Λύσεις κριτηρίου 4

ΘΕΜΑ Α

Α1. (α) **Α**2. (δ) **Α**3. (γ) **Α**4. (γ) **Α5.** α Σ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (i)

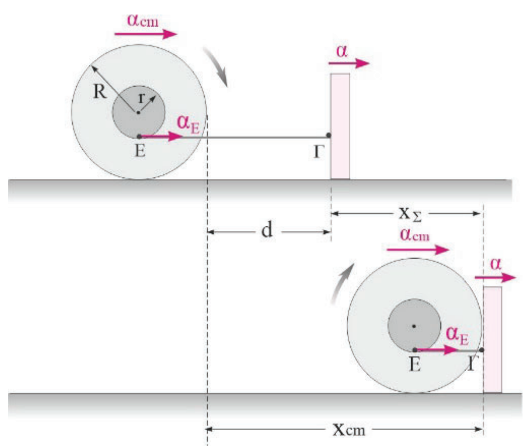
Για το σημείο Ε που είναι σημείο του καρουλιού έχουμε:

$$\vec{\alpha}_E = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\gamma\rho} \Rightarrow \alpha_E = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu} r \ , \quad (1)$$

Για το καρούλι ισχύει: $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \ , \quad (2)$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε:

$$\alpha_E = \alpha_{cm} - \frac{\alpha_{cm}}{R} r \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{3}{2}\alpha$$



Όταν το καρούλι φτάσει στο σώμα θα έχει διανύσει x_{cm} και το σώμα Σ διάστημα x_Σ.

$$x_{cm} = d + x_\Sigma \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 = d + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\alpha t^2 = d + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha t^2}{4} = d \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{d}{\alpha}}$$

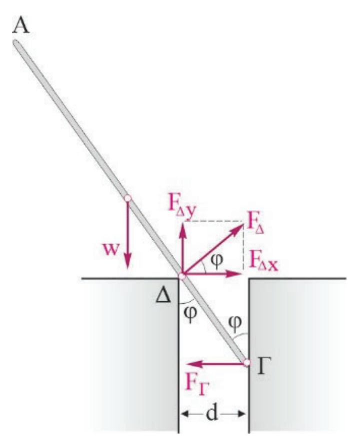
Β2. (ii)

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη ράβδο ΑΓ.

Η F_Γ είναι κάθετη στον λείο κατακόρυφο τοίχο.

Η F_Δ είναι κάθετη στη ράβδο αφού αυτή ακουμπά στην κορυφή Δ.

Το βάρος της w είναι κατακόρυφο και περνά από το κέντρο μάζας της.



Βρίσκουμε τις ροπές ως προς το σημείο Γ:

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow w \cdot \frac{L}{2}\eta\mu\varphi - F_\Delta(\Gamma\Delta) = 0 \ , \quad (1)$$

Από την ισορροπία στον άξονα y:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w = F_{\Delta y} = F_\Delta \eta\mu\varphi \ , \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε: $w \cdot \frac{L}{2}\eta\mu\varphi - \frac{w}{\eta\mu\varphi}(\Gamma\Delta) \Rightarrow w \cdot \frac{L}{2}\frac{1}{2} - \frac{w}{0,5}(\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Delta) = \frac{L}{8}$

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε: $d = (\Gamma\Delta)\eta\mu\varphi = \frac{L}{8}\frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{L}{16}$

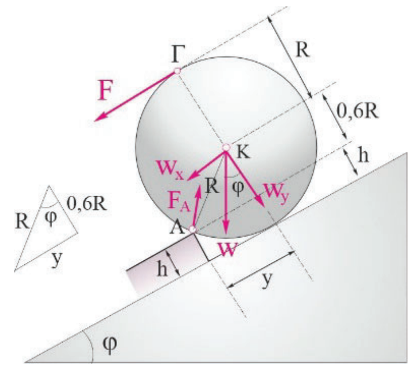
Β3. (ii)

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη σφαίρα.

Η F_A ασκείται σε τυχαία διεύθυνση από την κορυφή Α.

Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες

$w_x = w\eta\mu\varphi = 0,6w$ και $w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8w$.



Επειδή η σφαίρα μόλις θα υπερπηδήσει το εμπόδιο, δεν ακουμπά στο επίπεδο αλλά μόνον στο Α.

Βρίσκουμε τις ροπές ως προς το σημείο Α:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot 1,6R + w\eta\mu\varphi \cdot 0,6R - w\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot y = 0 \ \ , (1)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος $y = \sqrt{R^2 - \left(0,6R\right)^2} \Rightarrow y = 0,8R$

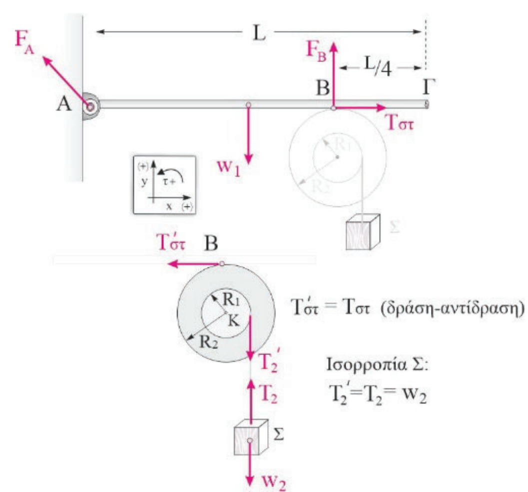
Η σχέση (1) γίνεται:

$$F \cdot 1,6R + 0,6w \cdot 0,6R = 0,8w \cdot 0,8R \Rightarrow 1,6F = 0,28w \Rightarrow F = \frac{7}{40}w$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη ράβδο και παίρνουμε ροπές ως προς το (Α).

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_B\frac{3L}{4} - w_1\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow F_B = 20N$$



Γ2. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στην τροχαλία και παίρνουμε ροπές ως προς το κέντρο (Κ).

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -w_2 \cdot R_1 + T'_{\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \Rightarrow T'_{\sigma\tau} = 5N$$

$$T_{o\rho} = T_{\sigma\tau} = \mu \cdot F_B \Rightarrow \mu = \frac{T_{\sigma\tau}}{F_B} = \frac{5N}{20N} = 0,25$$

Γ3. Σχεδιάζουμε στη ράβδο τη νέα δύναμη F_Γ και παίρνουμε ροπές ως προς το (Α) και ροπές ως προς το κέντρο (Κ) της τροχαλίας.

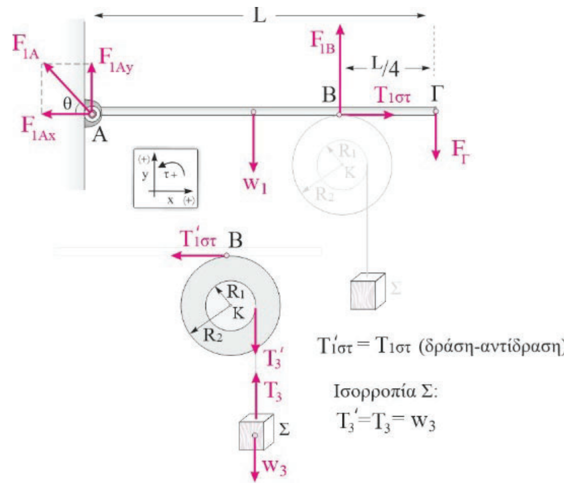
$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_{1B}\frac{3L}{4} - w_1\frac{L}{2} - F_\Gamma \cdot L = 0 \ \Rightarrow$$

$$F_{1B} = 32N$$

$$T_{1\sigma\tau} = T_{1o\rho} = \mu \cdot F_{1B} \ \Rightarrow \ T_{1\sigma\tau} = 8N$$

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \ \Rightarrow - w_3 \cdot R_1 + T'_{1\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \ \Rightarrow$$

$$w_3 = 16N \ \Rightarrow \ m_3 = 1{,}6kg$$



Γ4. Η δύναμη F_{1A} που ασκείται από την άρθρωση στην ράβδο θα υπολογιστεί από την ισορροπία της ράβδου στον x και στον y άξονα.

$$\Sigma F_x = 0 \ \Rightarrow \ T_{1\sigma\tau} - F_{A1x} = 0 \ \Rightarrow \ F_{A1x} = 8N$$

$$\Sigma F_y = 0 \ \Rightarrow \ F_{A1y} - w_1 + F_{1B} - F_\Gamma = 0 \ \Rightarrow$$

$$F_{A1y} = 7N$$

$$F_{1A} = \sqrt{F_{1Ax}^2 + F_{1Ay}^2} = \sqrt{113}\,N \ , \ \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{1Ay}}{F_{1Ax}} = \frac{7}{8}$$

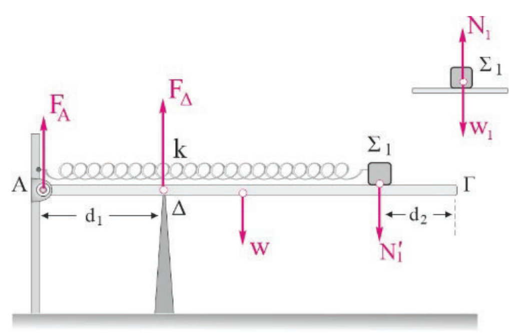
Γ5. Όταν θα αντικαταστήσουμε το Σ_3 με άλλο Σ_4 μεγαλύτερης μάζας, αυτό θα κατέρχεται επιταχυνόμενο και η τροχαλία θα περιστρέφεται. Η παραγόμενη θερμότητα θα ισούται με το απόλυτο του έργου της τριβής ολίσθησης. Όταν το Σ_4 κατέλθει κατά 1m, ένα σημείο στην εξωτερική περιφέρεια της τροχαλίας θα διανύσει τόξο ίσο με 2m, γιατί η ακτίνα του εξωτερικού δίσκου είναι διπλάσια αυτής του εσωτερικού που είναι τυλιγμένο το σχοινί που είναι δεμένο το Σ_4.
Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι

$$W_T = -T_{o\lambda} \cdot x = -\mu \cdot F_{1B} \cdot x = -0{,}25 \cdot 32N \cdot 2J \ \Rightarrow \ W_T = -16J$$

Άρα η εκλυόμενη θερμότητα είναι 16 J.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη ράβδο και παίρνουμε ροπές ως προς την άρθρωση (A).

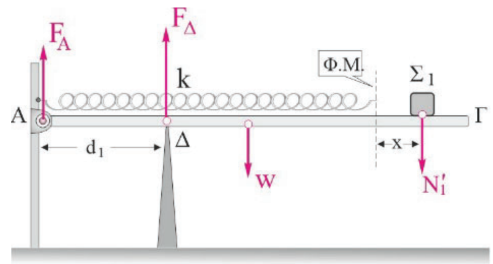


$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_\Delta \cdot d_1 - w\frac{L}{2} - N_1' \cdot (L - d_2) = 0 \ \Rightarrow$$

$$N_1' = 10N$$

Η N'_1 είναι η δύναμη που ασκεί το Σ_1 στη ράβδο και επειδή αυτό ισορροπεί ισούται με το βάρος του σώματος, άρα w_1=10N και m_1=1kg.

Δ2. Τοποθετούμε το $Σ_1$ σε μια τυχαία θέση x από τη θέση ισορροπίας του που είναι και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και παίρνουμε ροπές ως προς την άρθρωση (Α).



$$Στ_{(A)} = 0 \Rightarrow F_Δ \cdot d_1 - w\frac{L}{2} - N_1' \cdot (L - d_2 + x) = 0 \Rightarrow$$

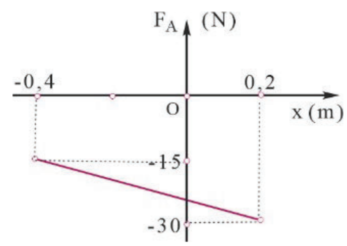
$$F_Δ = 55 + 25x \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Από την ισορροπία στον άξονα y έχουμε:

$$ΣF_y = 0 \Rightarrow F_A + F_Δ = w + w_1 \Rightarrow F_A = -25 - 25x \text{ (S.I.)} \quad \text{για } -0,4\text{m} \le x \le 0,2\text{m}$$

Άρα, η δύναμη από την άρθρωση έχει αντίθετη φορά από αυτή που σχεδιάσαμε στο σχήμα.

Η γραφική παράσταση F_A=f(x) δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



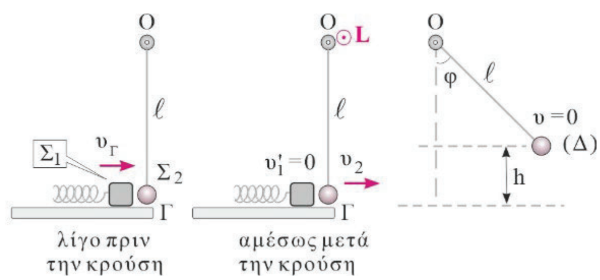
Δ3. Για να βρούμε την ταχύτητα του $Σ_1$ λίγο πριν την κρούση εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση εκτροπής ($x_{αρχ}$=-0,4m) μέχρι την άκρη Γ ($x_Γ$=0,2m).

$$K_Γ - 0 = W_{Fελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mυ_Γ^2 - 0 = \frac{1}{2}kx_{αρχ}{}^2 - \frac{1}{2}kx_Γ{}^2 \Rightarrow$$

$$υ_Γ = 2\sqrt{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή τα σώματα έχουν ίδιες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες, έτσι



$$υ_2 = 2\sqrt{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

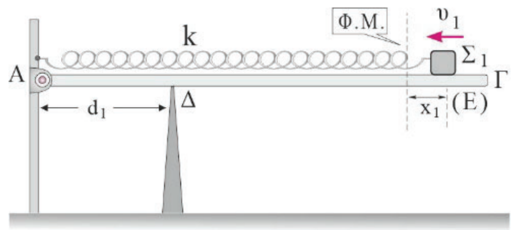
και το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου αμέσως μετά την κρούσης ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ο είναι

$$L_2 = m_2υ_2\ell = 1,2\sqrt{3}\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Δ4. Για να βρούμε τη μέγιστη γωνία φ, εφαρμόζουμε για το σφαιρίδιο το ΘΜΚΕ μεταξύ του άκρου Γ της ράβδου και του σημείου (Δ) που θα φτάσει το σφαιρίδιο.

$$K_Δ - K_Γ = W_w + W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ_2^2 = -mgh \Rightarrow h = \frac{υ_2^2}{2g} = 0,6\text{m}$$

Επειδή h=ℓ, το σφαιρίδιο θα φτάσει μέχρι τη θέση που το νήμα θα γίνει οριζόντιο, άρα φ=90°.



Δ5. Το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση ξεκινά με ταχύτητα μηδέν (ανταλλαγή ταχυτήτων). Για να βρούμε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σημείο Δ, τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 είναι δεκαπενταπλάσια της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, θα πρέπει να βρούμε σε ποια θέση (Ε) που απέχει x_1 από το Φ.Μ. του ελατηρίου συμβαίνει αυτό.

Εφαρμόζουμε για το Σ_1 το ΘΜΚΕ μεταξύ του άκρου Γ της ράβδου και του σημείου (Ε).

$$K_E - K_\Gamma = W_{F\varepsilon\lambda} \Rightarrow 15U_{E\lambda} - 0 = \frac{1}{2}kd_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$15\frac{1}{2}kx_1^2 - 0 = \frac{1}{2}kd_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm 0,05\text{m}$$

Αυτό συμβαίνει σε δύο θέσεις που ισαπέχουν 0,05m δεξιά και αριστερά του Φ.Μ. του ελατηρίου.

Η δύναμη στήριξης στο Δ σύμφωνα με τη σχέση (1) του Δ_1 ερωτήματος είναι

$$F_{\Delta 1} = 55 + 25 \cdot 0,05\ ,\ (\text{S.I.}) \Rightarrow F_{\Delta 1} = 56,25\text{N}$$