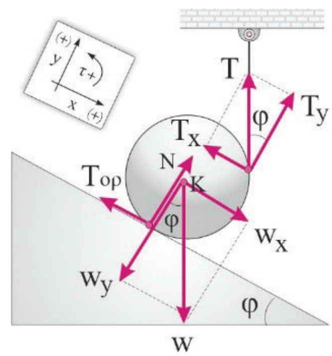
Λύσεις κριτηρίου 5

ΘΕΜΑ Α

Α1. (β) **Α**2. (γ) **Α**3. (δ) **Α**4. (γ) **Α5**. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (ii)



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο και τις αναλύουμε σε άξονες. Εφόσον ο δίσκος οριακά δεν γλιστράει, η στατική τριβή είναι ίση με την οριακή, $T_{ορ}$.

Παίρνουμε ροπές ως προς το κέντρο του δίσκου. Οι δυνάμεις T και $T_{ορ}$ ασκούνται εφαπτομενικά στην περιφέρεια του δίσκου και απέχουν R από το κέντρο του K.

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow TR - T_{ορ}R = 0 \Rightarrow T = T_{ορ}$$

Παίρνουμε ισορροπία στον άξονα x.

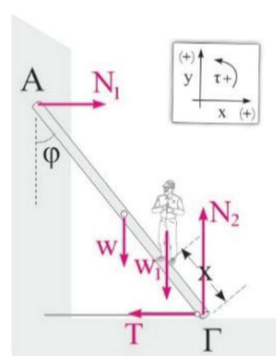
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow Mgημφ - T_{ορ} - Tημφ = 0 \Rightarrow T_{ορ}(1+ημφ) = Mgημφ \Rightarrow T_{ορ} = \frac{3Mg}{8}$$

Παίρνουμε ισορροπία στον άξονα y.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + T\,συνφ - Mgσυνφ = 0 \Rightarrow N + \frac{3Mg}{8}συνφ - Mgσυνφ = 0 \Rightarrow N = 0{,}5Mg$$

Ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής είναι $\mu = \dfrac{T_{ορ}}{N} = \dfrac{\frac{3Mg}{8}}{0{,}5Mg} \Rightarrow \mu = \dfrac{3}{4}$

Β2. (i)



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα.

Παίρνουμε ισορροπία στον άξονα x.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 - T = 0 \Rightarrow N_1 = T \quad , \quad (1)$$

Παίρνουμε ροπές ως προς το (Γ).

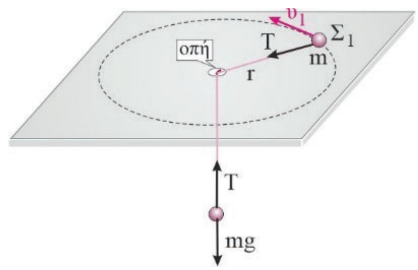
$$\Sigma\tau_{(Γ)} = 0 \Rightarrow w\frac{\ell}{2}ημφ + w_1\,x\,ημφ - N_1\ell συνφ = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} w\frac{\ell}{2} + w_1 x = T\ell$$

Πρέπει το σχοινί να αντέξει όταν ο εργάτης φτάσει μέχρι το (Α), άρα αντικαθιστώντας όπου x=ℓ στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε:

$$w\frac{\ell}{2} + w_1\ell = T_{max}\ell \Rightarrow T_{max} = \frac{w}{2} + w_1$$

Β3. (ii)



Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, οπότε η τάση είναι ίδια σε κάθε σημείο του. Η τάση T η οποία παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου είναι ίση σε μέτρο με το βάρος του σφαιριδίου που είναι κρεμασμένο από το κατακόρυφο νήμα.

$$T = mg \Rightarrow \frac{m\upsilon_1^2}{r} = mg \ , \ (1)$$

Όταν κρεμάσουμε και το δεύτερο σώμα, το συνολικό βάρος που κρέμεται είναι 8mg και η νέα τάση του νήματος είναι

$$T' = 8mg \Rightarrow \frac{m\upsilon_2^2}{r'} = 8mg \ , \ (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε: $\dfrac{\frac{m\upsilon_1^2}{r} = mg}{\frac{m\upsilon_2^2}{r'} = 8mg} \Rightarrow \dfrac{\upsilon_1^2 r'}{\upsilon_2^2 r} = \dfrac{1}{8} \ , \ (3)$

Ο φορέας της τάσης του νήματος διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, επομένως δεν δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

$$L = L' \Rightarrow m\upsilon_1 r = m\upsilon_2 r' \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{r'}{r} , \ (4)$$

Συνδυάζοντας τις (3),(4) παίρνουμε: $\left(\dfrac{r'}{r}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow r' = \dfrac{r}{2}$ και $\upsilon_2 = 2\upsilon_1$

Από τη σχέση (1) έχουμε $\dfrac{m\upsilon_1^2}{r} = mg \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{gr}$. Άρα $\upsilon_2 = 2\sqrt{gr}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το αυτοκίνητο κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

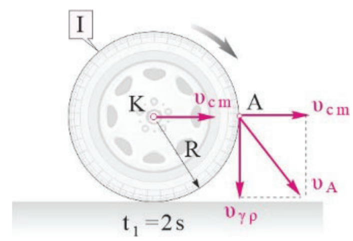
$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2x}{t^2} = 1,2\ \frac{m}{s^2}$$

Γ2. Οι μπροστινοί τροχοί κυλίονται. Επομένως

$\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu 1} R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu 1} = \dfrac{\alpha}{R} = 3\dfrac{rad}{s^2}$, $\Delta\theta_1 = \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu 1} t^2 = 6rad \Rightarrow N_1 = \dfrac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \dfrac{3}{\pi}$ στροφές

Γ3. Οι πίσω τροχοί σπινιάρουν. Η γωνιακή επιτάχυνσή τους είναι

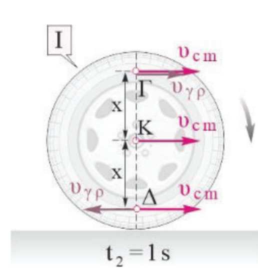
$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu 2} t^2 \Rightarrow N_2 2\pi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu 2} t^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu 2} = 4\frac{rad}{s^2}$$



Τη χρονική στιγμή t_1=2s έχουμε:

$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu 2} t_1 = 8\ \dfrac{rad}{s}$ και $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega_2 R = 3,2\ \dfrac{m}{s}$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ρόδας είναι $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t_1 = 2,4\ \dfrac{m}{s}$



Η συνολική ταχύτητα του Α είναι $\upsilon_A = \sqrt{\left(\upsilon_{cm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\gamma\rho}\right)^2} \Rightarrow \upsilon_A = 4\,\frac{m}{s}$

Γ4. Για το σημείο Γ του πίσω τροχού ισχύει $\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega x$

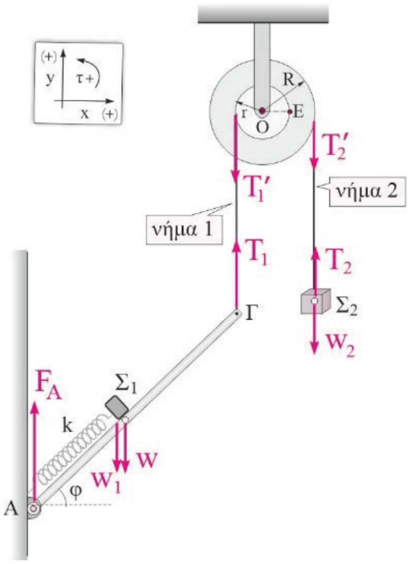
Για το σημείο Δ του πίσω τροχού ισχύει $\upsilon_\Delta = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} - \omega x$

Τη χρονική στιγμή t_2=1s: $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t_2 = 1,2\,\frac{m}{s}$, $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 = 4\frac{rad}{s}$

Από την εκφώνηση έχουμε:

$$\frac{\upsilon_\Gamma}{\upsilon_\Delta} = -13 \Rightarrow \frac{\upsilon_{cm} + \omega x}{\upsilon_{cm} - \omega x} = -13 \Rightarrow x = \frac{7\upsilon_{cm}}{6\omega} = \frac{7\alpha_{cm} t}{6\alpha_{\gamma\omega\nu} t} \Rightarrow x\frac{7\cdot 1,2}{6\cdot 4}m \Rightarrow x = 0,35m$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα και την τροχαλία.

Παίρνουμε ροπές στη σανίδα ως προς το Α.

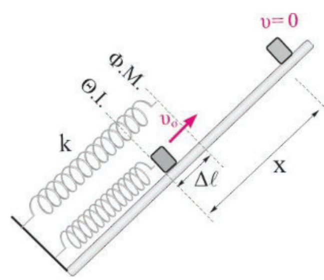
$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_1\ell\sigma\upsilon\nu\varphi - (M + m_1)g\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow T_1 = 10N$$

Παίρνουμε ροπές στην τροχαλία ως προς το (Ο).

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_1' r - T_2' R = 0 \Rightarrow T_2' = 5N ,$$

νήμα αβαρές, άρα $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$

Το Σ_2 ισορροπεί, επομένως $T_2 = w_2 = 5N \Rightarrow m_2 = 0,5kg$



Δ2. Το σώμα Σ_1 εκτοξεύεται με ταχύτητα υ_o. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση ισορροπίας μέχρι τη θέση που θα σταματήσει στιγμιαία.

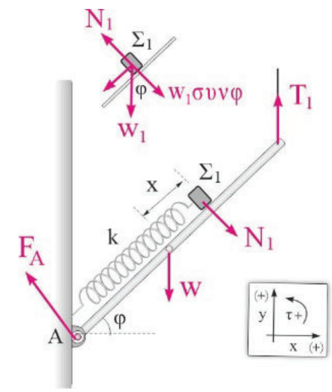
$$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = W_w + W_{F\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = -m_1 g\eta\mu\varphi\cdot x + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}k(x - \Delta\ell)^2 \text{ , (1)}$$

Στη θέση ισορροπίας του Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell \text{ , (2)}$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = 0,4m$



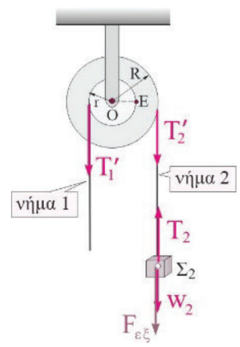
Θα βρούμε πώς συμπεριφέρεται η τάση του νήματος 1 σε σχέση με τη μετατόπιση του Σ_1 από την αρχική του θέση.

Παίρνουμε ροπές στη σανίδα ως προς το (A) όταν το Σ_1 βρίσκεται σε απόσταση x από τη Θ.Ι..

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \;\Rightarrow\; T_1\ell\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi\left(\frac{\ell}{2} + x\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$T_1 = 10 + 5x \;,\; (SI)$$

Για x= 0,4m , T_1=12N που είναι το όριο θραύσης του νήματος 1, άρα όταν το Σ_1 σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά, το νήμα 1 θα σπάσει.



Δ3. Ασκούμε εξωτερική δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ με φορά προς τα κάτω στο Σ_2 έτσι ώστε αυτό να ισορροπεί. Για να βρούμε την T_2 θα εφαρμόσουμε ροπές στην τροχαλία ως προς το κέντρο της.

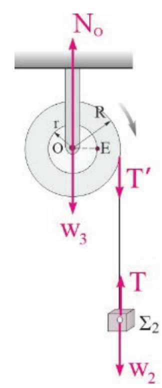
$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \;\Rightarrow\; T_1'r - T_2'R = 0 \Rightarrow T_2 = 5 + 2{,}5x \;,\; (SI)$$

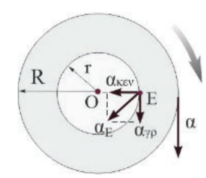
Από την ισορροπία στο Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; F_{\varepsilon\xi} + m_2 g = T_2 \;\Rightarrow\; F_{\varepsilon\xi} = 2{,}5x \quad (SI)$$

Όταν x=0,4m, το νήμα 1 σπάει και η $F_{\varepsilon\xi}$ δεν ασκείται στο Σ_2.

Δ4. Τη χρονική στιγμή t=0 η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται και το Σ_2 κατεβαίνει με επιτάχυνση $\alpha = 2m/s^2$.





Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για το Σ_2 δίνει

$$\Sigma F = m_2\alpha \;\Rightarrow\; m_2 g - T = m_2\alpha \;\Rightarrow\; T = 4N \;,\quad (T' = T)$$

i. Από την ισορροπία στην τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; N_O - M_\tau g - T' = 0 \;\Rightarrow\; N_o = 20N$$

ii. Η επιτάχυνση του Ε είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των δύο επιταχύνσεων, της γραμμικής και της κεντρομόλου.

Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{R} = 20\frac{rad}{s^2}$$

Η γραμμική επιτάχυνση του Ε είναι: $\alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\, r = 20\frac{rad}{s^2}0{,}05m \;\Rightarrow\; \alpha_{\gamma\rho} = 1\frac{m}{s^2}$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση του Ε είναι: $\alpha_{\kappa\varepsilon\nu} = \omega^2 r = (\alpha_{\gamma\omega\nu}\, t_1)^2 r \;\Rightarrow\; \alpha_{\kappa\varepsilon\nu} = 20\frac{m}{s^2}$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του Ε είναι: $\alpha_E = \sqrt{\alpha_{\gamma\rho}^2 + \alpha_{\kappa\varepsilon\nu}^2} \;\Rightarrow\; \alpha_E = \sqrt{401}\,\frac{m}{s^2}$