα είναι και αντιστρέψιμη. Για να προσδιορίσουμε την f^{-1}, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Θέτουμε

$$y = f(x),\ x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και έχουμε τις ισοδυναμίες

$$y = f(x),\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1+e^x)^2 + 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = (1+e^x)^2 \\ x \in \mathbb{R},\ y-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-1} = |1+e^x| \\ x \in \mathbb{R},\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-1} = 1+e^x \\ x \in \mathbb{R},\ y \geq 1 \end{cases}$$

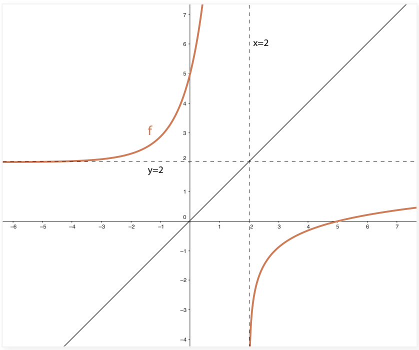
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-1} - 1 = e^x \\ x \in \mathbb{R},\quad y \geq 1,\quad \sqrt{y-1} - 1 > 0. \end{cases}$$

Ισχύει επίσης η ισοδυναμία

$$\sqrt{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y-1} > 1 \Leftrightarrow y-1 > 1 \Leftrightarrow y > 2,$$

οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} e^x = \sqrt{y-1} - 1 \\ x \in \mathbb{R},\quad y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(\sqrt{y-1} - 1\right) \\ x \in \mathbb{R},\quad y > 2 \end{cases}$$



Έπεται λοιπόν από τη σχέση (1) ότι $f^{-1}(y) = \ln\left(\sqrt{y-1} - 1\right)$ για κάθε $y > 2$. Γράφοντας την ίδια σχέση με μεταβλητή το x αντί για το y, μας δίνει ότι

$$\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{x-1} - 1\right),\ x > 2.}$$

B2. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1} \circ g$ είναι το σύνολο $D_{f^{-1} \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_{f^{-1}}\}$. Αυτές οι δύο συνθήκες γράφονται ισοδύναμα στη μορφή

$$x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) > 2 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{και} \quad 1 + \ln x > 2$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x > 1$$

$$\Leftrightarrow x>0 \quad \text{και} \quad x>e$$

$$\Leftrightarrow x>e.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $D_{f^{-1}\circ g}=(e,+\infty)$. Όσον αφορά τον τύπο αυτής της συνάρτησης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x>e$, ισχύει

$$\boxed{(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))=\ln\left(\sqrt{1+\ln x-1}-1\right)=\ln\left(\sqrt{\ln x}-1\right).}$$

B3. Στη λύση του Ερωτήματος B1 έχουμε δείξει ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)=2e^{2x}+2e^{x}$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=4e^{2x}+2e^{x}>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση:

Η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα, ούτε σημεία καμπής, αφού ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ούτε η παράγωγός της, ούτε η δεύτερή της παράγωγος μηδενίζονται.

B4. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((1+e^{x})^{2}+1\right)=(1+0)^{2}+1=2,$$

άρα η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y=2$ είναι «κάτω» από τη C_f, αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)>2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτή η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)>2\Leftrightarrow(1+e^{x})^{2}+1>2\Leftrightarrow e^{2x}+2e^{x}>0,$$

η οποία πράγματι ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο.

B5. Με βάση όλες τις πληροφορίες για τη μονοτονία, την κυρτότητα της f και τις ασύμπτωτες της C_f, μπορούμε να σχεδιάσουμε τη C_f όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y=x$, οπότε μπορούμε να τη σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αυτήν τη συμμετρία και χωρίς να χρειαστεί να μελετήσουμε αναλυτικά την αντίστροφη συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f'(x) = \left(e^x + x^2 - \alpha x + 1\right)' = e^x + 2x - \alpha$.
- $f''(x) = \left(e^x + 2x\right)' = e^x + 2 > 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f'}$, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \int_0^1 \left|f'(x)\right| dx.$$

Επειδή (όπως είδαμε στο Γ1) ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Μάλιστα, λόγω της μονοτονίας, έπεται η παρακάτω συνεπαγωγή:

$$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) \Rightarrow f'(x) \geq 1 - \alpha \geq 0,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι $\alpha \leq 1$. Άρα, για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $f'(x) \geq 0$ και έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$E = \int_0^1 f'(x) dx = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1) - f(0) = e + 1 - \alpha + 1 - 1 - 1 = e - \alpha.$$

Μας έχει δοθεί όμως στην υπόθεση ότι $E = e - 1$, οπότε από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι

$$\boxed{e - 1 = e - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1.}$$

Για $\alpha = 1$ προκύπτει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f(x) = e^x + x^2 - x + 1, \quad \text{και} \quad f'(x) = e^x + 2x - 1.$$

Γ3. **i.** Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης, από τον παραπάνω τύπο, προκύπτει ότι $f'(0) = 0$. Επομένως, ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$.
- $x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$.

Με βάση αυτές τις συνεπαγωγές, μπορούμε να σχεδιάσουμε τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0.+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$, την τιμή $f(0)=2$.

Σημείωση:

Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f, προκύπτουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0)=2$
- $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=2$

Άρα ισχύει $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ii. Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(e^x)+\eta\mu x>e^{\eta\mu x}+\eta\mu^2 x+1 \Leftrightarrow f(e^x)>e^{\eta\mu x}+\eta\mu^2 x-\eta\mu x+1$$

$$\Leftrightarrow f(e^x)>f(\eta\mu x) \quad (1)$$

Για κάθε $x\in[0,\pi]$, οι αριθμοί $\eta\mu x$ και e^x ανήκουν στο διάστημα $[0,+\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x>\eta\mu x \quad (2)$$

Για $x=0$, είναι εύκολο να δούμε ότι η (2) αληθεύει. Επίσης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x\in(0,\pi]$, ισχύει

$$e^x>e^0=1\geq\eta\mu x,$$

οπότε η (2) αληθεύει και γι' αυτές τις τιμές του x. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σχέση (2), άρα και η ζητούμενη ανισότητα αληθεύουν για κάθε $x\in[0,\pi]$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Γ4. Ισχύει $f(1)=e+1$ και $f'(1)=e+1$, οπότε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e-1=(e+1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y-e-1=(e+1)x-e-1 \Leftrightarrow y=(e+1)x.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου $O(0,0)$ ικανοποιούν την εξίσωση αυτής της (ε), άρα αυτή η ευθεία διέρχεται από το O.

Η δοσμένη εξίσωση ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, αφού οι συναρτήσεις f και f' ορίζονται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τη λύση του Ερωτήματος Γ1, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f'(f(x)-1)=e+1\Leftrightarrow f'(f(x)-1)=f'(1)$$

$$\Leftrightarrow f(x)-1=1 \Leftrightarrow f(x)=2.$$

Όμως στο Ερώτημα Γ3i δείξαμε ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ (δείτε τη σημείωση στο τέλος της λύσης εκείνου του ερωτήματος). Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

Γ5. Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)\big(f'(f(x))-f'(ex+x)\big)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{\big(f'(f(x))-f'(ex+x)\big)}\right)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα όρια καθενός από τους δύο παράγοντες. Το όριο του 1ου παράγοντα ισούται με

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{1}=\pi(-1)=-\pi \qquad (3)$$

όπου στην 1η ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Περνάμε τώρα στο όριο του δεύτερου παράγοντα, για το οποίο αρχικά θα πρέπει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Όπως είδαμε σε προηγούμενα ερωτήματα, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη (ε) –την οποία προσδιορίσαμε στο Ερώτημα Γ4– με εξαίρεση το σημείο επαφής. Με άλλα λόγια, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι $f(x)\geq(e+1)x=ex+e$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως, για x κοντά στο 1, ισχύει

$$f(x) > ex + e \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(f(x)) > f'(ex+x) \Leftrightarrow f'(f(x)) - f'(ex+x) > 0. \quad (4)$$

Επιπλέον, αφού οι f και f' είναι συνεχείς, ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\left(f'(f(x)) - f'(ex+x)\right) = f'(f(1)) - f'(e+1) = 0. \quad (5)$$

Από τις (4) και (5), προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f'(f(x)) - f'(ex+x)} = +\infty. \quad (1)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τις σχέσεις (3) και (6) ότι

$$\boxed{L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{f'(f(x)) - f'(ex+x)}\right) = (-\pi)\cdot(+\infty) = -\infty.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η h είναι (δύο φορές) παραγωγίσιμη, ως πράξη (δύο φορές) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα τα κρίσιμα σημεία της είναι τα σημεία μηδενισμού της h'. Επομένως, σε αυτό το ερώτημα, σκοπεύουμε να αποδείξουμε ότι η h' έχει ακριβώς μία ρίζα και ότι αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(1,2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Bolzano για την h'. Για κάθε $x<3$ ισχύει

$$h'(x) = \ln(3-x) - \frac{x}{3-x} \quad \text{και} \quad h''(x) = -\frac{1}{3-x} - \frac{3}{(3-x)^2}.$$

Ισχύει προφανώς $h''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$, άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$. Ισχύουν επίσης τα εξής:

- Η h' είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- $h'(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 1) = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln e) > 0$.
- $h'(2) = \ln 1 - \frac{2}{1} = -2 < 0$.

Εφόσον $h'(1)h'(2)<0$, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$. Καθώς η h' είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, έπεται ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της. Συνεπώς, το $x_0 \in (1,2)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της h.

Δ2. Από τον ορισμό του x_0, ισχύει $h'(x_0)=0$. Η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$, επομένως ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x<x_0 \Rightarrow h'(x)>h'(x_0) \Rightarrow h'(x)>0$.
- $x_0<x<3 \Rightarrow h'(x_0)>h'(x) \Rightarrow h'(x)<0$.

Εφόσον η h είναι συνεχής στο x_0, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$ $\qquad$ x_0	$\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$
$h(x)$	↗	↘

Επομένως, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,3)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση x_0. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο ριζών, θα υπολογίσουμε τις εικόνες των διαστημάτων $\Delta_1=(-\infty,1]$ και $\Delta_2=[2,3]$ μέσω της h.

Καθώς $x_0>1$, έπεται ότι η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,x_0]$. Άρα

$$h(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}h(x),h(1)\right].$$

Ισχύουν τα εξής:

- $h(1)=\ln2+e>0.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot\ln(3-x)+e\right)=-\infty,$

  όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(3-x)\overset{u=3-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$

Συμπεραίνουμε τελικά ότι $h(\Delta_1)=(-\infty,e+\ln2]$. Επειδή $e+\ln2>0$, έπεται ότι $0\in h(\Delta_1)$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$. Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, το x_1 είναι η μόνη ρίζα της σε αυτό το διάστημα. Παρατηρούμε ότι $h(1)\neq0$, άρα $x_1<1$.

Περνάμε τώρα στο διάστημα $\Delta_2=[2,3]$. Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα, άρα

$$h(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 3^-} h(x),h(2)\right].$$

Ισχύουν τα εξής:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x\ln(3-x)+e\right)=-\infty$,

  όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 3^-}\ln(3-x)\overset{u=3-x}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

- $h(2)=2\ln 1+e=e>0$

Ισχύει λοιπόν $h(\Delta_2)=(-\infty,e]$, οπότε $0\in h(\Delta_2)$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$. Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2, το x_2 είναι η μόνη ρίζα της σε αυτό το διάστημα. Παρατηρούμε ότι $h(2)\neq 0$, άρα $x_2>2$.

Έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση h έχει τουλάχιστον δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<2<x_2<3$. Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,3)$, θα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Άρα, από τον συνδυασμό των παραπάνω, προκύπτει ότι η h έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με

$$\boxed{x_1<1<2<x_2<3.}$$

Δ3. i. Εφόσον το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, έπεται ότι

$$(ΑΔ)=(ΒΓ)\Leftrightarrow |f(\alpha)|=|g(\beta)|\Leftrightarrow |\ln(3-\alpha)|=\left|-\frac{e}{\beta}\right| \quad (1)$$

Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε απαλοιφή των απόλυτων τιμών. Ισχύει η ισοδυναμία

$$0\le\alpha<2\Leftrightarrow 0\ge-\alpha>-2\Leftrightarrow 3\ge 3-\alpha>1$$
$$\Leftrightarrow \ln 3\ge\ln(3-\alpha)>\ln 1=0$$

και η ισοδυναμία $\beta<0\Leftrightarrow -\dfrac{e}{\beta}>0$. Άρα η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με την

$$\boxed{\ln(3-\alpha)=-\frac{e}{\beta}\Leftrightarrow \beta=\frac{-e}{\ln(3-\alpha)}.}$$

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=(\mathrm{AB})\cdot(\Gamma\Delta)=|\alpha-\beta|\cdot\ln(3-\alpha)$$

$$=\left(\alpha+\frac{e}{\ln(3-\alpha)}\right)\cdot\ln(3-\alpha)\ =\alpha\ln(3-\alpha)+e$$

Συνεπώς το εμβαδόν δίνεται, συναρτήσει του $\alpha\in[0,2)$, από τον τύπο

$$\mathrm{E}(\alpha)=\alpha\ln(3-\alpha)+e=h(\alpha).$$

Από το Ερώτημα Δ2 γνωρίζουμε ότι η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in(1,2)$, άρα το μέγιστο εμβαδόν είναι ίσο με $\mathrm{E}(x_0)$. Είδαμε όμως στο Ερώτημα Δ1 ότι $h'(x_0)$, οπότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$h'(x_0)=0\Rightarrow\ln(3-x_0)-\frac{x_0}{3-x_0}=0\ \Rightarrow\ln(3-x_0)=\frac{x_0}{3-x_0}.$$

Επομένως, το μέγιστο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\mathrm{E}(x_0)=x_0\ln(3-x_0)+e=x_0\cdot\frac{x_0}{3-x_0}+e\ \boxed{=e+\frac{x_0^2}{3-x_0},}$$

όπως θέλαμε.

Δ4. Για κάθε $x\in[1,2]$ ισχύει $2(x+1)>0$ και επιπλέον

$$1\le x\le 2\Leftrightarrow -1\ge -x\ge -2\ \Leftrightarrow 2\ge 3-x\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\ln 2\ge\ln(3-x)\ge\ln 1=0$$

Άρα ισχύει

$$\frac{h(x)-e}{2(x+1)}=\frac{x\ln(3-x)}{2(x+1)}\ge 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{h(x)-e}{2(x+1)}$ είναι συνεχής, ως πηλίκο συνεχών. Άρα

$$\int_1^2\frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx>0.\qquad(2)$$

Στο Δ1 δείξαμε ότι η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$, άρα η h είναι κοίλη. Συμπεραίνουμε ότι η C_h βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{A}(2,h(2))$. Επομένως, ισχύει η συνεπαγωγή

$$h(x) \le -2x + e + 4 \Leftrightarrow h(x) - e \le -2x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(x)-e}{2(x+1)} \le \frac{-2x+4}{2(x+1)} \Leftrightarrow \frac{h(x)-e}{2(x+1)} \le \frac{-x+2}{x+1},$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$. Συνεπώς, αφού οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, θα ισχύει για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ότι

$$\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx < \int_1^2 \frac{-x+2}{x+1}dx \quad (3)$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι ίσο με

$$\int_1^2 \frac{-x+2}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{-x-1+3}{x+1}dx = \int_1^2 \left(-1+\frac{3}{x+1}\right)dx = \left[-x\right]_1^2 + \left[3\ln(x+1)\right]_1^2$$

$$= -2+1+3\ln 3 - 3\ln 2 = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1.$$

Άρα η (2) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx < 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1.$$

Η τελευταία ανισότητα, σε συνδυασμό με τη (2), μας δίνουν το ζητούμενο.

Διαγώνισμα 4.31

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 112 (δείτε την παράγραφο στο τέλος της σελίδας).

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 143 (δείτε το σχόλιο).

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

Α4. **i)** Σ, **ii)**Σ, **iii)** Σ, **iv)**Λ, **v)**Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Αρχικά, σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έστω $A(1,f(1))\equiv(1,g(1))$ το κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων. Από τον τύπο της f, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $f(1)=3$. Επομένως, το κοινό σημείο είναι το $A(1,3)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$g(1)\Rightarrow \alpha+\beta=-3\Rightarrow \beta=-3-\alpha. \quad (1)$$

Επιπλέον, αφού σε αυτό το σημείο έχουν και κοινή εφαπτομένη, θα ισχύει ότι

$$f'(1)=g'(1).$$

Η παράγωγος της f ισούται με

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)'=\left(1+\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2},$$

για κάθε $x\neq 0$, απ' όπου προκύπτει ότι $f'(1)=-2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από την ισότητα που γράψαμε παραπάνω ότι ισχύει

$$g'(1)=f'(1)=-2. \quad (2)$$

Ισχύει όμως

$$g'(x)=\left(\alpha x^2+\beta x+6\right)'=2\alpha x+\beta,$$

οπότε προκύπτει από τη (2) ότι $2\alpha+\beta=-2\Leftrightarrow\beta=-2\alpha-2$. Χρησιμοποιώντας την (1), παίρνουμε

$$-2\alpha-2=-3-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1.$$

Έπεται από την (1) ότι $\beta=-3-\alpha=-4$, όπως θέλαμε. Η κοινή εφαπτομένη των C_f,C_g έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 3 = -2(x-1)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow y = -2x + 5.}$$

Β2. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι, για κάθε $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα υποδιαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$h(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Ισχύει επίσης για κάθε $x \neq 0$ ότι $f''(x) = \left(-\dfrac{2}{x^2}\right)' = \dfrac{4}{x^3}$, οπότε το πρόσημο της f'' είναι ίδιο με το πρόσημο του x^3. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Συμπεραίνουμε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$.
Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x) = \left(x^2 - 4x + 6\right)' = 2x - 4 = 2(x-2),$$

οπότε το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο του παράγοντα $x - 2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Λόγω και της συνέχειας στη θέση $x=2$, έπεται ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Όσον αφορά την κυρτότητα, παρατηρούμε ότι $g''(x)=(2x-4)'=2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β3. Ξεκινάμε με τη συνάρτηση f. Καθώς $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, η μοναδική θέση στην οποία έχει νόημα να αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=0$. Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

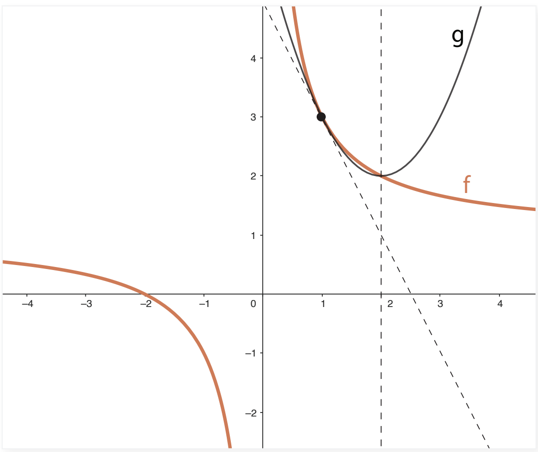
επομένως η ευθεία $x=0$ είναι πράγματι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αναζητούμε τώρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1,$$

συνεπώς η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αλλά και στο $-\infty$. Από την ύπαρξη οριζόντιας ασύμπτωτης, συμπεραίνουμε ότι η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Όσον αφορά την g, αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 2, οπότε η γραφική της παράσταση δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες (δείτε το σχόλιο στη σελ. 163 του σχολικού βιβλίου).

Β4. Από τις πληροφορίες που έχουμε συλλέξει στα προηγούμενα ερωτήματα σχετικά με τη μονοτονία, την κυρτότητα των f,g, αλλά και τις ασύμπτωτες των γραφικών τους παραστάσεων, μπορούμε να σχεδιάσουμε αυτές τις γραφικές παραστάσεις όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τη χάραξη έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει την πληροφορία ότι η C_g είναι παραβολή, ως γραφική παράσταση δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. Στο σχήμα έχουμε επίσης συμπεριλάβει την κοινή εφαπτομένη των δύο γραφικών παραστάσεων, η οποία συζητήθηκε στο Ερώτημα Β1, καθώς και την ευθεία $x=2$ που υποδεικνύει τη θέση ελαχίστου της g.



ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι (τρεις φορές) παραγωγίσιμη, ως πράξη (τρεις φορές) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει

$$f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu x-\frac{x}{x+2}\right)'=\eta\mu x-\frac{(x)'(x+2)-x(x+2)'}{(x+2)^2}=\eta\mu x-\frac{2}{(x+2)^2},$$

οπότε

$$f''(x)=\left(\eta\mu x-\frac{2}{(x+2)^2}\right)'=\sigma\upsilon\nu x+\frac{4}{(x+2)^3}.$$

Άρα η τρίτη παράγωγος της f είναι ίση με

$$f'''(x)=\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{4}{(x+2)^3}\right)'=-\eta\mu x-\frac{12}{(x+2)^4}.$$

Η τελευταία είναι αρνητική στο $[0,\pi]$, αφού για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει $-\eta\mu x \le 0$ και $-\frac{12}{(x+2)^4}<0$. Η τελευταία ανισότητα μάλιστα ισχύει ευρύτερα, για κάθε $x \neq 2$, όμως εμάς μας απασχολεί μόνο το διάστημα $[0,\pi]$ για την ώρα. Αποδεικνύεται έτσι ότι η τρίτη παράγωγος της f είναι αρνητική, όπως θέλαμε.

Γ2. Αφού $f'''(x)<0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, έπεται ότι η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano για να αποδείξουμε ότι η f'' έχει ρίζα στο $[0,\pi]$.

- $f''(0)=1+\frac{4}{8}>0$
- $f''(\pi)=-1+\frac{4}{(\pi+2)^3}$

  Θα αποδείξουμε ότι αυτή η ποσότητα είναι θετική. Αρκεί να δείξουμε ότι

  $$1>\frac{4}{(\pi+2)^3} \Leftrightarrow (\pi+2)^3>4.$$

  Αυτό όμως προφανώς ισχύει, καθώς $(\pi+2)^3>5^3>4$.

- Η f'' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$, έτσι ώστε $f''(\xi)=0$. Το ξ είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, διότι, όπως δείξαμε παραπάνω, η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για να δείξουμε ότι το σημείο $A(\xi,f(\xi))$ είναι πράγματι σημείο καμπής της C_f, μένει να δείξουμε ότι η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του ξ. Αυτό έπεται άμεσα από τη μονοτονία της f'', όπως δείχνουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

- $0 \le x < \xi \overset{f''\searrow[0,\pi]}{\Rightarrow} f''(x) > f''(\xi) = 0.$
- $\xi < x \le \pi \overset{f''\searrow[0,\pi]}{\Rightarrow} f''(x) < f''(\xi) = 0.$

Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας, απ' όπου είναι προφανές ότι το σημείο $A(\xi,f(\xi))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f. Προσθέτουμε σε αυτόν τον πίνακα και μια επιπλέον σειρά με τη μονοτονία της f', η οποία θα μας χρειαστεί στο επόμενο ερώτημα.

x	0		ξ		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	Σ.Κ.	$\searrow$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$	

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη των ακροτάτων, πρέπει να μελετήσουμε την f' ως προς τις ρίζες και το πρόσημο. Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου της f'' και από τη συνέχεια της f', προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,\pi]$. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f'' για να αποδείξουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \xi$. Ισχύει

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\left(\frac{\pi}{2}+3\right)^2} > 0 \overset{f''(\xi)=0}{\Leftrightarrow} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > f''(\xi) \overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2} < \xi,$$

όπως θέλαμε. Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα Bolzano για να αποδείξουμε την ύπαρξη ριζών της f'.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ –άρα και σε όλα του τα υποδιαστήματα.
- $f'(0) = -1/2 < 0.$

- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{8}{(\pi+4)^2}>0.$
- $f'(\pi)=-1-2/(\pi+2)^2<0.$

Η f' είναι συνεχής στα υποδιαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0.$ Θα δείξουμε ότι

$$\xi<x_2<\pi.$$

Χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό λοιπόν δεν ίσχυε, τότε θα έπρεπε αναγκαστικά να ισχύει

$$0<x_1<\frac{\pi}{2}<x_2<\xi<\pi.$$

Τότε όμως, αφού γνωρίζουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\xi]$, έπεται ότι

$$f'(x_1)<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<f'(x_2)\Leftrightarrow 0<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0,$$

άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$0<x_1<\frac{\pi}{2}<\xi<x_2<\pi, \qquad (1)$$

όπως θέλαμε. Μελετάμε ακολούθως το πρόσημο της f'. Θα μας χρειαστεί η μονοτονία της f', την οποία έχουμε προσδιορίσει στον πίνακα κυρτότητας προηγούμενου ερωτήματος. Χρήσιμη είναι επίσης και η σχέση (1).

- Αν $x\in[0,x_1)$, τότε $f'(x)<f'(x_1)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,x_1)\subset[0,\xi]$.
- Αν $x\in(x_1,\xi]$, τότε $f'(x)>f'(x_1)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_1,\xi]\subset[0,\xi]$.
- Αν $x\in[\xi,x_2)$, τότε $f'(x)>f'(x_2)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,x_2)\subset[\xi,\pi]$.
- Αν $x\in(x_2,\pi]$, τότε $f'(x)<f'(x_2)=0$, καθώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_2,\pi]\subset[\xi,\pi]$.

Με βάση αυτές τις πληροφορίες, μπορούμε να σχεδιάσουμε τον πίνακα μονοτονίας της f:

x	0		x_1		ξ		x_2		π
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

- Όπως έχουμε σημειώσει και στον πίνακα, η f' είναι θετική στα διαστήματα (x_1,ξ) και (ξ,x_2). Επειδή η f είναι συνεχής στα σημεία x_1, ξ, x_2, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[x_1,x_2]$. Αυτός είναι και ο λόγος που, στη δεύτερη σειρά του πίνακα, έχουμε ενώσει αυτά τα δύο διαστήματα. Επιπλέον, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,x_1]$ και $[x_2,\pi]$.
- Από τα παραπάνω, έπεται ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στις θέσεις $x_0=0$ και x_2, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις x_1 και $x_3=\pi$. Με άλλα λόγια, η f έχει τελικά τέσσερις θέσεις τοπικών ακροτάτων, όπως θέλαμε.

Γ4. Ομαδοποιώντας και παραγοντοποιώντας τους όρους του παρονομαστή, μπορούμε να γράψουμε το δοσμένο όριο ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{x^2\big(f(x)-f(\xi)\big)-2x\xi\big(f(x)-f(\xi)\big)+\xi^2\big(f(x)-f(\xi)\big)}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{\big(f(x)-f(\xi)\big)\left(x^2-2x\xi+\xi^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{\big(f(x)-f(\xi)\big)(x-\xi)^2}=\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\big(f(x)-f(\xi)\big)(x-\xi)}.$$

Λόγω της συνέχειας της f, ο παρονομαστής τείνει στο 0. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε περισσότερες πληροφορίες για το πρόσημο του παρονομαστή, έτσι ώστε να αποφανθούμε αν το όριο είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$, ή αν δεν υπάρχει καν.

- Για $x\in(x_1,\xi)$ ισχύει $x-\xi<0$. Επίσης, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,\xi]$, ισχύει $f(x)<f(\xi)\Rightarrow f(x)-f(\xi)<0$ για κάθε $x\in(x_1,\xi)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο πληροφορίες, παίρνουμε ότι $\big(f(x)-f(\xi)\big)(x-\xi)>0$ για $x\in(x_1,\xi)$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to\xi^-}\big(f(x)-f(\xi)\big)(x-\xi)=0$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to\xi^-}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}=+\infty. \qquad (2)$$

- Για $x\in(\xi,x_2)$ ισχύει $x-\xi>0$. Επίσης, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,x_2]$, ισχύει $f(x)>f(\xi)\Rightarrow f(x)-f(\xi)>0$ για κάθε $x\in(\xi,x_2)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο πληροφορίες, παίρνουμε ότι $\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)>0$ για $x\in(x_1,\xi)$. Εφόσον $\lim_{x\to\xi^+}\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)=0$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to\xi^+}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}=+\infty. \qquad (3)$$

Συμπεραίνουμε από τις (2), (3) ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\left(f(x)-f(\xi)\right)(x-\xi)}=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Στην εκφώνηση δίνεται ότι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε η f δεν μηδενίζεται. Εφόσον είναι και συνεχής, έπεται ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Καθώς $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε τελικά ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η δοσμένη ισότητα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+f(x)\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f(x)}{f(x)}=e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)=1+e^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln f(x)+f(x)\right)'=\left(x+e^x\right)'$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής, προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\ln f(x)+f(x)=x+e^x+c$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού όμως $f(0)=1$, προκύπτει από την παραπάνω σχέση, αντικαθιστώντας $x=0$, ότι`

$$\ln 1+1=1+c \Leftrightarrow c=0.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\ln f(x)+f(x)=x+e^x. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε στην παραπάνω σχέση να λύσουμε απευθείας ως προς $f(x)$, και να προσδιορίσουμε έτσι τον τύπο της f. Παρατηρούμε όμως ότι τα δύο μέλη έχουν την ίδια μορφή. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+x$ για $x>0$. Τότε, η (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $g(f(x))=g(e^x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x>0$ ισχύει $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και «1-1» σε αυτό το διάστημα. Επομένως, η ισότητα $g(f(x))=g(e^x)$ συνεπάγεται την ισότητα $f(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η αντίστροφη της συνάρτησης f είναι η $f^{-1}(x)=\ln x, x>0$. Έτσι, το ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$I=\int_{1/2024}^{2024}\frac{f^{-1}(x)}{x^2+1}dx=\int_{1/2024}^{2024}\frac{\ln x}{x^2+1}dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$. Τότε, $x=\frac{1}{u}$, άρα $dx=\left(\frac{1}{u}\right)'du=-\frac{1}{u^2}du$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης.

- Για $x=1/2024$ ισχύει $u=2024$.
- Για $x=2024$ ισχύει $u=1/2024$.

Επιπλέον, $\ln x=\ln\left(\frac{1}{u}\right)=\ln u^{-1}=-\ln u$. Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$I=\int_{1/2024}^{2024}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=\int_{2024}^{1/2024}-\frac{\ln u}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=\int_{2024}^{1/2024}\frac{\ln u}{u^2+1}du=-\int_{1/2024}^{2024}\frac{\ln u}{u^2+1}du=-I.$$

Επομένως, καταλήγουμε στην ισότητα $I=-I$, απ' όπου προκύπτει ότι $2I=0$, συνεπώς $I=0$.

Δ3. Θα χρειαστεί να μελετήσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x=e\ \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\pi]$. Ισχύουν τα εξής:

- $e^x>0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.
- $\sigma\upsilon\nu x\geq 0$ για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\sigma\upsilon\nu x\leq 0$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x)\geq 0$ για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $h(x)<0$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|h(x)|dx=\int_0^{\pi/2}h(x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-h(x))dx=I_1-I_2. \quad (2)$$

Υπολογίζουμε καθένα από τα δύο ολοκληρώματα ξεχωριστά. Επειδή έχουν την ίδια μορφή –είναι και τα δύο ολοκληρώματα της h, απλώς σε διαστήματα με διαφορετικά άκρα– μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της h σε ένα γενικό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τα $[\alpha,\beta]$ με τα άκρα ολοκλήρωσης των ολοκληρωμάτων I_1, I_2. Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Ισχύει

$$I=\int_\alpha^\beta h(x)dx=\int_\alpha^\beta e^x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_\alpha^\beta (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx$$

$$=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x(-\eta\mu x)dx=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta e^x\eta\mu x dx$$

$$=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta (e^x)'\eta\mu x dx=\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta+\left[e^x\eta\mu x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x(\eta\mu x)'dx$$

$$=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^x\sigma\upsilon\nu x dx=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta-I.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από το πρώτο και το τελευταίο μέλος της παραπάνω ισότητας ότι

$$I=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta-I\Leftrightarrow 2I=\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_\alpha^\beta.$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα α,β με τα άκρα ολοκλήρωσης των I_1, I_2, προκύπτει ότι

$$I_1=\frac{1}{2}\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left[e^{\pi/2}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-e^0(\eta\mu 0+\sigma\upsilon\nu 0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)$$

και

$$I_2=\frac{1}{2}\left[e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{2}\left[e^{\pi}\left(\eta\mu(\pi)+\sigma\upsilon\nu(\pi)\right)-e^{\pi/2}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}+e^{\pi}\right).$$

Έπεται λοιπόν τελικά από τη σχέση (2) ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\boxed{E(\Omega)=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)-\left[-\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}+e^{\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+2e^{\pi/2}-1\right).}$$

Δ4. Έστω $A(\alpha,f(\alpha))\equiv(\alpha,\varphi(\alpha))$ ένα πιθανό κοινό σημείο των C_f, C_φ, στο οποίο οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη. Τότε, θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες

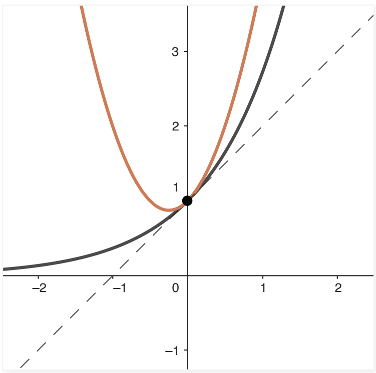
$$f(\alpha)=\varphi(\alpha) \quad \text{και} \quad f'(\alpha)=\varphi'(\alpha).$$

Καθώς $\varphi'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1,$ αυτό το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} f(\alpha)=\varphi(\alpha) \\ f'(\alpha)=\varphi'(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1 \\ e^{\alpha}=4\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e\alpha=2\alpha^2+\alpha+1 \\ 2\alpha^2+\alpha+1=4\alpha+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1 \\ 2\alpha^2-3\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1 \\ \alpha(2\alpha-3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1 \\ \alpha=0 \quad \text{ή} \quad \alpha=\frac{3}{2} \end{cases}.$$



Παρατηρούμε ότι η τιμή $\alpha=0$ είναι λύση του συστήματος, καθώς $e^0=2\cdot 0^2+0+1=1$. Αντίθετα, η τιμή $\alpha=\frac{3}{2}$ δεν επαληθεύει την ισότητα $e^{3/2}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1$.

Επομένως, το μοναδικό σημείο επαφής είναι το $A(0,f(0))$ με $f(0)=e^0=1$ και η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+1.}$$

Διαγώνισμα 4.32

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 112.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

Α3. **i.** Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

ii. Για να καταρρίψουμε τον ισχυρισμό, θα κατασκευάσουμε ένα αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x$ για $x\in[-1,1]$. Η f είναι συνεχής και, επιπλέον,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Παρ' όλα αυτά όμως, η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$.

Α4. **i)** Λ, **ii)**Σ, **iii)** Λ, **iv)**Λ, **v)**Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$f'(x)=\left[\frac{1}{3}\left(x^4+\alpha x^3-\beta x^2+8x-3\right)\right]'=\frac{4}{3}x^3-\alpha x^2-\frac{2\beta}{3}x+\frac{8}{3}.$$

Εφόσον η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=-2$ και εφόσον αυτό το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, έπεται από το Θεώρημα του Fermat ότι

$$f'(-2)=0\Rightarrow\frac{4}{3}(-8)-4\alpha+\frac{4\beta}{3}+\frac{8}{3}=0\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}-32-12\alpha+4\beta+8=0$$

$$\Rightarrow-12\alpha+4\beta=24\overset{:4}{\Rightarrow}-3\alpha+\beta=6\Rightarrow\beta=6+3\alpha.\qquad(1)$$

Επιπλέον, προκύπτει από την υπόθεση του προβλήματος ότι

$$f'(2)=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{32}{3}-4\alpha-\frac{4\beta}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}32-12\alpha-4\beta+8=16$$

$$\overset{:4}{\Leftrightarrow}3\alpha+\beta=6\Rightarrow\beta=6-3\alpha.\quad(2)$$

Έπεται λοιπόν από τις σχέσεις (1) και (2) ότι $6+3\alpha=6-3\alpha \Rightarrow \alpha=0$. Από τη σχέση (1), προκύπτει τώρα ότι $\beta=6$, όπως θέλαμε. Ισχύει λοιπόν τελικά

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^4-6x^2+8x-3\right)=\frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

B2. Ισχύει $f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\left(x^3-3x+2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, πρέπει να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της f'. Για να το κάνουμε αυτό, ο ευκολότερος τρόπος είναι να την παραγοντοποιήσουμε. Θα αφήσουμε στην άκρη προς το παρόν τον πολλαπλασιαστή $\frac{4}{3}$ και θα εστιάσουμε στο πολυώνυμο x^3-3x+2, που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση. Εξάλλου, το πρόσημο της f' είναι ίδιο με το πρόσημο αυτού του πολυωνύμου. Από την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, γνωρίζουμε ότι οι πιθανές ακέραιες ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 2, δηλαδή οι αριθμοί ±1 και ±2. Αντικαθιστώντας το x με αυτές τις τιμές, βρίσκουμε πως πράγματι η $x=1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου. Εκτελούμε λοιπόν σχήμα Horner για τη διαίρεση του x^3-3x+2 με το $x-1$:

1	0	-3	2	1
1	1	-2	0	

Έτσι, προκύπτει ότι $x^3-3x+2=(x-1)\left(x^2+x-2\right)$. Θα εντοπίσουμε τώρα τις ρίζες του δεύτερου παράγοντα. Η διακρίνουσά του ισούται με

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9,$$

οπότε οι ρίζες του είναι οι

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1+3}{2}=1 \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Επομένως, το τριώνυμο x^2+x-2 παραγοντοποιείται ως $(x-1)(x+2)$ –θυμηθείτε την παραγοντοποίηση τριωνύμου από την Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. Έπεται λοιπόν ότι

$$x^3-3x+2=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2).$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου x^3-3x+2, άρα και της f' φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	0 $+$	
$x+2$	$-$	0 $+$	$+$	
x^3-3x+2	$-$	0 $+$	0 $+$	
$f''(x)$	$-$	0 $+$	0 $+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,1]$ και $[1,+\infty)$. Επειδή είναι συνεχής στη θέση $x=1$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[-2,+\infty)$ –αυτός είναι και ο λόγος που μπορούμε να ενώσουμε τις δύο στήλες στην τελευταία σειρά.

- Σύμφωνα με τον πίνακα, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=-2$, με τιμή $f(-2)=-9$. Πράγματι, αν $x\in(-\infty,-2]$, τότε $f(x)\geq f(-2)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$. Από την άλλη, αν $x\in[-2,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(-2)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,+\infty)$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει ότι $f(x)\geq f(-2)$, οπότε το $x=-2$ είναι πράγματι θέση ακροτάτου της f.

B3. Ορίζουμε $\Delta_1=(-\infty,-2]$ και $\Delta_2=[-2,+\infty)$, τα διαστήματα μονοτονίας της f.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα

$$f(\Delta_1)=\left[f(-2),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right).$$

Ισχύει $f(-2)=-9$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4}{3}=+\infty$, επομένως $f(\Delta_1)=[-9,+\infty)$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2, άρα

$$f(\Delta_2)=\left[f(-2),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Ισχύει $f(-2)=-9$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3}=+\infty$, επομένως $f(\Delta_2)=[-9,+\infty)$.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τη δοσμένη εξίσωση μέσω της f. Αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$x^4-6x^2+8x-15=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x^4-6x^2+8x-15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-1=4 \Leftrightarrow f(x)=4.$$

Εφόσον $4\in f(\Delta_1),f(\Delta_2)$, έπεται ότι υπάρχουν $x_1\in\Delta_1$ και $x_2\in\Delta_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=4$. Το x_1 είναι το μοναδικό στο Δ_1 με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1. Το x_2 είναι επίσης το μοναδικό στο Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η δοσμένη εξίσωση έχει πράγματι δύο ακριβώς ρίζες. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η μία είναι θετική και η άλλη αρνητική. Η ρίζα x_1 είναι σίγουρα αρνητική, καθώς ανήκει στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-2]$. Για το x_2 δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα, καθώς ανήκει στο διάστημα $\Delta_2=[-2,+\infty)$, το οποίο περιέχει και θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε ότι $x_2>0$ ως εξής: Παρατηρούμε ότι $f(1)=0<4=f(x_2)$. Επίσης, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$. Επομένως, συμπεραίνουμε από την παραπάνω ανισότητα ότι $1<x_2$, το οποίο πράγματι αποδεικνύει ότι $x_2>0$ και ολοκληρώνει την απόδειξη.

B4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{4}{3}x^3-4x+\frac{8}{3}\right)'=4x^2-4x=4\left(x^2-1\right)=4(x-1)(x+1).$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι κοίλη στο $[-1,1]$.
- Τα σημεία καμπής της C_f είναι τα $A\left(-1,f(-1)\right)\equiv\left(-1,-\frac{16}{3}\right)$ και $B\left(1,f(1)\right)\equiv(1,0)$.

Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f, θα βρούμε επιπλέον τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x-1=0\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}x^4-6x^2+8x-3=0.$$

Για να λύσουμε την τελευταία πολυωνυμική εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε σχήμα Horner και παραγοντοποίηση. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του τελευταίου πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -3, δηλαδή οι ±1 και ±3. Κάνοντας έλεγχο αυτών των τιμών, διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=1$ πράγματι μηδενίζει το πολυώνυμο. Επομένως, κοιτάζουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση με το $x-1$:

1	0	-6	8	-3	1
1	1	-5	3	0	

Από το σχήμα Horner, έπεται ότι

$$x^4-6x^2+8x-3=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^3+x-5x+3\right)=0.\quad(3)$$

Συνεχίζουμε με σχήμα Horner για το πολυώνυμο $x^3+x-5x+3$. Με έλεγχο των τιμών $x=\pm1$ και $x=\pm3$, διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=1$ είναι πράγματι ρίζα αυτού του πολυωνύμου.

1	1	-5	3	1
1	2	-3	0	

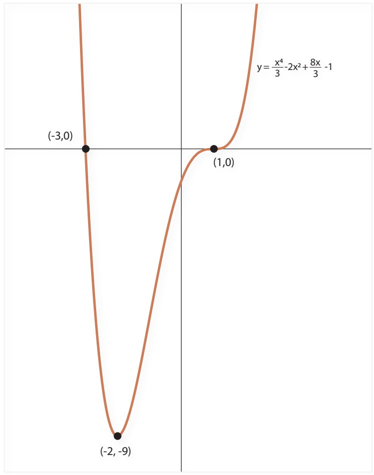
Από το νέο σχήμα Horner και από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^2\left(x^2+2x-3\right).$$

Τώρα που το πολυώνυμο είναι παραγοντοποιημένο, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες του μέσω των ριζών του κάθε παράγοντα. Ο πρώτος παράγοντας έχει προφανώς μοναδική ρίζα την $x=1$. Ο δεύτερος παράγοντας έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$, οπότε έχει ρίζες

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{και} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το αρχικό πολυώνυμο, άρα και η συνάρτηση f έχουν ρίζες τους αριθμούς $x=1$ και $x=-3$. Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $(-3,0)$ και $(1,0)$.



Τέλος, το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,f(0)) \equiv (0,-1)$. Με βάση όλες τις παραπάνω πληροφορίες, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τη χάραξη έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει όσες πληροφορίες έχουμε συλλέξει στα προηγούμενα ερωτήματα για τα διαστήματα μονοτονίας και κυρτότητας της f, τα ακρότατά της και τα σημεία καμπής της C_f.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$, θα πρέπει να επιλέξουμε δύο οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R})$ με $y_1 < y_2$ και να αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι $f(f^{-1}(y_1)) = y_1$ και $f(f^{-1}(y_2)) = y_2$. Άρα θα ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \overset{f \nearrow \mathbb{R}}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Από αυτήν τη συνεπαγωγή, έπεται ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$.

Γ2. Έστω $I = \int_0^{2024} f(u)du$. Παρατηρήστε ότι ο I είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, οπότε, στο ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^{2024} \left(\frac{f(x)}{\int_\alpha^{2024} f(u)du} \right) dx,$$

δεν εξαρτάται από το x. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα –δηλαδή το παραπάνω– ισούται λοιπόν με

$$\int_{\alpha}^{2024}\left(\frac{f(x)}{\int_{\alpha}^{2024} f(u)du}\right)dx=\int_{\alpha}^{2024}\frac{f(x)}{I}dx=\frac{1}{I}\int_{\alpha}^{2024}f(x)dx$$

$$\boxed{=\frac{1}{I}\cdot I=1.}$$

Παρότι έχουμε ορίσει το I χρησιμοποιώντας το u ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, γράφοντάς το με άλλη μεταβλητή δεν κάνει καμία διαφορά. Αυτό είναι κάτι που έχουμε ήδη συζητήσει σε λύσεις προηγούμενων προβλημάτων.

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_1): y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=f'(-1)x+f'(-1)+f(-1).$$

Δίνεται όμως στην υπόθεση ότι η (ε_1) έχει εξίσωση $y=2x+6$. Έπεται λοιπόν από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(-1)=2 \quad \text{και} \quad f'(-1)+f(-1)=6,$$

απ' όπου μπορούμε πολύ άμεσα να υπολογίσουμε ότι $\boxed{f'(-1)=2 \text{ και } f(1)=4\,.}$

Ομοίως, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(2,f(2))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_2): y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=f'(2)x-2f'(2)+f(2).$$

Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση, η (ε_2) έχει εξίσωση $y=3x-2$. Έπεται λοιπόν από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(2)=3 \quad \text{και} \quad -2f'(2)+f(2)=4,$$

απ' όπου έπεται άμεσα ότι $\boxed{f'(2)=3 \text{ και } f(2)=4.}$

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $K(\xi,f(\xi))$ είναι

$$(\varepsilon_\xi): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi).$$

Αυτή η ευθεία διέρχεται από το $(3,4)$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες $x=3$ και $y=4$ επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή αν και μόνο αν

$$4=f(\xi)+(3-\xi)f'(\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-4}{\xi-3}. \qquad (1)$$

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-4}{x-3}$ για $x\in[-1,2]$. Ισχύουν τα εξής:

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $g(-1)=\dfrac{f(-1)-4}{-4}=\dfrac{4-4}{-4}=0$
- $g(2)=\dfrac{f(2)-4}{2-3}=0.$

Άρα έπεται από το θεώρημα του Rolle ότι υπάρχει $\xi\in(-1,2)$ για το οποίο $g'(\xi)=0$. Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $x\in(-1,2)$ ισχύει

$$g'(x)=\frac{(f(x)-4)'(x-3)-(f(x)-4)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)f'(x)-(f(x)-4)}{(x-3)^2}.$$

Επομένως, η εξίσωση $g'(\xi)$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{aligned} g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)(\xi-3)-(f(\xi)-4)}{(\xi-3)^2}=0 &\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-3)=f(\xi)-4\\ &\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-4}{\xi-3}, \end{aligned}$$

η οποία είναι ακριβώς η εξίσωση (1) που θέλαμε να αποδείξουμε. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $K(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $(3,4)$.

Γ5. Παρατηρούμε αρχικά ότι η ζητούμενη ισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{f'(\xi_1)-f'(-1)}{f'(2)-f'(\xi_1)}=\frac{5}{4} &\Leftrightarrow 4(f'(\xi_1)-f'(-1))=5(f'(2)-f'(\xi_1))\\ &\Leftrightarrow 9f'(\xi_1)=5f'(2)+4f'(-1)\\ &\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{5}{9}f'(2)+\frac{4}{9}f'(-1).\quad (2) \end{aligned}$$

Η έκφραση στο δεξιό μέλος μάς παραπέμπει στο θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ.). Θέτουμε

$$\eta=\frac{5}{9}f'(2)+\frac{4}{9}f'(-1).$$

Η f' είναι συνεχής στο $[-1,2]$, καθώς μας έχει δοθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι ο αριθμός η βρίσκεται μεταξύ των $f'(-1)$ και $f'(2)$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ3, ισχύει $f'(-1)=2<f'(2)=3$. Με βάση την τελευταία ανισότητα, είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$f'(-1)<\eta<f'(2).$$

Για να το δείτε αυτό, μπορείτε να αντικαταστήσετε το η με $\frac{5}{9}f'(2)+\frac{4}{9}f'(-1)$ και να δουλέψετε με ισοδυναμίες, ξεχωριστά για καθένα από τα μέλη της παραπάνω διπλής ανισότητας. Οι υπολογισμοί είναι άμεσοι και γι' αυτό τους παραλείπουμε.

Με βάση την παραπάνω διπλή ανισότητα και λόγω της συνέχειας της f', έπεται από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών ότι υπάρχει $\xi_1\in(-1,2)$, έτσι ώστε

$$f'(\xi_1)=\eta=\frac{4f'(-1)+5f'(2)}{9},$$

το οποίο, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, στη σχέση (2), αποδεικνύει το ζητούμενο. Ο παράγοντας $\sqrt{x}$ που εμφανίζεται στον παρονομαστή είναι ο λόγος που υπολογίζουμε την παράγωγο στο $\left(0,\pi^2/4\right)$, εξαιρώντας το $x_0=0$. Αυτή η παρατήρηση σχετίζεται με τη σημείωση που κάναμε στο τέλος του προηγούμενου ερωτήματος.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Αφού η f είναι συνεχής, θα είναι ειδικότερα συνεχής στο σημείο $x_0=0$. Θα ισχύει λοιπόν

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x-\frac{x^2}{2}+2\right). \qquad (1)$$

Ο μόνος όρος του ορίου που παρουσιάζει προβλήματα είναι ο πρώτος, καθώς έχει την απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$. Κατά τη συνήθη τακτική, την οποία έχουμε χρησιμοποιήσει και σε άλλα αντίστοιχα προβλήματα, μετατρέπουμε αυτόν τον όρο σε πηλίκο, με σκοπό να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Με άλλα λόγια, γράφουμε

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{\left(-1/x^2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Έπεται τώρα από τη σχέση (1) ότι

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x-\frac{x^2}{2}+2\right)=0-\frac{0^2}{2}+2=2$$

Εξετάζουμε τώρα την παραγωγισιμότητα στη θέση $x_0=0$. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό, δηλαδή εξετάζουμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Καθώς η f ορίζεται μόνο από τα δεξιά του $x_0=0$, μπορούμε να περιοριστούμε στο δεξιό πλευρικό όριο. Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x\ln x-\frac{x^2}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{x}{2}\right)=(-\infty)-0=-\infty.$$

Εφόσον το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι δεν ορίζεται η παράγωγος της f στο $x_0=0$.

Δ2. Η f είναι (δύο φορές) παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη (δύο φορές) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για να αποδείξουμε ότι δεν έχει ακρότατα στο $(0,+\infty)$, θα δείξουμε ότι η f' δεν έχει ρίζες σε αυτό το διάστημα. Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(x\ln x-\frac{x^2}{2}+2\right)'=\ln x+1-x \quad \text{και} \quad f''(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}.$$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του παράγοντα $1-x$ και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Συμπεριλαμβάνουμε στον πίνακα τη μονοτονία της f'.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$. Έχει λοιπόν ολικό μέγιστο στη θέση $x=1$, με τιμή $f'(1)=\ln 1+1-1=0$.

Επομένως, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας, ισχύει $f'(x)<f'(1)=0$ για κάθε $x \neq 1$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο 0 και στο 1 και εφόσον $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Επομένως, δεν έχει ακρότατα στο ανοιχτό διάστημα $(0,+\infty)$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Δ3. Από τον παραπάνω πίνακα, είναι φανερό ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το σημείο $A(1,f(1))\equiv\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Για να αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,+\infty)$, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Bolzano. Θα αποδείξουμε μάλιστα ότι αυτή η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(1,4)$.

> Σε αυτό το ερώτημα υπάρχει αρκετή ελευθερία. Θα μπορούσε κανείς, αντί για το 4, να επιλέξει ένα άλλο άνω άκρο για το διάστημα εφαρμογής του θεωρήματος Bolzano. Σε αυτήν την περίπτωση, η προσέγγιση του πιθανότατα δεν θα ήταν απαραίτητη.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$.
- $f(1)=\frac{3}{2}>0$.
- $f(4)=4\ln 4-\frac{16}{2}+2=8\ln 2-6=8\left(\ln 2-\frac{6}{8}\right)<0$,

  όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\ln 2\approx 0.69<0.75=\frac{6}{8}$.

Έπεται λοιπόν από το Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$. Αυτό το ξ. είναι η μοναδική ρίζα της f., καθώς, όπως αποδείξαμε στη λύση του προηγούμενου ερωτήματος, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ4. i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ είναι

$$(\varepsilon): y-\frac{3}{2}=f'(1)(x-1) \overset{f'(1)=0}{\Leftrightarrow} y=\frac{3}{2}.$$

ii. Όπως δείξαμε στο Ερώτημα Δ2, η f είναι κοίλη στο διάστημα $[1,+\infty)$. Άρα, σε αυτό το διάστημα, η C_f βρίσκεται «κάτω» από την εφαπτόμενή της στο $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Με άλλα λόγια, για κάθε $x\geq 1$ ισχύει $f(x)\leq\frac{3}{2}$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από την ισότητα

$$E=\int_1^2\left|\frac{3}{2}-f(x)\right|dx=\int_1^2\left(\frac{3}{2}-f(x)\right)dx=\int_1^2\left(\frac{3}{2}-x\ln x+\frac{x^2}{2}-2\right)dx$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{1}{2}-x\ln x+\frac{x^2}{2}\right)dx \quad =\left[-\frac{x}{2}\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2-\int_1^2 x\ln x dx$$

$$=\left[-1+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{8}{6}-\frac{1}{6}\right]-\int_1^2 x\ln x dx \;=\frac{2}{3}-\int_1^2 x\ln x dx$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που απομένει, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\int_1^2 x\ln x dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}(\ln x)' dx$$

$$=2\ln 2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \;=2\ln 2-\int_1^2\frac{x}{2}dx \;=2\ln 2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 \;=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

Σε συνδυασμό με την παραπάνω ισότητα, προκύπτει ότι $\boxed{E=\frac{17}{12}-2\ln 2.}$